CESÀRO

CALCOLO INFINITESIMALE

www.rcin.org.pl

11907

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

ELEMENTI

DI

CALCOLO INFINITESIMALE

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

Inw Kat

ERNESTO CESÀRO

PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI

ELEMENTI

DI

CALCOLO INFINITESIMALE

CON NUMEROSE APPLICAZIONI GEOMETRICHE

Il ne tient qu'à moi de suivre, d'atteindre et calculer des mondes, de graviter avec eux par leurs orbites immenses; mais je me sens plus vivement attiré vers l'autre abime, celui de l'infiniment petit.

(MICHELET: *L'insecte*)

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego
L. inw. 1265

NAPOLI
LORENZO ALVANO, LIBRAJO-EDITORE.
Via Università, 26.

1897

www.rcin.org.pl

opis nr 47514

PROPRIETÀ LETTERARIA

Adempiuto quanto prescrivono le vigenti leggi, si dichiarano contraffatte le copie non firmate dall'Autore.

E. Pasaro

PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA
5265

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
diretta da Eugenio de Rubertis fu Michele
Largo S. Marcellino all'Università, 1.

Incisore: Angelo Ottati, Milano, Via Paolo Sarpi, 12.

www.rcin.org.pl

A

LUIGI MIRAGLIA

RETTORE DELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI,

IN SEGNO DI GRATITUDINE

E. CESÀRO

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

www.rcin.org.pl

AL LETTORE

Il più importante ramo della Matematica è senza dubbio quello che, traendo profitto dal semplice fatto della possibilità di rendere i numeri grandi o piccoli quanto si vuole, fonda sulle loro mutue relazioni quell'insieme di procedimenti analitici, che hanno tanta efficacia per lo studio degli enti geometrici e dei fenomeni naturali più svariati. Sono siffatti procedimenti che costituiscono il *Calcolo infinitesimale*, ed io mi propongo di svolgerli elementarmente, per uso della mia scuola, senza allontanarmi troppo dal programma seguìto, per varii anni, da G. Battaglini, mio illustre predecessore e Maestro. Abbonderò dunque alquanto nelle applicazioni, sopratutto in quelle d'indole geometrica, e m'imporrò invece, a malincuore, la massima sobrietà nell'esposizione dei principii; dei quali, d'altronde, il lettore potrà fare un più ampio studio in eccellenti opere italiane, quali sono i *corsi di Calcolo* o *Analisi infinitesimale* del Dini, del Genocchi, del Peano, e la magistrale opera del Dini: « *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* ».

Nella stampa di queste lezioni il mio amico D.r Alfredo Perna, professore nella Scuola normale di Lecce, mi ha gentilmente ajutato, disegnando le figure e correggendo le bozze; ed io lo ringrazio di cuore.

Napoli, 15 Giugno 1897.

E. C.

www.rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

TEORIE FONDAMENTALI

I. LE FUNZIONI.

Prime nozioni.

1. L'infinito non è un numero. Chi si accinge a studiare il Calcolo infinitesimale deve mettersi in mente che le parole *numero infinito* son prive di senso, giacchè *il numero* è, per sè stesso, essenzialmente finito. Il concetto dell'infinito sta semplicemente in ciò *) che, fissato un numero, ci è sempre dato di poterne pensare uno più grande. In altri termini l'infinito non misura uno *stato di grandezza* attualmente posseduto da qualche numero, ma consiste unicamente nel *modo di diventare* d'una quantità variabile, che non trovi limite alcuno nell'ingrandirsi. Rifuggire da considerazioni metafisiche nello stabilire i concetti fondamentali, ed abituarsi a non adoperar mai una parola o un simbolo, che non siano stati prima definiti nel modo più preciso, sono condizioni indispensabili per intender bene il Calcolo infinitesimale.

2. **Variabile indipendente**. Quando c'imbattiamo in una quantità variabile x, alla quale sia lecito assegnare quel valore che più ci piace, noi la chiamiamo *variabile indipendente*. L'insieme dei valori di x, compresi fra due numeri, a e b, si chiama *intervallo*, e si rappresenta con (a,b). Questi numeri sono gli *estremi* dell'intervallo, e, qualora non si dichiari esplicitamente il contrario, essi debbono essere considerati come appartenenti all'intervallo stesso; il più piccolo dicesi *estremo inferiore*, l'altro *estremo superiore*, e la loro differenza assoluta misura la *grandezza dell'intervallo*. Per esprimere che un fatto qualsiasi avviene in un intervallo, *pic-*

*) Si legga, in proposito, la terza delle « *sept leçons de physique générale* » di Cauchy. Così, del resto, intendeva l'infinito Leibnitz, uno dei fondatori del Calcolo. Vedi il « *Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand* » di P. Mansion, p. 220.

www.rcin.org.pl

si è in diritto di rappresentare $^1/_2\pi - \operatorname{arcsen} x$ con $\arccos x$, vale a dire che

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = {}^1/_2\pi \ .$$

Il lettore troverà da sè le altre relazioni che intercedono fra i simboli *arcsen*, *arccos*, *arctg*, avendo cura di tener sempre presenti le limitazioni imposte dalla definizione dei simboli stessi, senza di che è assai facile cadere in errore. Per convincersi di ciò basta osservare che la formola

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv} \ ,$$

equivalente ad una nota formola trigonometrica, non è esatta se non per $uv < 1$: quando uv supera 1 bisogna aggiungere o sottrarre π al secondo membro, secondo che il comune segno di u e v è $+$ o $-$.

d) Quando si conviene di attribuire ad y il valore 0 o il valore 1 secondo che x è razionale o irrazionale, si definisce una funzione di x, che non si presta in alcun modo all'inversione. Altrettanto si può dire della funzione definita dall'obbligo di conservarsi uguale ad 1 per tutti i valori positivi di x, a -1 per tutti i valori negativi, e di essere 0 per $x = 0$. Questa notevole funzione s'incontra frequentemente nelle ricerche aritmologiche di Kronecker *), il quale la rappresenta col simbolo $\operatorname{sgn} x$, che si legge *signum* x. A prima vista non sembra possibile esprimerla mediante i simboli funzionali già noti; ma invece è facile trovarne varie espressioni, sopratutto se si adopera l'operazione *lim*, quale si è studiata in Algebra, cioè il passaggio al limite nell'ipotesi che un numero *intero* n vada crescendo indefinitamente. Infatti si ha

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \ , \quad \operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi} \lim_{n=\infty} \operatorname{arctg} nx \ .$$

Del resto, senza far uso dell'operazione *lim*, se si conviene che la funzione $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, priva di significato per $x = 0$, valga 0 per questo valore di x, è facile vedere che si ha

$$\operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) .$$

Un'altra funzione, strettamente legata alla precedente, è definita dalla condizione di mantenersi uguale al *valore assoluto* della variabile. Si è soliti rappresentarla con $|x|$. Evidentemente $|x| = x \operatorname{sgn} x$. Finalmente la funzione

$$y = \lim_{n=\infty} \operatorname{sgn} (\operatorname{sen}^2 n! \pi x)$$

è appunto quella che abbiamo definita in principio, perchè, se x è *razionale*, $n!x$ finisce per diventare e rimanere, crescendo n, un numero intero, dimodochè $y = \operatorname{sgn} 0 = 0$: ciò non accade mai quando x è *irrazionale*, $\operatorname{sen}^2 n! \pi x$ si conserva positivo, e però $y = 1$.

e) La *frequenza* y della cifra 0 tra le cifre decimali di x è una interessante funzione di x, che noi rappresenteremo sempre con $\varpi(x)$ per distinguerla, in seguito, quando avremo occasione di addurla in esempio. In altri termini, se

---

*) « *Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste* ».

www.rcin.org.pl

fra le prime n cifre decimali del valore attribuito ad x s'incontrano m zeri, e se il rapporto di m ad n tende ad un limite, quando n cresce indefinitamente, è questo limite che noi conveniamo di assumere come valore di y, corrispondente al dato valore di x. Questa $y = \varpi(x)$ *non ammette funzione inversa*, e ciò non perchè non si possa (come nelle funzioni definite in ultimo luogo) assumere y a variabile indipendente, ma perchè ad ogni valore di y corrispondono infiniti valori di x, fra i quali non si riesce ad isolarne uno, come si è potuto fare per le funzioni circolari inverse. Infatti, *fissato* il numero positivo h, piccolo quanto si vuole, prendiamo ν sufficientemente grande perchè sia $10^\nu > 1:h$, e chiamiamo $x' - a$ il numero che si ottiene sopprimendo in $x - a$ tutte le cifre che stanno alla destra della ν^{ima} decimale. Evidentemente $|x - x'| < h$, e d'altra parte, poichè l'addizione di $x' - a$ ad a modifica soltanto un numero limitato di cifre, è chiaro che $\varpi(x') = \varpi(a)$. Dunque il valore che la funzione prende per un valore qualunque a, attribuito ad x, si ripresenta infinite volte intorno a qualunque altro valore di x. Inoltre si noti che si può far variare m insieme ad n in modo che $m:n$ non tenda ad alcun limite, e costruire così un numero a, tale che non esista $\varpi(a)$. Dalla dimostrazione precedente risulta che avviene altrettanto intorno ad ogni altro valore di x, vale a dire che *in qualunque intervallo, per piccolo che sia, la funzione* $\varpi(\mathrm{x})$, *per infiniti valori di* x, *non è definita.*

f) Le serie ci forniscono altri esempii di funzioni. Così, ponendo

$$y = x - {}^1/_2 x^2 + {}^1/_3 x^3 - \ldots,$$

si definisce la funzione y nell'intervallo $(-1, 1)$, escluso l'estremo inferiore, nel quale intervallo è noto *) che y assume gli stessi valori dell'*altra* funzione $\log(1 + x)$, definita in tutto l'intervallo $(-1, \infty)$, escluso sempre l'estremo inferiore. L'eguaglianza

$$\mathrm{F}(x) = \operatorname{sen} 2\pi x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 4\pi x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 6\pi x + \ldots\ldots$$

definisce $\mathrm{F}(x)$ per tutti i valori di x, ed è utile sapere che questa funzione si può esprimere mediante altre due, semplicissime, cioè $[x]$, *massimo intero contenuto in* x, e $\operatorname{sgn} x$. Si riesce infatti con mezzi elementari **) a dimostrare che

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{F}(x) = \operatorname{sgn}(x - [x]) - 2(x - [x]),$$

o, se si vuole,

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{F}(x) = \rho(-x) - \rho(x),$$

rappresentando con $\rho(x)$ l'eccesso di x sul massimo intero contenuto in x, cioè $x - [x]$. In particolare se ne deduce che nell'intervallo $(0, 2\pi)$, *esclusi gli estremi*, è vera la formola seguente, che ci sarà utile:

$$\operatorname{sen} x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots = {}^1/_2(\pi - x).$$

---

*) Cesàro: « *Analisi algebrica* » p. 121.

**) Pringsheim: « *Mathematische Annalen* » vol. 26, p. 193. Per la rappresentazione delle funzioni con serie trigonometriche il lettore potrà, terminato questo corso, studiare l'opera del Dini: « *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* ».

www.rcin.org.pl

g) Ma, come si è detto, non è necessario che y si sappia o soltanto si possa esprimere con simboli analitici, rappresentanti operazioni note da eseguire su x; basta che, in un modo qualsiasi, la conoscenza di *ciascun valore* di x determini *un valore* di y, per poter affermare che y è funzione di x. Per esempio la solubilità d'un sale, la tensione ed il calorico latente del vapore acqueo sono funzioni della temperatura. La più importante funzione d'una variabile indipendente, dice Thomson, è forse, a Liverpool, il *prezzo del cotone*, quantunque non si riesca a scorgere alcun legame analitico fra questo prezzo ed il *tempo*, computato a partire da un istante arbitrario. Altre funzioni del tempo sono: il tempo stesso, quale risulta dalle indicazioni d'un pessimo orologio; la temperatura in un dato punto dello spazio, o quella che vien segnata da un dato termometro, e che si lascia rappresentare *), in media ed approssimativamente, mercè le funzioni circolari; *ecc.* Per tutte queste funzioni non esiste funzione inversa. Come si potrebbe, infatti, asserire che il tempo è funzione della temperatura? Ma la più meravigliosa funzione del tempo è senza dubbio la pressione dell'aria sul timpano **): immaginandola costruita, per esempio, mercè l'audizione d'un pezzo di musica, eseguito da un'orchestra, per quanto i suoni di questa siano complicati, o bruschi, o discordi, e si sovrappongano ad altri, basterebbe la sua conoscenza per poter fedelmente riprodurre l'insieme dei suoni uditi, e per avere anche indicazioni estranee alla effettiva percezione del suono ***).

5. Un insieme di numeri si dice *finito* se i numeri che lo costituiscono appartengono ad un intervallo finito. Evidentemente un tale intervallo (a,b) si può rendere grande quanto si vuole, facendo diminuire a e crescere b, senza che cessi di contenere tutti i numeri dell'insieme; ma non è possibile renderlo piccolo ad arbitrio. Quando a va crescendo e b diminuendo può darsi (e più oltre si vedrà che ciò avviene sempre) che si finisca per incontrare due numeri λ e μ, tali che nell'intervallo (λ,μ) cada, come in (a,b), ogni numero dell'insieme, ma che, per quanto poco si faccia ancora crescere λ o diminuire μ, il nuovo intervallo non contiene più *tutti* quei numeri. Orbene gli estremi di questo minimo intervallo (λ,μ) si chiamano *limite inferiore* e *limite superiore* dell'insieme che si considera, e si possono definire così: *il limite inferiore* (superiore) *d'un insieme di numeri è il massimo* (minimo) *fra i numeri non maggiori* (minori) *di alcun numero dell'insieme.* Ciascuno di questi limiti non appartiene sempre all'insieme dato; ma è chiaro che, se ciò accade, esso è il minimo o il massimo numero dell'insieme. Viceversa, quando un tal minimo (o un tal massimo) esiste, esso è necessariamente il limite inferiore (o il limite superiore) dell'insieme che si considera. Così, preso un numero positivo q, minore di 1, l'insieme dei numeri $1, q, q^2, q^3, \ldots$ ha come limiti 0 ed 1; ma, mentre 1 è il massimo, 0 non si può chiamare minimo, perchè non sta fra i numeri dati. Similmente l'insie-

*) Liagre: « *Calcul des probabilités* » p. 288.

**) Duhem: « *Cours de physique mathématique* » (autogr. t. II, p. 280).

***) Thomson: « *Conférences scientifiques et allocutions* » p. 178 (con nota di Brillouin in fondo alla pag. 180).

www.rcin.org.pl

me dei numeri razionali, appartenenti all'intervallo $(0, \pi)$, ha come limiti gli estremi dell'intervallo; ma 0 è il minimo numero dell'insieme considerato, mentre π, limite superiore, non si può chiamare massimo, perchè non è un numero razionale.

6. Una funzione si dice *finita* in un dato intervallo quando è finito l'insieme dei valori che essa prende nell'intervallo stesso; ed i limiti di questo insieme si chiamano limiti (inferiore e superiore) della funzione. In altri termini il limite inferiore d'una funzione, in un dato intervallo, è caratterizzato dalla doppia proprietà di non superare alcun valore della funzione, e di esser tale che ogni numero superiore ad esso è anche superiore a qualche valore della funzione; ed analogamente il limite superiore, non superato da alcun valore della funzione, è tale che ogni numero inferiore ad esso è superato da qualche valore della funzione. Questi limiti possono dirsi *minimo* e *massimo* sol quando la funzione li raggiunga effettivamente nell'intervallo che si considera. Così, per esempio, la funzione $\operatorname{sen} x$ è finita in qualunque intervallo, e vi ammette sempre un minimo ed un massimo, che sono -1 e $+1$ quando l'intervallo non è minore di 2π. È anche finita la funzione $x-[x]$, che in ogni intervallo non minore di 1 assume il valore minimo 0, ma è priva di massimo, perchè 1, limite superiore, non è un valore che la funzione raggiunge. Invece la funzione che per $x \gtrless 0$ è espressa da $\frac{1}{x}$, e per $x=0$ è uguale a 0, non è finita negli intervalli che racchiudono 0, perchè, dato l arbitrariamente grande, è sempre possibile trovare valori della funzione superiori ad l o inferiori a $-l$: basta prendere x inferiore ad $\frac{1}{l}$ in valore assoluto. Una funzione può anche essere finita in un senso, e non essere finita nel senso opposto, come, per esempio, non è finita la funzione espressa dal quadrato della precedente, in ogni intervallo che racchiude zero; come non è finita $e^{\frac{1}{x}}$ quando nell'intervallo che si considera, escluso l'estremo superiore, è contenuto lo zero; *ecc.* Queste funzioni non sono finite, in quanto che son prive di limite superiore, mentre ammettono in qualunque intervallo un valor minimo.

7. **Lemma I.** *Ogni criterio, che permette di scomporre l'insieme di tutti i numeri in due classi, tali che i numeri d'una classe siano inferiori a quelli dell'altra, individua un numero, massimo nella classe inferiore o minimo nella classe superiore.*

Prendiamo infatti un numero a nella classe inferiore, un numero b nella classe superiore, e spezziamo in due l'intervallo (a, b) mediante il numero $c = {}^1/_2(a+b)$. Secondo che questo appartiene alla classe inferiore o alla classe superiore, consideriamo l'intervallo (c, b) o (a, c), che rappresenteremo sempre con (a_1, b_1), dimodochè si ha, nel primo caso, $a_1 = c > a$, $b_1 = b$, e nel secondo $a_1 = a$, $b_1 = c < b$. In entrambi i casi

$$a_1 \geqq a \ , \ b_1 \leqq b \ , \ b_1 - a_1 = {}^1/_2(b-a) \, .$$

www.rcin.org.pl

Come dall'intervallo (a, b) si è dedotto (a_1, b_1), così da questo si può nello stesso modo dedurre un intervallo (a_2, b_2), poi (a_3, b_3), *ecc.*, e seguitando si perviene ad un (a_n, b_n), che si trova sempre, qualunque sia n, nelle identiche condizioni di (a, b), in quanto che il suo estremo inferiore appartiene alla classe inferiore, ed il superiore alla classe superiore. Intanto si ha

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \,,\; b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \,,\; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \,,$$

e si vede che i numeri a_n, mantenendosi inferiori a b, vanno crescendo con n, o si serbano costanti. Essi tendono dunque ad un limite ξ, al quale tendono anche i numeri b_n, perchè, crescendo n all'infinito,

$$\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0 \,,\; \lim b_n = \lim a_n + \lim(b_n - a_n) = \xi \,.$$

Orbene è questo ξ il numero individuato dalle due classi. Fissato ad arbitrio $x < \xi$, siccome $\lim a_n = \xi$, si deve poter prendere n sufficientemente grande affinchè sia $a_n > x$, e però x appartiene, come a_n, alla classe inferiore, e nello stesso modo si dimostra che ogni numero maggiore di ξ appartiene alla classe superiore. Intanto ξ sta necessariamente in una delle due classi, poichè abbiamo supposto che *tutti* i numeri siano stati classificati; ed è chiaro che, in quella classe che lo racchiude, esso è il massimo o il minimo numero, giacchè per poco che se ne aumenti o se ne diminuisca il valore si cade nell'altra classe.

8. **Lemma II.** *Ogni insieme finito, costituito da infiniti numeri, racchiude almeno un numero, intorno al quale cadono infiniti numeri dell'insieme stesso.*

Infatti, se dividiamo in due, come nel paragrafo precedente, l'intervallo (a, b), che racchiude tutti i numeri dell'insieme, è chiaro che in uno almeno dei due intervalli parziali cadono ancora infiniti numeri dell'insieme. Un tale intervallo, metà del precedente, si rappresenti con (a_1, b_1), e da esso analogamente si deduca una successione di intervalli (a_n, b_n), i cui estremi tendono, come si è visto, ad un comune limite ξ. Ora, fissato il numero positivo h, si deve poter trovare un numero n sufficientemente grande perchè sia $a_n > \xi - h$, e simultaneamente $b_n < \xi + h$. Così l'intervallo (a_n, b_n) è contenuto in $(\xi - h, \xi + h)$, e però in questo cadono, come in (a_n, b_n), infiniti numeri dell'insieme, e ciò per valori di h piccoli quanto si vuole.

9. **Teorema I.** *Se una funzione è finita in un intervallo, essa vi ammette sempre il limite inferiore ed il limite superiore.*

Poniamo in una classe, che diremo inferiore, tutti i numeri che non son maggiori di alcun valore della funzione, e nell'altra quelli che superano qualche valore della funzione. Ogni numero a della classe inferiore è infe-

www.rcin.org.pl

riore a qualunque numero b della classe superiore, giacchè, per dire che b appartiene a questa classe, è necessario che la funzione prenda almeno un valore y_0 minore di b, e d'altra parte, non potendo a superare y_0, è $a \leqq y_0 < b$. La classifica così fatta di *tutti* i numeri definisce, in virtù del primo lemma, un numero λ. Intanto non può esistere nella classe superiore un numero b più piccolo di tutti gli altri, perchè ogni numero b', tale che $y_0 < b' < b$, appartiene alla stessa classe. Dunque λ è massimo nella classe inferiore, cioè *massimo fra i numeri non maggiori di alcun valore della funzione*: esso è dunque il limite inferiore. Nello stesso modo si dimostra l'esistenza del limite superiore. Evidentemente il teorema vale per qualunque insieme finito di numeri.

10. **Teorema II**. *Se una funzione è finita intorno a tutti i numeri di un intervallo finito, essa è finita nell'intervallo.*

Procedendo per assurdo dimostreremo che, se la funzione non è finita nell'intervallo dato, esiste in questo almeno un numero, intorno al quale essa non è finita. Negando che la funzione sia finita si afferma la possibilità di trovare, fra i valori che la funzione assume nell'intervallo che si considera, almeno un valore y_1 superiore ad un numero l_1, arbitrariamente prestabilito, e quindi anche un valore y_2 superiore ad un numero arbitrario l_2, maggiore di y_1; e così di seguito, indefinitamente, avendo cura di costruire, i numeri $l_1, l_2, l_3, \ldots$ in modo che vadano crescendo oltre ogni limite. I valori $y_1, y_2, y_3, \ldots$ della funzione corrispondono a valori $x_1, x_2, x_3, \ldots$ della variabile indipendente, *tutti differenti fra loro* e per conseguenza in numero infinito. Questi appartengono ad un intervallo finito, e però, in virtù del secondo lemma, ve ne sono infiniti intorno ad uno o più numeri dell'intervallo: sia ξ un tal numero. Fissiamo h positivo ed arbitrariamente piccolo, e dimostriamo che nell'intervallo $(\xi - h, \xi + h)$ la funzione può superare qualunque numero l, grande quanto si vuole. Infatti, se si prende ν sufficientemente grande perchè sia $l_n > l$ per ogni $n > \nu$, e se si osserva che nella successione $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, x_{\nu+3}, \ldots$ si deve sempre finire per incontrare un numero x_n appartenente all'intervallo $(\xi - h, \xi + h)$, si vede subito che in questo la funzione prende il valore $y_n > l_n > l$.

11. **Teorema III** (primo di Weierstrass). *Se una funzione è finita in un intervallo finito, questo racchiude almeno un numero, intorno al quale la funzione ha gli stessi limiti, inferiore e superiore, che ammette nell'intervallo dato.*

Possiamo limitarci a dimostrare il teorema per un solo dei limiti: sia, per esempio, il limite inferiore λ. Se questo *è un minimo*, esiste, nell'intervallo (a, b) che si considera, almeno un numero ξ, per cui si ha $f(\xi) = \lambda$, ed è chiaro che intorno a ξ il numero λ è sempre il minimo valore della funzione. Se λ *non è un minimo*, ciò vuol dire che $f(x) - \lambda$ si conserva sempre positiva in (a, b), ma può prendere valori piccoli quanto si vuole,

www.rcin.org.pl

d'onde segue che la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

è definita in tutto quell'intervallo, ma *non è finita.* Esiste dunque in (a, b) un numero ξ, intorno al quale $\varphi(x)$ non è finita, vale a dire che, dato un numero l, grande quanto si vuole, si riuscirà sempre a trovare nell'intervallo $(\xi - h, \xi + h)$, arbitrariamente piccolo, un numero x_0, tale che $\varphi(x_0) > l$, e conseguentemente $f(x_0) < \lambda + \frac{1}{l}$, cioè $f(x_0)$ inferiore ad un numero maggiore di λ, ma vicino a λ quanto ci piace. Dunque in $(\xi - h, \xi + h)$, come in (a, b), il numero λ è il massimo fra quelli che non superano alcun valore della funzione.

Tendenza al limite.

12. Si dice che i valori di $f(x)$, a destra di a, tendono al limite l, quando, tendendo x ad a per valori decrescenti, la differenza $f(x) - l$ finisce per *diventare* e *restare* inferiore, in valore assoluto, a qualsiasi numero positivo. In termini più espliciti, si dice che $f(x)$ ha per limite l, a destra di a, e si scrive

$$\lim_{x=a+0} f(x) = l \ ,$$

quando ad ogni numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, corrisponde un numero positivo h, tale che per ogni valore di x, appartenente all'intervallo $(a, a + h)$, escluso l'estremo inferiore, sia

$$|f(x) - l| < \varepsilon \ . \qquad (1)$$

Similmente si dice che $f(x)$ ha per limite l, a sinistra di a, e si scrive

$$\lim_{x=a-0} f(x) = l \ ,$$

quando ad ogni numero $\varepsilon > 0$ corrisponde un numero $h > 0$, tale che sia vera la (1) per tutti i valori di x non inferiori ad $a - h$, ma inferiori ad a. Quando poi si scrive, come avviene comunemente,

$$\lim_{x=a} f(x) = l \ ,$$

si vuole affermare che i limiti di $f(x)$, a destra ed a sinistra di a, esistono, coincidono e sono uguali ad l. Solo per brevità si usa scrivere e dire che $f(x)$ tende ad l *per* $x = a$; ma è sottinteso che x deve assumere tutti i valori infinitamente prossimi ad a, *escluso* precisamente il valore a. Insomma non bisogna confondere i valori destro e sinistro, $f(a + 0)$ ed $f(a - 0)$, che una funzione *tende ad avere* in a, col valore $f(a)$ che essa *prende effettivamente* per $x = a$.

13. Si dice poi che, per x infinito, $f(x)$ tende ad un limite l, quando ad ogni numero positivo ε corrisponde un numero ξ, tale che per $x > \xi$ sia

www.rcin.org.pl

sempre vera la (1). Si dice che, per x tendente ad a, a destra o pure a sinistra, i valori di $f(x)$ crescono oltre ogni limite (o tendono all'infinito), e si conviene di scrivere

$$\lim_{x=a+0} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x=a-0} f(x) = \infty \ ,$$

quando ad ogni numero l, arbitrariamente grande, corrisponde un numero positivo h, tale che nell'intervallo $(a, a+h)$, o in $(a-h, a)$, escluso l'estremo a, sia sempre $f(x) > l$. In modo analogo si definisce la tendenza all'infinito negativo. Si dice finalmente che, per x infinito, $f(x)$ cresce oltre ogni limite, e si conviene di scrivere

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty \ ,$$

quando ad ogni numero l, arbitrariamente grande, corrisponde un numero ξ, tale che per $x > \xi$ sia sempre $f(x) > l$. Per poco che vi si rifletta è facile convincersi che tutte queste definizioni sono informate ad un principio unico. Qui è bene osservare che spesso, invece di affermare che una funzione cresce indefinitamente quando x tende ad a, o che tende ad un limite l quando x cresce indefinitamente, si dice che la funzione *è infinita* per $x=a$, o che, *per x infinito*, ha il valore l. Sono locuzioni puramente convenzionali, che hanno la loro utilità, e che non possono dar luogo ad inconvenienti quando se ne sia dichiarato, una volta per tutte, il significato preciso. Ed in corrispondenza a quel modo di esprimersi si usa scrivere

$$f(a) = \infty \ , \quad \text{o} \quad f(\infty) = l \ .$$

Così diventa lecito definire (*cfr.* § 4, *c)*) $\operatorname{arctg} x$ nel modo stesso di $\operatorname{arcsen} x$, senza escludere i valori $\pm {}^1/_2\pi$, altrimenti sarebbero prive di significato le uguaglianze $\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm {}^1/_2\pi$, come l'altra $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$: in questa, veramente, si sottintende qualche cosa di più, cioè che nel primo membro va messo ${}^1/_2\pi - 0$ per ${}^1/_2\pi$, giacchè si ha $\operatorname{tg}({}^1/_2\pi \pm 0) = \mp\infty$.

14. Con dimostrazioni identiche a quelle che sono state adoperate in Algebra, nel caso d'una variabile intera, si stabiliscono le seguenti proprietà. Una funzione che assume, al crescere di x, valori tali, che nessuno sia più piccolo d'un valore precedente, deve, per x infinito, tendere ad un limite finito o infinito, perchè ad una simile funzione basta *diventare* maggiore d'un numero fisso per *restar* poi tale quando x cresce. Se una funzione è compresa fra altre due che tendono, per x tendente ad a, ad un comune limite l, tenderà anch'essa ad l. Se, per x tendente ad a, una funzione ammette un limite diverso da zero, essa finisce per assumere e conservare il segno di questo limite; e però una funzione che, intorno ad un dato valore a della variabile indipendente, non cessa mai di assumere valori positivi e valori negativi, non può, quando x tende ad a, tendere ad un limite

www.rcin.org.pl

diverso da zero. Se $u, v, w, \ldots$ sono funzioni di x, ed è, per x tendente ad a,

$$\lim u = \alpha \quad , \quad \lim v = \beta \quad , \quad \lim w = \gamma \; , \; \ldots \; ,$$

è pure

$$\lim (u + v + w + \cdots) = \alpha + \beta + \gamma + \cdots \quad , \quad \lim uvw \cdots = \alpha\beta\gamma \cdots \; ,$$

purchè le funzioni considerate siano in numero finito. Il limite del quoziente di u per v è il quoziente di α per β, *purchè* β *non sia nullo*; ma qualche cosa si può anche dire nei casi in cui il denominatore non tende ad un limite finito, diverso da zero. Infatti, se v cresce indefinitamente, mentre u si mantiene finita, il quoziente tende a zero; e se v tende a zero conservando il segno di u, mentre $1:u$ si mantiene finita, il quoziente cresce indefinitamente in valore assoluto. Non abbiamo ancora i mezzi per calcolare il limite del quoziente quando numeratore e denominatore tendono simultaneamente a zero o all'infinito; ma la questione sarà trattata alla fine del secondo capitolo.

15. **Lemma.** *Da qualunque successione di numeri si può sempre staccare un'altra successione, che tenda ad un limite finito o infinito.*

La successione proposta $a_1, a_2, a_3, \ldots$, se non contiene infiniti numeri inferiori o uguali ad a_1, ne racchiude certamente infiniti che superano a_1. Supponiamo, per fissare le idee, che vi siano infiniti numeri superiori ad a_1, e rappresentiamo con a_{r_1} uno di essi. Questo può, a sua volta, essere seguito da qualche numero a_{r_2} che lo superi, e fra i numeri che seguono a_{r_2} può darsi che se ne trovi uno, a_{r_3}, superiore ad a_{r_2}, *ecc.* Quando la scelta di questi numeri si possa protrarre all'infinito, si riuscirà a staccare dalla successione data una successione di numeri crescenti, i quali tendono necessariamente ad un limite finito o infinito. Nel caso contrario si dovrà finire per trovare qualche numero a_{r_λ}, non superato dai numeri che lo seguono. Fra questi resteranno sempre infiniti numeri superiori ad a_1: da uno di essi, a_{s_1}, si inizii una nuova successione di numeri crescenti, che potrà fermarsi ad un termine a_{s_μ}, non inferiore ad alcun termine seguente, ma inferiore o uguale ad a_{r_λ}. Così proseguendo si costruisce il quadro

$$a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \cdots\cdots < a_{r_\lambda} \; ,$$

$$a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \cdots\cdots < a_{s_\mu} \; ,$$

$$a_1 < a_{t_1} < a_{t_2} < \cdots\cdots < a_{t_\nu} \; ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e se non si giunge ad una successione indefinita di numeri crescenti, si finisce per costruire la successione indefinita di numeri non crescenti

$$a_{r_\lambda} \geqq a_{s_\mu} \geqq a_{t_\nu} \geqq \cdots\cdots \; ,$$

che ammette un limite finito.

www.rcin.org.pl

16. **Teorema IV.** *Per l'esistenza d'un limite finito di* f(x), *a destra di* a, *occorre e basta che, dato* ε *positivo e piccolo quanto si vuole, si possa sempre trovare un numero positivo* h, *tale che, per ogni coppia di valori* x′ *ed* x″, *presi nell'intervallo* (a, a + h), *escluso l'estremo inferiore, riesca* f(x′) — f(x″) *inferiore ad* ε *in valore assoluto.*

La condizione è necessaria. Se, infatti, $f(x)$ tende ad l, quando x tende ad a per valori decrescenti, vuol dire che, dato $\varepsilon > 0$ piccolo quanto si vuole, esiste un numero positivo h, tale che per ogni valore di x non superiore ad $a+h$, ma superiore ad a, è sempre

$$|f(x)-l| < {}^1/_2\varepsilon \ .$$

Dunque, se x' ed x'' appartengono al detto intervallo, si ha simultaneamente

$$|f(x')-l| < {}^1/_2\varepsilon \quad , \quad |f(x'')-l| < {}^1/_2\varepsilon \ ;$$

poi

$$|f(x')-f(x'')| \leqq |f(x')-l| + |l-f(x'')| < \varepsilon \ .$$

Inversamente, dato ad arbitrio il numero positivo ε, supponiamo determinato un intervallo $(a, a+h)$ in cui si abbia, escludendo l'estremo inferiore,

$$|f(x')-f(x'')| < {}^1/_2\varepsilon \ . \qquad (2)$$

Nel detto intervallo si scelga arbitrariamente una successione di numeri decrescenti, tendenti ad a, e si consideri la successione dei corrispondenti valori della funzione. Abbiamo visto che da questa seconda successione si possono sempre staccare infiniti termini $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$, che tendano ad un limite, e questo limite non può essere infinito, perchè dalla (2) si deduce

$$f(a_1) - {}^1/_2\varepsilon < f(a_n) < f(a_1) + {}^1/_2\varepsilon \ .$$

Sia dunque

$$\lim_{n=\infty} f(a_n) = l \ ,$$

e si prenda n sufficientemente grande perchè si abbia

$$|f(a_n)-l| < {}^1/_2\varepsilon \ .$$

Per ogni valore di x, preso in $(a, a+h)$, escluso sempre l'estremo inferiore, è pure, per l'ipotesi (2),

$$|f(x)-f(a_n)| < {}^1/_2\varepsilon \ ;$$

quindi, sommando le ultime due disuguaglianze,

$$|f(x)-l| \leqq |f(x)-f(a_n)| + |f(a_n)-l| < \varepsilon \ .$$

È dunque l il limite destro di $f(x)$. Con lieve modifica il teorema vale anche per l'esistenza del limite sinistro. È poi facile adattare la dimostrazione precedente al caso di x crescente all'infinito: basterà sostituire al numero

www.rcin.org.pl

h un numero ξ, estremo inferiore d'un intervallo infinito, in cui vanno presi i numeri x' ed x''.

Continuità.

17. **Funzioni continue.** Una funzione si dice *continua*, per $x=a$, quando, a destra ed a sinistra di a, i limiti dei suoi valori coincidono col particolare valore che la funzione assume per $x=a$. La continuità di $f(x)$, per $x=a$, è dunque espressa dalle uguaglianze

$$f(a+0)=f(a) \quad , \quad f(a-0)=f(a) \ .$$

La funzione si dice *continua in un intervallo* quando è continua per *tutti* i numeri dell'intervallo. Può darsi che la funzione sia continua *soltanto a destra* o *soltanto a sinistra* di a. Ciò avviene quando sussiste una sola delle precedenti uguaglianze. Si noti che nel dire, per esempio, che una funzione è *continua a destra* di a, si è costretti ad andar contro una definizione generale, posta precedentemente (I, 2); e però, quando si vuole asserire che in un intervallo, preso alla destra di a, la funzione è continua, bisogna aver cura di dirlo esplicitamente. Importa osservare che la definizione della continuità è tutta contenuta nell'uguaglianza

$$\lim f(x)=f(\lim x) \ ,$$

dimodochè si può dire che la possibilità di permutare il simbolo *lim* col simbolo f è caratteristica per le funzioni continue.

18. È chiaro che proprietà analoghe a quelle dimostrate in Algebra, nella teoria dei limiti, si hanno per le funzioni continue. In particolare: *la somma ed il prodotto di più funzioni continue, in numero finito, sono funzioni continue.* Se, per esempio, sono continue per un determinato valore di x le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, per lo stesso valore di x sono continue

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x) \quad , \quad g(x)=\varphi(x)\psi(x) \ ,$$

perchè

$$\lim f(x)=\lim\varphi(x)+\lim\psi(x)=\varphi(\lim x)+\psi(\lim x)=f(\lim x) \ ,$$

$$\lim g(x)=\lim\varphi(x).\lim\psi(x)=\varphi(\lim x)\psi(\lim x)=g(\lim x) \ .$$

È anche funzione continua il quoziente di due funzioni continue, *purchè si escludano quei valori della variabile indipendente, che annullano il denominatore.* Finalmente si osservi che *ogni funzione continua d'una funzione continua di* x *è funzione continua di* x. Infatti, se con le funzioni continue $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si forma la funzione $f(x)=\varphi(\psi(x))$, si ha

$$\lim f(x)=\lim\varphi(\psi(x))=\varphi(\lim\psi(x))=\varphi(\psi(\lim x))=f(\lim x) \ ,$$

purchè negli intervalli in cui si avvera la continuità di φ cadano valori, che ψ prende negli intervalli in cui è continua. Questi valori costituiscono, come poi (§ 26) si vedrà, uno o più intervalli, nei quali è continua la funzione f.

www.rcin.org.pl

19. La nozione di continuità è assai utile per *completare la definizione* di talune funzioni, segnatamente di quelle che in Algebra sono state definite soltanto per valori razionali della variabile indipendente. Se la funzione $f(x)$ è tale che, dato il numero positivo ε, piccolo quanto si vuole, sia possibile determinare intorno ad ogni valore di x un intervallo, nel quale la differenza fra due valori qualunque della funzione riesca in valore assoluto inferiore ad ε, è facile estendere il significato di $f(x)$ al caso di x irrazionale *in modo da ottenere una funzione continua* per tutti i valori della variabile indipendente. All'uopo si costruisca arbitrariamente una successione a_1, $a_2, a_3, \ldots$ di numeri razionali tendenti al limite irrazionale a, e si prenda intorno ad a un intervallo tale che nel suo interno il valore assoluto della differenza fra due valori qualunque della funzione risulti sempre inferiore ad ε. In questo intervallo finiscono per cadere i termini della successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dimodochè, se n' ed n'' superano un certo numero, si ha

$$|f(a_{n'}) - f(a_{n''})| < \varepsilon .$$

Dunque, in virtù d'un noto teorema *), il limite di $f(a_n)$, per n infinito, esiste; ed è questo limite che noi *conveniamo di assumere come valore di* f(a). Ora vogliamo dimostrare che *la funzione così definita è continua* per ogni valore a, razionale o irrazionale, della variabile indipendente. L'intervallo $(a-h, a+h)$ sia abbastanza piccolo perchè la differenza di due valori della funzione, corrispondenti ad una coppia qualunque di valori razionali della variabile indipendente, presi nell'intervallo stesso, riesca in valore assoluto inferiore ad $^1/_3\varepsilon$. In tale intervallo si assuma ad arbitrio un numero x, razionale o irrazionale, e si determini, senza uscire dall'intervallo, una coppia di numeri razionali, a' ed x', tali che si abbia

$$|f(a) - f(a')| < {}^1/_3\varepsilon \quad , \quad |f(x) - f(x')| < {}^1/_3\varepsilon .$$

Ciò è sempre possibile, perchè, se a è irrazionale, esistono intorno ad esso infiniti numeri razionali che fanno tendere ad $f(a)$ i valori della funzione, e se a è razionale la prima disuguaglianza è vera per ogni numero razionale a', preso ad arbitrio in $(a-h, a+h)$. Altrettanto dicasi di x e della seconda disuguaglianza. Siccome poi x' ed a' sono numeri razionali appartenenti all'intervallo $(a-h, a+h)$, si ha pure $|f(x') - f(a')| < {}^1/_3\varepsilon$. Ora, osservando che la differenza $f(x) - f(a)$ è scomponibile nella somma di queste altre

$$f(x) - f(x') \ , \ f(x') - f(a') \ , \ f(a') - f(a) \ ,$$

ciascuna delle quali è inferiore ad $^1/_3\varepsilon$ in valore assoluto, si ha

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

per *tutti* i valori di x appartenenti ad $(a-h, a+h)$. Dunque $\lim\limits_{x=a} f(x) = f(a)$.

---

*) « *Analisi algebrica* » p. 97.

www.rcin.org.pl

20. **Esempii**: *a)* Si riconosce subito che le funzioni $y=1, x, x^2, \ldots, \sqrt{x}$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, *ecc.* sono continue. Per esempio, da

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}\ ,\quad \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a=2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\ ,$$

si deduce, per x tendente ad a, $\lim\sqrt{x}=\sqrt{a}$, $\lim\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a$. Anche la funzione espressa in generale dal quoziente di $\operatorname{sen} x$ per x, ma uguale ad 1 per $x=0$, è continua per $x \gtrless 0$ come quoziente di due funzioni continue, ed è continua per $x=0$ perchè l'arco x, nel tendere a zero, resta compreso fra il suo seno e la sua tangente, dimodochè si ha

$$\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1\ ,\quad \lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1\ .$$

b) La funzione a^x è stata definita in Algebra solo per x razionale; ma è facile completarne la definizione, per $a>0$, seguendo le indicazioni del § 19. Bisogna prima di tutto ricordarsi che, per x' ed x'' razionali, la differenza fra i corrispondenti valori di a^x si può rendere piccola quanto si vuole prendendo $x'-x''$ sufficientemente piccolo in valore assoluto, giacchè in tal modo $a^{x'-x''}$ differirà da 1 tanto poco quanto ci piace, e sarà pertanto arbitrariamente piccolo anche $a^{x'}-a^{x''}$, prodotto di $a^{x''}$ per $a^{x'-x''}-1$. Dopo ciò si è sicuri, per quanto si è detto nel paragrafo precedente, che, qualunque sia la successione di numeri razionali $x_1, x_2, x_3, \ldots$, tendenti ad un dato limite irrazionale x, la successione $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots$ ammette anch'essa un limite finito, che dipende solo da x: è questo limite che si rappresenta con a^x. È facile dimostrare che la funzione a^x, così definita, conserva le varie proprietà che noi già le conosciamo per x razionale, cioè il variare sempre in un senso quando x va crescendo, il crescere indefinitamente con x, o tendere a zero, secondo che a è maggiore o minore di 1, e finalmente la proprietà $a^{x'}.a^{x''}=a^{x'+x''}$.

c) Segue dalle ultime osservazioni che l'eguaglianza $a^y=x$ definisce y come funzione di x nell'intervallo $(0, \infty)$, escluso l'estremo inferiore, giacchè ad ogni valore positivo di x corrisponde uno ed *un sol* valore di y. Questa funzione, inversa di a^x, è il *logaritmo* di x in base a, o $\operatorname{Log} x$. Noi ci serviremo sempre dei logaritmi naturali, la cui base è il numero *)

$$e=\lim_{n=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718281828459045\ldots,$$

e li rappresenteremo con $\log x$. Del resto dall'identità $a^{\operatorname{Log} x}=e^{\log x}$ si deduce, prendendo i logaritmi dei due membri nell'uno o nell'altro sistema, $\operatorname{Log} x=m\log x$, dove con m si designa la costante $\operatorname{Log} e=1:\log a$, che si suole chiamare *modulo* del sistema dei logaritmi in base a. In particolare, per $a=10$, si trova $m=0{,}434294981\ldots$ La continuità di $\operatorname{Log} x$ è una immediata conseguenza della continuità di a^x.

d) Quando x tende a zero, il quoziente di a^x-1 per x resta compreso fra i numeri

$$n\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right)\ ,\quad (n+1)\left(\sqrt[n]{a}-1\right),$$

---

*) « *Analisi algebrica* » pp. 109, 120.

www.rcin.org.pl

nei quali $n = [1:x]$; e siccome *) si ha

$$\lim_{n=\pm\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \log a \ ,$$

si ha pure

$$\lim_{x=0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \ .$$

Un esempio di funzione continua per tutti i valori della variabile indipendente ci è dunque offerto dalla funzione che per $x \gtrless 0$ è espressa da $(a^x - 1):x$, e per $x = 0$ è uguale a $\log a$. Analogamente si dimostra che

$$\lim_{x=0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \ ,$$

ed è continua, per conseguenza, la funzione espressa da $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ in generale, ma uguale ad e per $x = 0$.

21. **Funzioni discontinue.** Una funzione si dice *discontinua*, per un certo valore di x, quando non è continua; e *discontinua in un intervallo* quando è discontinua per *un* valore almeno, appartenente all' intervallo stesso. La discontinuità può verificarsi da ciascun lato di $x = a$, o da un lato solo, ed in ogni caso le discontinuità che si possono avere a destra o a sinistra di a sono fra loro indipendenti. Occupiamoci dunque delle discontinuità possibili a destra di a, ed osserviamo che la funzione è discontinua sia quando, esistendo il suo limite destro, esso ha un valore finito, diverso da $f(a)$, sia quando tale limite è infinito o non esiste. Nel primo caso la discontinuità si dice *ordinaria* o di *prima specie*, nel secondo è di *seconda specie*. La differenza sostanziale fra le due specie sta in ciò, che la seconda non dipende dal valore che la funzione prende per quel valore di x che si considera, ma unicamente dal modo di comportarsi della funzione intorno al detto valore. In altri termini, per sapere se $f(x)$ è discontinua di seconda specie a destra o a sinistra di a, è inutile conoscere $f(a)$: ciò è indispensabile, invece, per sapere se la funzione ha una discontinuità ordinaria, la quale potrebbe anche scomparire, almeno da un lato di a, cambiando il valore di $f(a)$.

22. **Esempii**: *a)* Dalle proposizioni finali del § 18 segue che $\frac{1}{x}$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ sono continue fintantochè $x \gtrless 0$; ma, per $x = 0$, esse hanno una discontinuità di seconda specie. Per constatare ciò non occorre informarsi qual valore s' intenda assegnar loro per $x = 0$; basta osservare che, per x tendente a zero, il valore assoluto di $\frac{1}{x}$ cresce oltre ogni limite, e che $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ non tende ad alcun limite, giacchè in un intervallo arbitrariamente piccolo $(-h, h)$ riprende, un dopo l'altro, i valori $0, 1, 0, -1$ tutte le volte che il valore assoluto di $\frac{2}{\pi x}$, crescendo oltre

*) « *Analisi algebrica* » p. 111.

www.rcin.org.pl

ogni limite, diventa un numero intero, congruo (*modulo* 4) ad uno dei numeri 0, 1, 2, 3. Invece la funzione che per $x \gtrless 0$ è espressa da $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ è continua anche per $x = 0$, o per questo valore presenta una discontinuità ordinaria, secondo che il valore attribuitole per $x = 0$ è o non è zero. Che una discontinuità possa presentarsi anche da un lato solo d'un valore di x, si vede subito considerando, per esempio, la funzione che per $x = 0$ è zero, e per $x \gtrless 0$ è espressa da $e^{\frac{1}{x}}$: questa è continua a sinistra dello zero, discontinua a destra, perchè i suoi valori tendono a zero o all'infinito secondo che x tende a zero per valori negativi o per valori positivi. Discontinua come $\frac{1}{x}$, a destra dello zero, è la funzione $\log x$, continua per $x > 0$, priva di senso per $x < 0$. Altrettanto si può dire di $\operatorname{sen} \log x$, discontinua come $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$, ma continua per $x > 0$, in virtù dell'ultima proposizione del § 18. Anche per questa ragione è continua $\log \operatorname{sen} x$ fintantochè non si ha $\operatorname{sen} x = 0$; ma è discontinua come $\frac{1}{x}$ a destra dei multipli pari di π, ed a sinistra dei multipli dispari, comunque se ne completi la definizione. Le funzioni precedenti, come tutte quelle che sono discontinue un numero finito di volte in un intervallo finito, si dicono *generalmente continue*, per distinguerle dalle funzioni *infinite volte discontinue*.

b) Anche $\operatorname{tg} x$ è generalmente continua, non così $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$. La prima, quoziente delle funzioni continue $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, è continua fintantochè $\cos x \gtrless 0$; ma è discontinua di seconda specie intorno alle infinite radici $\alpha = {}^1/_2 \pi \pm n\pi$ di $\cos x$, giacchè si ha

$$\lim_{x=\alpha-0} \operatorname{tg} x = +\infty \quad , \quad \lim_{x=\alpha+0} \operatorname{tg} x = -\infty \, .$$

Simili discontinuità si presentano per infiniti valori di x, vicini allo zero quanto ci piace, nella funzione definita, per $x \gtrless 0$, da $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$: questa è invece continua in tutto l'intervallo $\left(\frac{2}{\pi}, \infty\right)$ escluso l'estremo inferiore, ed in tutto $\left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\right)$ escluso l'estremo superiore. Per $x = 0$ si ha sempre, come nelle vicinanze, una discontinuità di seconda specie, ma vi si osserva qualche cosa di più complicato, in quanto che la funzione riprende infinite volte tutti i valori possibili. Qui si noti che a destra come a sinistra dello zero la funzione *diventa*, ma *non resta* grande quanto si vuole: ecco perchè (§ 13) non si può dire che *cresce all'infinito*, ma soltanto che *non è finita* intorno allo zero.

c) L'ultima osservazione si può anche fare, a destra dello zero, a proposito della funzione che per x razionale ha il valore 0, e per x irrazionale è espressa da $\log x$. Inoltre questa è discontinua di seconda specie per *tutti* i valori di x: è una funzione *totalmente discontinua*, mentre $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ appartiene alla categoria delle funzioni *punteggiate discontinue*, perchè in $(-h, h)$, malgrado le infinite discontinuità, noi possiamo pur sempre trovare valori di x, ed anzi infiniti valori, per cui la funzione è continua. Son queste le due grandi categorie *)

*) Per convincersi che queste non sono vane distinzioni, ma corrispondono invece ad una sostanziale diversità nel modo di comportarsi delle funzioni discontinue, leggansi i « *Fondamenti, ecc.* » del Dini, p. 62.

www.rcin.org.pl

di funzioni, infinite volte discontinue. Un più semplice esempio di funzione totalmente discontinua ci è offerto dalla funzione che prende i valori 0 ed 1 secondo che x è razionale o irrazionale, ed anche da quella che abbiamo precedentemente (§ 4, *e*) rappresentata con $\varpi(x)$. Se poi si considera una funzione, definita a piacere tutte le volte che $\varpi(x)$ è nulla o priva di significato, ed uguale a $\log \varpi(x)$ in ogni altro caso, è chiaro non solo che questa funzione *non è continua*, ma che *non è finita* in qualunque intervallo, piccolo quanto si vuole.

d) La funzione $[x]$, continua a destra di tutti i valori di x, presenta discontinuità ordinaria soltanto a sinistra di ciascun valore intero di x. Infatti, quando x è un numero intero, si ha

$$[x]=x \quad , \quad [x+0]=x \quad , \quad [x-0]=x-1 \, .$$

La funzione $\left[\frac{1}{x}\right]$, continua a sinistra di qualunque valore positivo o negativo di x, è discontinua di prima specie a destra di infiniti valori, vicini allo zero quanto si vuole, ed è invece discontinua di seconda specie per $x=0$. La funzione espressa in generale da $x\left[\frac{1}{x}\right]$, ed uguale all'unità per $x=0$, è continua per questo valore di x, quantunque intorno ad esso ne cadano infiniti altri, a destra dei quali la funzione subisce una discontinuità ordinaria, misurata appunto da x, e che tende perciò a scomparire quando x tende a zero. Mediante la funzione $[x]$ è agevole mostrare che *una funzione continua di funzioni discontinue non sempre è discontinua.* Sia $\varphi(x)$ una funzione continua, obbligata soltanto alla condizione $\varphi(0)=\varphi(1)$, come, per esempio, $\varphi(x)=\operatorname{sen}\pi x$, o $\varphi(x)=x-\sqrt{x}$, *ecc.* Si rappresenti, per brevità, $x-[x]$ con $\psi(x)$, e si consideri $f(x)=\varphi(\psi(x))$, funzione continua della funzione discontinua $\psi(x)$. Evidentemente $f(x)$ non può essere discontinua se non quando è discontinua $\psi(x)$, cioè a sinistra dei valori interi di x. Ciò premesso osserviamo che, per siffatti valori, $\psi(x)=0, f(x)=\varphi(0)$, mentre a sinistra si ha

$$\psi(x-0)=1 \quad , \quad f(x-0)=\varphi(\psi(x-0))=\varphi(1)=\varphi(0)=f(x) \, .$$

Dunque $f(x)$ è continua. Un esempio più semplice si ha prendendo $\psi(x)=1:x^2$ per $x \gtrless 0$, e $\psi(0)=0$, e scegliendo $\varphi(x)$ fra quelle funzioni continue che tendono a riprendere, per x infinito, il valore che hanno per $x=0$: per esempio $\varphi(x)=e^{-x}\operatorname{sen}x$. Malgrado che $\psi(x)$ sia discontinua per $x=0$, la funzione $f(x)=\varphi(\psi(x))$ è continua, perchè

$$f(0)=\varphi(\psi(0))=\varphi(0) \quad , \quad \lim_{x=0} f(x)=\varphi(\infty)=\varphi(0) \, .$$

e) È generalmente continua la funzione

$$f(x)=\operatorname{sen}x+{}^1/_2\operatorname{sen}2x+{}^1/_3\operatorname{sen}3x+\ldots \, ,$$

che si annulla insieme a $\operatorname{sen}x$, ma (§ 4, *f*) prende i valori

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}+\left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi \, ,$$

ed è per conseguenza continua, fintantochè x non diventa uguale ad un multiplo

www.rcin.org.pl

α di 2π. Intanto

$$f(\alpha)=0 \quad , \quad f(\alpha+0)={}^1/_2\pi \quad , \quad f(\alpha-0)=-{}^1/_2\pi \ ,$$

e però si ha, da ciascun lato dei valori $x=\alpha$, una discontinuità ordinaria. È notevole questo esempio perchè ci mostra che *una somma di infinite funzioni continue può non essere continua.* Inoltre, poichè

$$\lim(\operatorname{sen} x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots) \gtrless \lim \operatorname{sen} x + {}^1/_2 \lim \operatorname{sen} 2x + \ldots \ ,$$

per x tendente a zero, si vede (*cfr.* § 14) che *il limite d'una somma non sempre è uguale alla somma dei limiti delle parti*, quando queste sono in numero infinito.

23. **Teorema V.** *Se* f(x) *è continua e diversa da zero per* x = a, *essa conserva intorno ad* a *il segno di* f(a).

Infatti, in virtù della continuità, $\lim\limits_{x=a} f(x)=f(a)$: ciò vuol dire che, dato il numero positivo ε, piccolo quanto si vuole, esiste un numero positivo h, tale che in tutto l'intervallo $(a-h, a+h)$ si ha $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, cioè

$$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon \ . \qquad (3)$$

Basta prendere $\varepsilon=|f(a)|$ per vedere che si ha $f(x)>0$ o $f(x)<0$ secondo che $f(a)$ è positivo o negativo.

24. **Teorema VI.** *Una funzione continua, in un intervallo finito, è anche finita nello stesso intervallo.*

Che la funzione sia finita intorno ad ogni numero dell'intervallo risulta immediatamente dalla limitazione (3): essa è dunque, in virtù del teorema II, finita nell'intervallo.

25. **Teorema VII.** *Una funzione continua in un intervallo, negli estremi del quale prende segni opposti, deve annullarsi almeno una volta nell'intervallo stesso.*

In forza del teorema V esistono sempre, alla destra dell'estremo inferiore a, infiniti valori di x, tali che per *tutti* i numeri dell'intervallo (a,x), la funzione conserva il segno di $f(a)$: sia, per esempio, il segno $+$. I predetti valori di x non sono grandi quanto si vuole, giacchè nell'altro estremo, in b, la funzione prende, per ipotesi, un valore negativo. Il loro insieme è dunque finito, e però (richiamando l'osservazione finale del § 9) ammette il limite superiore ξ. Siccome alla sinistra di ξ la funzione si conserva positiva, non è possibile, in virtù dello stesso teorema V, che sia $f(\xi)<0$. Ne segue, innanzi tutto, essendo $f(b)<0$, che ξ è minore di b, e che per conseguenza si può, nell'intervallo (a,b), considerare anche la destra di ξ. Orbene, se fosse $f(\xi)>0$, esisterebbero, alla destra di ξ, numeri x, tali che in tutto (ξ,x), e per conseguenza in tutto (a,x), la funzione si conserverebbe positiva, cioè ξ, limite superiore d'un insieme di numeri, si troverebbe superato da questi numeri: ciò è assurdo. Dunque $f(\xi)=0$.

www.rcin.org.pl

26. **Teorema VIII.** *Una funzione continua non può passare da un valore ad un altro senza passare per tutti i valori intermedii.*

Sia l un numero qualunque, compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$, e si consideri la funzione $f(x)-l$, evidentemente continua come $f(x)$ nell'intervallo (a,b), negli estremi del quale essa prende i valori $f(a)-l, f(b)-l$, che per le ipotesi fatte hanno segni opposti. Il teorema precedente afferma appunto l'esistenza d'un numero ξ, compreso fra a e b, per cui si ha $f(\xi)-l=0$ cioè $f(\xi)=l$.

27. **Osservazioni**: *a)* Le ultime proprietà sono di natura assai più delicata che non apparisca. Non si creda, infatti, che si possa riguardare come intuitiva l'impossibilità in cui si trova una funzione continua di cambiar segno senza annullarsi, poichè non ripugna al concetto di continuità che una simile funzione sia, per esempio, suscettibile di soli valori irrazionali. Or come potrebbe questa funzione annullarsi, cioè assumere il valore zero, razionale? Solo in seguito alla dimostrazione del teorema VII ci è permesso asserire che una funzione siffatta non può esistere. Ma nemmeno si deve credere che la possibilità di cambiar valore saltando valori intermedii sia una proprietà essenziale della discontinuità, giacchè *vi sono funzioni discontinue che non passano da un valore ad un altro senza prendere successivamente tutti i valori intermedii.* Basterebbe citare (§ 22, *a*) la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, discontinua per $x=0$. Quando x, decrescendo, passa da un valore positivo ad un valore negativo, la funzione, pur eseguendo continue oscillazioni fra -1 ed 1, non salta mai da un valore ad un altro qualsiasi. Non si può dire altrettanto di $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$, che passa bruscamente, intorno allo zero, da valori positivi a valori negativi, infinitamente grandi nel senso assoluto.

b) Anche una funzione totalmente discontinua può godere della proprietà di cui si discorre. Infatti, presi ad arbitrio i numeri a e b, vicini fra loro quanto si vuole, si può dimostrare che la funzione $\varpi(x)$ assume (infinite volte) nell'intervallo (a,b) *tutti* i valori compresi fra 0 ed 1, e quindi fra $\varpi(a)$ e $\varpi(b)$, concessa l'esistenza di questi numeri. Dopo quanto si è detto precedentemente (§ 4, *e*) intorno a questa funzione, possiamo limitarci a far vedere che, dato un numero qualunque l fra 0 ed 1, si può sempre trovare un valore di x, tale che $\varpi(x)$ riesca uguale ad l. Costruita nell'intervallo $(0,1)$ una successione $l_1, l_2, l_3, \ldots$ di numeri tendenti ad l, scriviamo x nel sistema decimale, attribuendogli arbitrariamente la parte intera, distribuendone le cifre decimali in gruppi che abbiano successivamente $1,2,3,\ldots$ cifre, e prendendo anche ad arbitrio le cifre di ciascun gruppo, obbligandoci solo a far sì che, fra le ν cifre del ν^{imo} gruppo vi siano $[\nu l_\nu]$ zeri. Ciò premesso, nel numero x così costruito prendiamo n decimali, e supponiamo che la n^{ima} cada nel gruppo ν^{imo}, dimodochè

$$n'-\nu<n\leqq n' \quad , \quad m'-[\nu l_\nu]\leqq m\leqq m' \ ,$$

rappresentando con m il numero degli zeri, e ponendo

$$n'=1+2+3+\cdots+\nu \quad , \quad m'=[l_1]+[2l_2]+[3l_3]+\cdots+[\nu l_\nu] \ .$$

Ora si osservi che, quando ν cresce all'infinito,

$$\lim\frac{\nu}{n'}=0 \quad , \quad \lim\frac{[\nu l_\nu]}{n'}=0 \ ,$$

www.rcin.org.pl

ed inoltre, per una nota *) proposizione della teoria dei limiti,

$$\lim \frac{m'}{n'} = \lim \frac{[\nu l_\nu]}{\nu} = \lim l_\nu = l \ ;$$

quindi, essendo

$$\frac{m' - [\nu l_\nu]}{n'} \leqq \frac{m}{n} < \frac{m'}{n' - \nu} \ ,$$

si ha pure

$$\varpi(x) = \lim \frac{m}{n} = \lim \frac{m'}{n'} = l \ .$$

28. **Teorema IX** (secondo di Weierstrass). *Ogni funzione, continua in un intervallo finito, prende nell'intervallo stesso il minimo ed il massimo valore.*

Il teorema VI ci dice che la funzione è finita nell'intervallo (a,b), in cui è continua; dunque, in virtù del teorema I, esiste in (a,b) il suo limite inferiore λ. Se supponiamo che questo *non sia* un valore di $f(x)$ nel detto intervallo, la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

è definita in tutto (a,b), *è continua* come quoziente di funzioni continue, ma *non è finita*, perchè, dato l grande quanto si vuole, siccome si può sempre trovare un valore di $f(x)$ inferiore a qualunque numero maggiore di λ, ed in particolare a $\lambda + \frac{1}{l}$, è chiaro che, per lo stesso valore di x che rende $f(x) < \lambda + \frac{1}{l}$, si ha $\varphi(x) > l$. Ora dal primo teorema invocato sappiamo che non esiste funzione continua in un intervallo finito, la quale non sia anche finita nell'intervallo stesso. È dunque assurdo supporre che λ *non sia* un valore di $f(x)$ in (a,b), vale a dire che deve certamente esistere in (a,b) almeno un numero ξ, tale che $f(\xi) = \lambda$. Dunque λ è il minimo valore della funzione. Nello stesso modo si dimostra l'esistenza del massimo.

29. **Teorema X** (di Cantor). *Se una funzione è continua in un intervallo finito, si può, per ogni numero positivo* ε, *piccolo quanto si vuole, determinare un numero* h, *tale che, in qualunque intervallo, di grandezza* h, *contenuto nell'intervallo dato, l'oscillazione della funzione sia minore di* ε.

Per *oscillazione* d'una funzione in un intervallo s'intende la differenza fra il limite superiore ed il limite inferiore dei valori che la funzione assume nell'intervallo stesso. Essa è dunque, per una funzione continua, l'eccesso del massimo sul minimo valore. Ciò premesso, intorno ad ogni valore di x, appartenente al dato intervallo, possiamo sempre costruire, per la continuità stessa di $f(x)$, un intervallo $(x - h, x + h)$ tale che, per ogni coppia di va-

*) « *Analisi algebrica* » p. 98.

www.rcin.org.pl

lori x' ed x'', in esso inclusi, sia

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\ ; \tag{4}$$

ma, per determinati valori di ε e di x, infiniti sono i valori che si possono attribuire ad h, perchè, conosciutone uno, ogni numero positivo, inferiore a quello ottenuto, si trova *a fortiori* nelle medesime condizioni. Senonchè gli infiniti valori di h, relativi a determinati valori di ε e di x, non possono essere grandi quanto si vuole, e però ammettono il limite superiore. È questo limite che d'ora innanzi rappresenteremo con h. Così, dato ε, ad ogni numero x corrisponde *un determinato* numero h, tale che per ogni coppia di numeri x' ed x'', superiori ad $x-h$, inferiori ad $x+h$, è soddisfatta la (4). Si è definita così una funzione $h(x)$, obbligata a prendere valori positivi in tutto l'intervallo. Questa funzione ammette dunque il limite inferiore λ, positivo *o*, *forse*, *nullo*, ed in virtù del primo teorema di Weierstrass esiste nell'intervallo considerato almeno un numero ξ, intorno al quale il limite inferiore di $h(x)$ è sempre λ. Ci proponiamo di dimostrare che λ non può essere nullo. Posto $h(\xi)=h_0$, consideriamo un valore qualunque di x, appartenente all'intervallo $(\xi-{}^1/_2h_0, \xi+{}^1/_2h_0)$. Ogni coppia di numeri x', x'', presi in $(x-{}^1/_2h_0, x+{}^1/_2h_0)$ appartiene anche all'intervallo $(\xi-h_0, \xi+h_0)$, e però soddisfa alla condizione (4). Dunque i valori che $h(x)$ assume in $(\xi-{}^1/_2h_0, \xi+{}^1/_2h_0)$ non sono inferiori ad ${}^1/_2h_0$, e però $\lambda\geqq{}^1/_2h_0$, perchè, se fosse $\lambda<{}^1/_2h_0$, la funzione prenderebbe valori inferiori ad ${}^1/_2h_0$. Per conseguenza, anche in tutto il primitivo intervallo, $h(x)$ non è mai inferiore ad ${}^1/_2h_0$. Ne segue subito che, dato ε, è verificata la (4), comunque si scelga nell'intervallo dato la coppia di numeri x' ed x'', purchè sia $|x'-x''|<h_0$. Osserviamo, per finire, che nell'enunciato del teorema, invece di parlare delle *infinite differenze*, che compariscono nel primo membro di (4), si è parlato soltanto dell'oscillazione, cioè della *differenza massima*, giacchè basta render questa inferiore ad ε perchè tali diventino tutte le altre.

www.rcin.org.pl

II. LE DERIVATE.

Regole di derivazione.

1. **Definizioni**. Quando un numero z passa da uno stato di grandezza ad un altro, l'incremento (positivo, negativo, o nullo) che subisce si suole rappresentare con δz. Ad ogni arbitrario incremento δx della variabile indipendente corrisponde un determinato incremento δy della funzione $y=f(x)$, poichè, fissato x,

$$\text{se} \quad \delta x = h \quad , \quad \text{è} \quad \delta y = f(x+h) - f(x) \; .$$

Il rapporto

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

chiamasi *rapporto incrementale* destro o sinistro, secondo che h è positivo o negativo. Se i rapporti incrementali, destro o sinistro, tendono, per h tendente a zero, verso limiti determinati, questi sono funzioni di x, che diconsi *derivata destra* e *derivata sinistra* di y. Le due derivate possono coincidere, ed in tal caso si dice che la funzione y ha una derivata unica, che si rappresenta con $f'(x)$, o più brevemente con y'. Le funzioni che più comunemente si considerano sono *a derivata unica.*

2. **Osservazioni**: *a)* La derivata d'una *costante* è *zero*, perchè, se y è costante, si ha sempre $\delta y = 0$, qualunque sia x. La derivata della *variabile indipendente* è l'*unità*, perchè, se $y=x$, è $\delta y = \delta x$.

b) Per convincersi che la derivata d'una funzione può avere valori diversi dai due lati d'uno stesso valore della variabile indipendente, si consideri la funzione $y=f(x)$, che per $x=0$ è zero, e per $x \gtrless 0$ è espressa da $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. Siccome

$$f(0)=0 \quad , \quad f(h) = h \operatorname{arctg} \frac{1}{h} \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \operatorname{arctg} \frac{1}{h} \; ,$$

e si ha

$$\lim_{h=+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{h} = {}^1/_2 \pi \quad , \quad \lim_{h=-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{h} = -{}^1/_2 \pi \; ,$$

si vede che la funzione considerata ha la derivata destra uguale ad ${}^1/_2\pi$, e la derivata sinistra uguale a $-{}^1/_2\pi$. Similmente, per la funzione che ha il valore 0 se $x=0$, ed è espressa da $x:(1+e^{\frac{1}{x}})$ se $x \gtrless 0$, si ha

$$f(0)=0 \quad , \quad f(h) = \frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}} \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} \; .$$

www.rcin.org.pl

Ora, secondo che h tende a zero per valori positivi o per valori negativi, $e^{\frac{1}{h}}$ cresce indefinitamente o tende a zero, e però

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = 0 \quad , \quad \lim_{h=-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = 1 \ ,$$

vale a dire che la funzione ammette, per $x=0$, una derivata destra uguale a zero, ed una derivata sinistra uguale all'unità.

c) Un altro esempio ci è fornito (*cfr.* I, 22, *d*) dalla funzione $y=\varphi(x-[x])$ nell'ipotesi che $\varphi(x)$ ammetta la derivata destra α per $x=0$, la derivata sinistra β per $x=1$, e che sia $\alpha \gtrless \beta$ e $\varphi(0)=\varphi(1)$. Si vede subito che, se si attribuisce ad x un valore intero, si ha

$$\lim_{\delta x=+0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{h=+0} \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = \alpha \quad , \quad \lim_{\delta x=-0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{h=-0} \frac{\varphi(1+h)-\varphi(1)}{h} = \beta \ ,$$

e però la funzione ammette una derivata destra ed una derivata sinistra, tra loro differenti, per ogni valore intero della variabile. Per esempio si può prendere $\varphi(x)=\operatorname{sen}\pi x$, dopo avere osservato che

$$\alpha = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}\pi h - \operatorname{sen} 0}{h} = \pi \quad , \quad \beta = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}(\pi+\pi h) - \operatorname{sen}\pi}{h} = -\pi \ .$$

d) Ma la derivata può anche *non esistere*, o *esistere soltanto da un lato* di x. Per esempio la funzione $y=\varpi(x)$, la cui definizione sia completata assegnando arbitrariamente (fra 0 ed 1) i valori di y quando $\varpi(x)$ non esiste, è priva di derivata per qualunque valore di x, perchè (I, 27, *b*), nel tendere di δx a zero, δy oscilla indefinitamente fra -1 e $+1$, dimodochè il rapporto incrementale, ben lungi dal tendere verso un limite, riprende infinite volte tutti i valori possibili. In modo analogo si comporta la funzione, che ha i valori 0 ed 1, secondo che x è razionale o irrazionale, giacchè δy è suscettibile dei soli valori $0, 1, -1$. La funzione $x-[x]$ ha una derivata uguale all'unità per ogni valore di x, eccetto a sinistra dei valori interi, dove, per $\delta x = h < 0$, si ha $\delta y = 1+h$, ed il rapporto incrementale tende a $-\infty$. In questi casi la non esistenza della derivata è unicamente dovuta alla discontinuità della funzione, giacchè non è possibile che la derivata esista là dove la funzione è discontinua; ed infatti, perchè $\delta y : \delta x$ possa tendere verso un limite finito, quando δx tende a zero, occorre che anche δy tenda a zero, e quindi che y sia continua. Adunque *la continuità della funzione è condizione necessaria* perchè la derivata esista.

e) *La continuità non è condizione sufficiente* per l'esistenza della derivata. Così, per esempio, la funzione $\sqrt{x}$ è continua per $x \geqq 0$, ed intanto si ha

$$\lim_{h=+0} \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \infty \ .$$

In seguito ci avverrà di affermare che la derivata di $\sqrt{x}$, per $x=0$, è infinita; ma con ciò si vuole spesso intendere, nelle applicazioni geometriche, non che *il limite del rapporto incrementale* è infinito, ma che *la derivata*, calcolata per $x>0$, cresce indefinitamente quando x tende a zero. Effettivamente, per $x>0$,

$$\lim_{h=0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x=+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \ ;$$

www.rcin.org.pl

ma è chiaro che non si potrebbe attribuire il medesimo significato all'asserzione che, per x intero, la derivata sinistra di $x-[x]$ è $-\infty$. Del resto è facile trovare funzioni continue, per le quali il rapporto incrementale non ha limite alcuno, finito o infinito. Manca, per esempio, la derivata della funzione $y=x\left[\frac{1}{x}\right]$, continua per $x=0$, giacchè si ha

$$f(0)=1 \quad , \quad f(h)=h\left[\frac{1}{h}\right] \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\left[\frac{1}{h}\right]-\frac{1}{h} \, ,$$

e si vede che, nel tendere di h a zero, il rapporto incrementale oscilla indefinitamente fra 0 e -1, escluso.

f) All'ultimo esempio si potrebbe obbiettare che la funzione considerata, sebbene continua, è infinite volte discontinua (I, 22, *d*) intorno allo zero; ma, per convincersi che non si deve a ciò la mancanza di derivata, basta considerare la funzione, che per $x=0$ è zero, e per $x \gtrless 0$ è espressa da $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$: continua sempre, essa non ha derivata per $x=0$, giacchè

$$f(0)=0 \quad , \quad f(h)=h \operatorname{sen} \frac{1}{h} \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\operatorname{sen} \frac{1}{h} \, ,$$

ed il limite di $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$, per h tendente a zero, non esiste (I, 22, *a*). Un altro esempio notevole ci è dato dalla funzione $\varphi(x-[x])$ già considerata. Se si prende $\varphi(x)=x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ per $x \gtrless 0$, e $\varphi(0)=0$, si ha pure $\varphi(1)=0$, $\varphi'(0)$ *non esiste*, e

$$\varphi'(1)=\lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \operatorname{sen} \frac{\pi}{1+h}=\lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \operatorname{sen} \frac{\pi h}{1+h}=\lim_{\varepsilon=0} \frac{\operatorname{sen} \pi \varepsilon}{\varepsilon}=\pi \, .$$

Dunque la funzione *continua*, rappresentata in generale da

$$(x-[x]) \operatorname{sen} \frac{\pi}{x-[x]} \, ,$$

è priva della derivata destra per tutti i valori interi di x, pur ammettendo la derivata sinistra uguale a π. Prendendo invece $\varphi(x)=x-\sqrt{x}$ si trova che la funzione continua $[x]+\sqrt{x-[x]}$ ha la derivata destra infinita e la derivata sinistra uguale ad $\frac{1}{2}$ per tutti i valori interi di x. Partendo da questa funzione Schwarz è riuscito a costruirne un'altra, per la quale si presentano infinite volte le analoghe circostanze in qualunque intervallo. Finalmente si deve a Weierstrass l'esempio d'una funzione continua *), che non ha derivata per alcun valore di x.

3. Derivazione delle funzioni inverse. Data la funzione $y=f(x)$ supponiamo che sia possibile definire la funzione inversa $x=g(y)$. È facile dimostrare che *la derivata della funzione* g *esiste, quando esiste ed è diversa da zero la derivata della funzione* f. Infatti, se per un determinato valore di x il rapporto $\delta y : \delta x$ tende ad un limite $y' \gtrless 0$, col tendere a zero

*) « *Analisi algebrica* » p. 247. Esempii di funzioni analoghe, più generali, si trovano nei « *Fondamenti*, ecc. » del Dini; p. 147.

www.rcin.org.pl

di δx, si sa che δy finisce per assumere e conservare un segno determinato, e però il limite di

$$\frac{\delta x}{\delta y} = 1 : \frac{\delta y}{\delta x}, \tag{1}$$

che esiste ed ha il valore $1:y'$, è, per definizione, la derivata di x rispetto ad y. In termini più espliciti, quando si conosce la derivata $f'(x) \gtrless 0$ di $f(x)$, quella della funzione inversa $g(x)$ è

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{2}$$

Si noti che in questa dimostrazione ci si è presentata due volte come necessaria l'ipotesi $y' \gtrless 0$, sia perchè non si può parlare del limite del secondo membro di (1) quando il denominatore tende a zero, sia per escludere la possibilità (che si presenta solo nel caso di $y' = 0$) che δy non cessi mai di annullarsi quando δx tende a zero, togliendo così ogni significato al primo membro di (1); ed infatti, non solo questo primo membro non ha significato quando il denominatore è nullo, ma la definizione stessa della derivata richiede che alla variabile indipendente y si attribuisca un incremento $\delta y \gtrless 0$.

4. **Derivazione delle funzioni di funzioni.** Se y è data in funzione, non di x, ma d'una funzione u, se cioè $y = f(u), u = \varphi(x)$, e se inoltre si suppone che esistano le derivate $f'(x)$ e $\varphi'(x)$, è facile dimostrare che la derivata di y esiste ed è uguale al prodotto di $f'(u)$ per $\varphi'(x)$. Infatti si ha identicamente

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x},$$

dove $\delta u : \delta x$ tende, per ipotesi, ad un limite u': ciò esige che δu tenda a zero insieme a δx. Se, a partire da un valore di δx, convenientemente piccolo, δu si mantiene costantemente diverso da zero, $\delta y : \delta u$ tende ad $f'(u)$, e però anche $\delta y : \delta x$ tende, in virtù dell'ultima identità, ad un limite determinato y', uguale al prodotto di $f'(u)$ per u'. Resta da far vedere che la proposizione enunciata regge anche quando esiste una successione $h_1, h_2, h_3, \ldots$ di valori di δx, tendenti a zero, per i quali si ha $\delta u = 0$. In questo caso la derivata u', che per ipotesi esiste, non può essere diversa da zero, altrimenti δu finirebbe per assumere e conservare un certo segno. Ora si osservi che, se si fa tendere δx a zero evitando i valori $h_1, h_2, h_3, \ldots$, è ancora valido il ragionamento che precede, e però il rapporto $\delta y : \delta x$ tende al limite $f'(u) . 0 = 0$. Se invece δx tende a zero percorrendo appunto la successione $h_1, h_2, h_3, \ldots$ il detto rapporto è nullo, perchè, essendo $\delta u = 0$, è anche $\delta y = 0$. Esiste dunque la derivata y', limite di $\delta y : \delta x$ per δx tendente a zero, ed è nulla come il prodotto di $f'(u)$ per u', dimodochè in tutti i casi si può scrivere l'eguaglianza $y' = f'(u) . u'$, che racchiude la (1) come caso particolare, giacchè (I, 3) per $u = g(x)$ si ha $y = x, y' = 1$. Più generalmente, se

$$y = f(u) \quad , \quad u = \varphi(v) \quad , \quad v = \psi(w) \; , \; \ldots \; ,$$

www.rcin.org.pl

si ha

$$y' = f'(u)\varphi'(v)\psi'(w)\ldots,$$

purchè le funzioni $u, v, w, \ldots$ siano in numero finito. Così vediamo che *la derivata d'una funzione di funzioni è uguale al prodotto delle derivate di queste funzioni, supponendo presa ciascuna derivata rispetto alla variabile da cui la funzione dipende immediatamente.*

5. **Derivata d'una somma.** Sia $y = u + v + w + \ldots$, dove $u, v, w, \ldots$ sono funzioni di x, in numero finito, e si attribuisca ad x l'incremento δx, dal quale risultano per $y, u, v, \ldots$ gli incrementi $\delta y, \delta u, \delta v, \ldots$ Evidentemente si ha sempre

$$y + \delta y = u + \delta u + v + \delta v + w + \delta w + \ldots;$$

quindi

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta x} + \cdots,$$

e passando ai limiti, per δx tendente a zero, $y' = u' + v' + w' + \ldots$ Dunque *la derivata d'una somma è uguale alla somma delle derivate delle parti*, purchè queste siano in numero finito.

6. **Derivata d'un prodotto.** Se $y = uv$, è

$$y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u . \delta v;$$

poi, successivamente,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta v \quad , \quad y' = uv' + vu'.$$

Si può anche scrivere

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Sia, più generalmente, $y = uvw\ldots$, e dimostriamo che

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \cdots \tag{3}$$

La formola è vera nel caso di due fattori. Basta dunque dimostrare che, concessa per meno di n, sussiste per n fattori. Orbene, se si rappresenta con z il prodotto di tutte le funzioni che seguono u, si ha $y = uz$; poi

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{z'}{z} \quad , \quad \frac{z'}{z} = \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \cdots$$

da cui si deduce subito la (3), che si può scrivere così:

$$y' = u'vw\ldots + uv'w\ldots + uvw'\ldots + \ldots$$

Dunque *la derivata d'un prodotto è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando la derivata di ciascun fattore per il prodotto degli altri fattori.*

www.rcin.org.pl

7. **Derivata d'un quoziente.** Se $y = u:v$, è

$$\delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v+\delta v)};$$

poi, successivamente,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v^2\left(1+\frac{\delta v}{v}\right)}, \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

In particolare

$$\text{se} \quad y = \frac{a}{u}, \quad \text{è} \quad y' = -\frac{au'}{u^2}.$$

8. **Derivata d'una potenza:** *a)* Sia $y = x^n$, con n intero e positivo. Dalla regola del § 6 si deduce subito $y' = nx^{n-1}$. Vogliamo dimostrare che questa formola sussiste per ogni valore razionale di n. Prima supponiamo che n abbia la forma $1:m$, con m intero e positivo. Siccome esiste la derivata di x^m, esiste, per quanto si è detto nel § 3, anche la derivata della funzione inversa $y = x^{\frac{1}{m}}$. Constatata così l'esistenza di y', si è in diritto di derivare l'eguaglianza $y^m = x$, applicando la regola del § 4. Si ottiene

$$my^{m-1}.y' = 1 \quad , \quad y' = \frac{1}{m}y^{1-m} = ny^{m(n-1)} = nx^{n-1}.$$

b) Se poi n è il quoziente di due numeri interi, positivi, p e q, si ha, applicando la regola del § 4, e tenendo presente quanto si è detto in ultimo luogo,

$$y = (x^{\frac{1}{q}})^p \quad , \quad y' = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1}.\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = nx^{n-1}.$$

c) Finalmente, se n ha un valore negativo $-m$, si applichi la regola del § 7. Si ottiene

$$y = \frac{1}{x^m} \quad , \quad y' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

d) Ora, dato $y = u^n$, dove l'esponente n è un numero razionale qualunque, positivo o negativo, la regola del § 4 dà $y' = nu^{n-1}.u'$. In particolare,

$$\text{se} \quad y = \sqrt{u} \quad , \quad \text{è} \quad y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Per evitare calcoli inutili è bene ricordarsi che

$$\text{se} \quad y = \frac{1}{u^n} \quad , \quad \text{è} \quad y' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}.$$

9. Le regole precedenti permettono di calcolare immediatamente la derivata di qualunque funzione algebrica esplicita. Per esempio, la derivata del polinomio

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

è

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.$$

www.rcin.org.pl

La derivata di y', che si chiama *seconda derivata* di y, è

$$y''=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}\ ,$$

e le derivate seguenti sono

$$y'''=n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=n!a_0\quad,\quad y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\cdots=0\ .$$

Le prime $n-1$ derivate d'un polinomio di grado n sono dunque altrettanti polinomii, dei gradi $n-1, n-2, \ldots, 1$; la n^{ima} derivata è costante, e le derivate seguenti son tutte nulle.

10. **Derivate di a^x e Log$x$:** *a)* Sia $y=a^x$. Se ad x si dà l'incremento $\delta x=h$, si ha

$$\delta y=a^{x+h}-a^x\quad,\quad \frac{\delta y}{\delta x}=a^x\frac{a^h-1}{h}\ .$$

Dunque, richiamando un risultato precedente (I, 20, *d*),

$$y'=a^x\lim_{h=0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\log a\ .$$

In particolare, se $y=e^x$, è $y'=e^x$.

b) Se $y=\mathrm{Log}\,x$, è

$$\delta y=\mathrm{Log}(x+h)-\mathrm{Log}\,x\quad,\quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{1}{h}\mathrm{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

poi (I, 20, *c*, *d*)

$$y'=\frac{1}{x}\mathrm{Log}\lim_{h=0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{m}{x}\ .$$

In particolare, se $y=\log x$, è $y'=\dfrac{1}{x}$.

c) I due risultati precedenti sono fra loro legati mediante la formola (2), giacchè, posto $f(x)=a^x$, è $g(x)=\mathrm{Log}\,x$. Ne segue che, se si conosce una delle derivate, per esempio $f'(x)=a^x\log a$, l'altra è data dalla formola (2):

$$g'(x)=\frac{1}{f'(\mathrm{Log}\,x)}=\frac{1}{a^{\mathrm{Log}\,x}\log a}=\frac{m}{x}\ .$$

d) Per quanto si è detto nel § 4, le derivate delle funzioni

$$y=e^u\quad,\quad y=\log u\ ,$$

sono rispettivamente

$$y'=e^u.u'\quad,\quad y'=\frac{u'}{u}\ .$$

e) Finalmente si osservi che il conoscere le derivate di e^u e $\log u$ permette di ritrovare la regola per la derivazione d'una potenza, *estendendola al caso d'un esponente irrazionale.* Infatti

da $y=u^n=e^{n\log u}$ si deduce $y'=e^{n\log u}.\dfrac{nu'}{u}=nu^{n-1}.u'$.

www.rcin.org.pl

11. **Derivate delle funzioni circolari:** *a)* Sia $y = \operatorname{sen} x$. Se $\delta x = h$, è

$$\delta y = \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Dunque (I, 20, *a*)

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Se $y = \cos x$, si può fare un calcolo analogo, o anche scrivere, ricordando la regola del § 4,

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad , \quad y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x .$$

Se $y = \operatorname{tg} x$, si ottiene, considerando $\operatorname{tg} x$ come quoziente di $\operatorname{sen} x$ per $\cos x$, ed applicando la regola del § 7,

$$y' = \frac{\cos x . \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} ;$$

o pure, eseguendo il calcolo diretto,

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} . \frac{1}{\cos x . \cos(x+h)} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Finalmente, se

$$y = \operatorname{sen} u \quad , \quad \cos u \quad , \quad \operatorname{tg} u ,$$

si ha, rispettivamente,

$$y' = u' \cos u \quad , \quad -u' \operatorname{sen} u \quad , \quad \frac{u'}{\cos^2 u} .$$

b) Per le funzioni circolari inverse bisogna anzitutto osservare che le derivate esistono, per quanto si è detto nel § 3. Soltanto dopo ciò, dedotte da

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad , \quad \operatorname{arccos} x \quad , \quad \operatorname{arctg} x ,$$

le relazioni $x = \operatorname{sen} y$, $\cos y$, $\operatorname{tg} y$, si ha il diritto di scrivere, derivando,

$$1 = y' \cos y \quad , \quad -y' \operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{y'}{\cos^2 y} ,$$

e quindi ricavarne i valori di y':

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2} .$$

Si può anche procedere con calcoli diretti, i quali hanno il vantaggio di fornire, insieme alle espressioni delle derivate, la prova dell'esistenza delle derivate stesse. Se, per esempio, si pone

$$y = \operatorname{arctg} x \quad , \quad \delta x = h = (1 + x(x+h))\varepsilon ,$$

si ha, quando h (e per conseguenza ε) tende a zero,

$$y' = \lim \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h} = \lim \frac{\operatorname{arctg} \varepsilon}{\varepsilon} . \frac{1}{1 + x(x+h)} = \frac{1}{1+x^2} .$$

www.rcin.org.pl

Si noti che, precedentemente, il radicale $\sqrt{1-x^2}$ è stato preso sempre positivo, perchè gli archi rappresentati dai simboli $\operatorname{arcsen} x$ ed $\arccos x$ hanno rispettivamente il coseno ed il seno positivi. La somma di questi archi è costante, e ciò spiega perchè le loro derivate, uguali in valore assoluto, hanno segni opposti. Finalmente, riassumendo ed osservando la regola del § 4, vediamo che, se

$$y = \operatorname{arcsen} u \quad , \quad \arccos u \quad , \quad \operatorname{arctg} u \ ,$$

si ha, rispettivamente,

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad \frac{u'}{1+u^2} \ .$$

12. **Esercizii**: *a)* Se

$$y = x(\log x - 1) \quad , \quad \log\cos x \quad , \quad \log\log x \quad , \quad \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad , \quad \log\frac{1-\cos kx}{1+\cos kx} \ ,$$

l'applicazione delle regole precedenti dà come valori delle rispettive derivate

$$y' = \log x \quad , \quad -\operatorname{tg} x \quad , \quad \frac{1}{x\log x} \quad , \quad \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad , \quad \frac{2k}{\operatorname{sen} kx} \ .$$

Se

$$y = \arccos(1-x) - \sqrt{2x-x^2} \quad , \quad \arccos\frac{a}{x} + \log(x + \sqrt{x^2-a^2}) \ ,$$

si ottiene

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \quad , \quad \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} \ .$$

Similmente, per le funzioni

$$y = \operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} x}{1-\cos a\cos x} \quad , \quad \arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} \quad , \quad \operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \ ,$$

si trova

$$y' = \frac{\operatorname{sen} a}{1-\cos a\cos x} \quad , \quad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x} \quad , \quad \frac{2}{e^{2x}+e^{-2x}} \ .$$

Questi calcoli di derivate si eseguono molto facilmente applicando, se occorre, la regola per la derivazione d'una somma, d'un prodotto, o d'un quoziente, e derivando poi ciascuna parte del risultato secondo la regola per la derivazione d'una funzione di funzione: questa è la regola più importante, in quanto permette di superare tutte le difficoltà, che sembra presentare il calcolo della derivata d'una espressione complicata, separandole per affrontarle una dopo l'altra. Ecco, per esempio, come si procede per calcolare la derivata di $y = \operatorname{arc\,tg}(x - \sqrt{1+x^2})$:

$$y' = \frac{1}{1+(x-\sqrt{1+x^2})^2}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \ldots\ldots = \frac{1}{2(1+x^2)} \ .$$

Il risultato ottenuto si verifica facilmente osservando che $y = {}^1/_2 \operatorname{arc\,tg} x - {}^1/_4 \pi$. Similmente, per calcolare la derivata di $y = x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})$, si scrive

$$y' = \sqrt{1+x^2} + x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \ldots = 2\sqrt{1+x^2}$$

www.rcin.org.pl

b) Date le relazioni

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\quad,\quad \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,,$$

è facile dedurne, rispettivamente,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad,\quad y'=\frac{\operatorname{sen}a}{1+\cos a\cos x}\,,$$

mercè la derivazione dei due membri. Se poi son date le funzioni

$$y=x^x\quad,\quad y=x^{x^x}\,,\ \ldots\,,$$

si trova, prendendo i logaritmi dei due membri, e derivando,

$$y'=x^x(1+\log x)\quad,\quad y'=x^{x+x^x}\left(\frac{1}{x}+\log x+\log^2 x\right)\,,\ \ldots\,;$$

ma procedendo in tal modo si ammette *a priori* l'esistenza di y'. Per evitare questa obbiezione bisogna prima di tutto far notare che la derivata esiste, e ciò si ottiene, per la penultima coppia di funzioni, osservando che y si può porre sotto la forma $\operatorname{arc\,tg} u$. Per $y=x^x$ si può anche scrivere $y=e^{x\log x}$; *ecc.*

c) Con successive derivazioni si giunge facilmente a trovare che le derivate n^{ime} delle funzioni

$$u=e^{x\cos a}\cos(x\operatorname{sen}a)\quad,\quad v=e^{x\cos a}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}a)\,,$$

sono

$$u^{(n)}=e^{x\cos a}\cos(na+x\operatorname{sen}a)\quad,\quad v^{(n)}=e^{x\cos a}\operatorname{sen}(na+x\operatorname{sen}a)\,.$$

Se fosse lecito adoperare gli immaginarii si perverrebbe più rapidamente a questi risultati considerando la funzione $y=u+iv=e^{\alpha x}$, in cui $\alpha=e^{ia}$. Infatti

$$y^{(n)}=\alpha^n e^{\alpha x}=e^{ina+\alpha x}=e^{x\cos a+i(na+x\operatorname{sen}a)}\ ;\ ecc.$$

Similmente, per trovare la derivata n^{ima} della funzione $y=\operatorname{arc\,tg}x$, si potrebbe scrivere

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

per dedurne, con $n-1$ derivazioni successive,

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^n}\left(\frac{n}{1}x^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}+\ldots\right);$$

ma se si vuole evitare, come per ora si deve, l'uso degli immaginarii, si può trovare la n^{ima} derivata di y in funzione della stessa y, derivando $n-1$ volte di seguito $y'=\cos^2 y$:

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\,.\operatorname{sen}n(y+{}^1/_2\pi)\,.$$

Finalmente un calcolo facile dà, per la derivata n^{ima} di $y=x^m\log x$,

$$y^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}\left(\log x+\frac{1}{m}+\frac{1}{m-1}+\ldots+\frac{1}{m-n+1}\right),$$

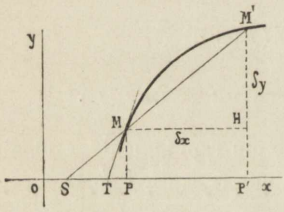
ed in particolare

$$y^{(m)}=m!\left(\log x+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\quad,\quad y^{(m+1)}=\frac{m!}{x}\,.$$

www.rcin.org.pl

Proprietà delle derivate.

13. Prima d'inoltrarci vogliamo fare una breve digressione intorno ad un argomento molto importante per le applicazioni delle matematiche. Già nel dimostrare le proposizioni fondamentali della teoria delle funzioni è utile giovarsi d'una rappresentazione geometrica della variabile indipendente, che si esegue ponendo in corrispondenza, come si suol fare in Geometria analitica, i valori della variabile ed i punti d'una retta. In tal modo le dimostrazioni, pur rimanendo intatte nella sostanza (giacchè bisogna astenersi dal fondarle in alcun modo su concetti geometrici), acquistano una forma limpida ed efficace, e si lasciano condurre con maggior rapidità di linguaggio. Invece di parlare d'un *valore* attribuito alla variabile, si nomina il *punto*, immagine di quel valore; ed ogni intervallo si trova così rappresentato da un segmento rettilineo, terminato nei punti a e b, cioè nei punti le cui distanze dall'origine, valutate in un dato senso, sono misurate dai numeri a e b. Per rappresentare poi una funzione y basta considerare ogni coppia di valori, fra loro corrispondenti, di x e di y, come il sistema delle coordinate cartesiane (ortogonali) d'un punto del piano: l'equazione $y=f(x)$ rappresenta allora una *linea*, mediante la quale è facile rendersi conto delle principali proprietà delle funzioni e delle derivate; ma prima è necessario conoscere il significato geometrico della derivata. Ora si consideri la *tangente* alla curva, nel punto M, cioè la posizione limite della secante MM′, quando M′, percorrendo la curva, tende a confondersi con M. Si chiamino S e T i punti nei quali la secante e la tangente incontrano l'asse x, siano P e P′ i piedi delle perpendicolari condotte a questo asse per M ed M′, e si designi con H il punto che ha l'ascissa di M′ e l'ordinata di M. Fissate x ed y, coordinate di M, siano $x+\delta x$ ed $y+\delta y$ quelle di M′, e si osservi che, per la similitudine dei triangoli MHM′, SPM, si ha



$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\mathrm{M'H}}{\mathrm{MH}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{SP}}.$$

Col tendere a zero di δx e δy, M′ tende ad M, P resta fisso come M, ed S tende a T; quindi

$$y'=\lim\frac{\delta y}{\delta x}=\lim\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{SP}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{TP}}=\mathrm{tg}\,\widehat{\mathrm{MT}x},$$

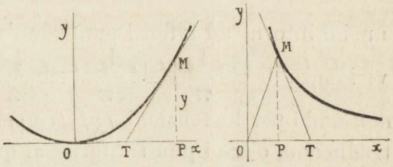
vale a dire che *la derivata dell'ordinata d'una curva, rispetto all'ascissa, rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva.* Quando la variabile indipendente è il *tempo*, questo coefficiente rappresenta una *velocità*, ossia la rapidità più o meno grande con cui la funzione tende a cre-

www.rcin.org.pl

scere o decrescere; ed è appunto così che la nozione di derivata, fondamentale nel Calcolo, si è presentata per la prima volta alla mente di Newton, poco prima del 1667 *).

14. **Esempii**: *a)* Grande ajuto si ha, per tracciare una curva $y=f(x)$, dal conoscere la derivata $f'(x)$ dell'ordinata, giacchè si possiede con ciò il mezzo di costruire la curva *per punti* e *per tangenti*. Qui vogliamo limitarci a qualche esempio, che valga a porre in luce l'utilità della rappresentazione grafica, non sotto l'aspetto geometrico, del quale si discorrerà, in seguito, distesamente, ma dal punto di vista del Calcolo stesso. Premettiamo due esercizii semplicissimi, costruendo le tangenti alla *parabola* ed all'*iperbole*, rappresentate dalle equazioni

$$y=\frac{x^2}{2a}\ ,\quad y=\frac{a^2}{x}\ .$$

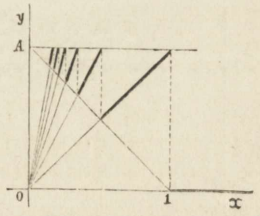


Dalle formole

$$y'=\frac{x}{a}=2\frac{y}{x}\ ,\ y'=-\frac{a^2}{x^2}=-\frac{y}{x}$$

si deduce $TP=y:y'={}^1/_2x$ per la prima curva, $PT=-y:y'=x$ per l'altra, e si vede che, conoscendo il punto O, vertice della parabola o centro dell'iperbole, e projettato in P, sulla tangente nel vertice o sopra un assintoto, un punto qualunque M dell'una o dell'altra curva, rispettivamente, basta congiungere M al punto medio di OP, o al simmetrico di O rispetto a P, per ottenere la tangente in M.

b) La linea rappresentativa di $x-[x]$ consta di infiniti segmenti rettilinei, ciascuno dei quali va da un punto della retta $y=0$, con ascissa intera n, al punto di ascissa $n+1$ sulla retta $y=1$. Veramente i punti della seconda retta andrebbero esclusi dalla linea; ma è bene osservare che, dal punto di vista geometrico, siffatte esclusioni sono inutili, e che bisogna invece avvalersi del concetto di continuità per escludere il meno che si può punti e tangenti. Così, se un punto, percorrendo una curva, tende a confondersi con un punto fisso, le cui coordinate non soddisfano l'equazione della curva, si suole nondimeno considerare il punto fisso come appartenente alla curva; nè si potrebbe, d'altronde, escluderlo, ossia separarlo dagli altri, con mezzi grafici. Analogamente, se in un punto M manca la tangente, ma esiste una retta con cui tende a confondersi la tangente in un altro punto M', tendente ad M, è questa retta che si considera come tangente in M. Tali convenzioni servono a prevenire molti dubbii, che troppo spesso ci si presenterebbero nelle applicazioni geometriche qualora volessimo attenerci alla rigida interpretazione dei principii fin qui esposti. Un'altra linea interessante, anch'essa costituita dai segmenti che due rette determinano sopra infinite rette, concorrenti in un punto, è quella che serve a rappresentare la funzione $x\left[\frac{1}{x}\right]$. Quando x è superiore ad $\frac{1}{n+1}$, ma non ad $\frac{1}{n}$, si ha $y=nx$, equazione d'una retta, limitata fra le rette $y=1-x$ ed $y=1$, esclusi i punti della prima. Il punto A dell'asse y, che ha l'ordinata 1, si può considerare come appartenente alla linea; ma



*) Vedi Mansion: « *Résumé du Cours d'Analyse*, etc. » p. 194.

GABINET MATEMATYCZN
Towarzystwa Naukowego Warszawsk

www.rcin.org.pl

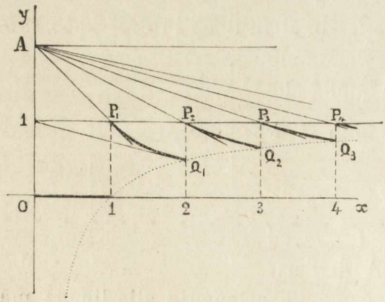
è graficamente impossibile tracciar questa nelle sue vicinanze, malgrado che in A l'ordinata sia continua.

c) Nell'esempio precedente la funzione considerata, continua in A, è discontinua intorno ad A; ma la curva rappresentata dall'equazione $y=f(x)$, in cui $f(x)=x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}$ ed $f(0)=0$, quantunque $f(x)$ sia continua (I, 22, *a*) per tutti i valori di x, nemmeno si può costruire nelle vicinanze dell'origine. Ed altrettanto si può dire della funzione continua

$$f(f(x))=x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\frac{1}{x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}},$$

anche intorno ad infiniti punti dell'intervallo $\left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$, e propriamente in vicinanza di $\pm\frac{1}{\pi}$, $\pm\frac{1}{2\pi}$, $\pm\frac{1}{3\pi}$,.... Siffatti punti si vanno sempre più addensando per le funzioni $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))$, *ecc.*, perchè ogni volta s'introducono, oltre i punti intorno ai quali *non è rappresentabile* la funzione precedente, anche quelli nei quali questa funzione si annulla. Non si creda, tuttavia, che la non rappresentabilità sia dovuta unicamente alla mancanza di derivata, ossia di tangente determinata nel punto che si considera, giacchè la curva $y=x^2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}$ tocca l'asse x nell'origine, ma è materialmente impossibile tracciarla in vicinanza di questo punto.

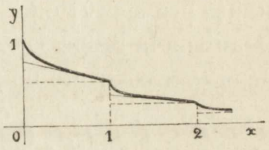
d) Del resto vi sono funzioni, per le quali non è possibile tracciare neppure un tratto, sia pure piccolissimo, della linea che le rappresenta, malgrado che se ne possano segnare tanti punti quanti ci piace, ed anche vicini tra loro quanto si vuole. Tale, per esempio, è la funzione $\varpi(x)$, giacchè (I, 29, *b*) in ogni segmento rettilineo, parallelo all'asse x, compreso nella striscia di piano definita dalla limitazione $0\leqq y\leqq 1$, ed arbitrariamente piccolo, cadono infiniti punti della linea rappresentativa, che *sembra* coprire la striscia intera. E se, in questo caso, la non rappresentabilità mediante una linea, intesa nel senso volgare della parola, si può imputare alla completa discontinuità della funzione, non si può dire lo stesso per la funzione di Weierstrass (§ 2, *f*), continua ma *priva di derivata* in ogni punto. Valgano queste osservazioni a convincerci della necessità di dimostrare con pure considerazioni analitiche tutte quelle proprietà delle funzioni, che interpretate geometricamente appariscono evidenti, giacchè tali proprietà sussistono indipendentemente dalla possibilità d'una rappresentazione geometrica, e d'altra parte questa può mancare per estese classi di funzioni, *non ostante la continuità*, ed anzi *malgrado l'esistenza della derivata.*



e) Il lettore potrà esercitarsi nella rappresentazione geometrica delle principali funzioni discontinue incontrate precedentemente; ma noi vogliamo qui limitarci a due sole funzioni, le cui linee rappresentative saranno in seguito utilizzate. La linea $y=[x]:x$ consta di infiniti archi iperbolici, giacchè, per n intero, se x appartiene all'intervallo $(n, n+1)$, escluso l'estremo supe-

www.rcin.org.pl

riore, l'equazione diventa $xy = n$, e rappresenta un arco d'iperbole, che va da un punto P della retta $y = 1$ ad un punto Q dell'iperbole $x(1-y) = 1$. Per quanto si è visto nel primo esempio, la tangente in ciascun punto P passa in A, simmetrico dell'origine rispetto alla retta $y = 1$. Adunque *le tangenti nei punti* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *concorrono in* A. Siccome poi, per un punto qualunque M della linea, crescendo x all'infinito si ha $\lim y = 1$, è chiaro che anche la tangente in M, simmetrica di OM rispetto alla parallela condotta per M all'asse x, tende a passare per A, vale a dire che, *mentre un punto, percorrendo la linea, tende a collocarsi sulla retta* $y = 1$, *la tangente nel punto stesso tende a confondersi con la retta* $y = 2$. Con altrettanta facilità si costruisce la linea rappresentativa della funzione *continua* $2^{-[x]}(1 - {}^1/_2\sqrt{x - [x]})$, linea evidentemente costituita da infiniti archi parabolici; e si riconosce che, *mentre un punto, allontanandosi all'infinito sulla curva, tende a collocarsi sull'asse* x, *l'angolo acuto che la tangente nel punto stesso fa con l'asse oscilla indefinitamente in un intervallo* $(\alpha, {}^1/_2\pi)$, *il cui estremo inferiore tende a zero.*



f) Nel seguito degli studii pratici si vedrà come una macchina possa tracciare da sè un *diagramma*, il suo diagramma, ossia una linea rappresentativa della pressione del vapore in funzione del volume generato dallo stantuffo. Così, col far conoscere le posizioni dello stantuffo negli istanti in cui cessa o comincia l'ammissione del vapore dalla caldaja nel cilindro, o l'emissione da questo nel condensatore, la macchina rivela a chi l'interroga i suoi pregi ed i suoi difetti. Svariati diagrammi s'incontrano in tutti i rami dell'ingegneria, e sono anche frequentissimi nello studio dei fenomeni naturali più varii, non esclusi quelli d'indole sociologica *). Per siffatte curve empiriche, sebbene abbiano importanza appunto in quanto servono a mostrare la *rapidità di variazione* delle rispettive funzioni, non si può teoricamente parlare di tangente o di derivata, perchè, soggette come sono ad errori, sia pure lievissimi, esse rappresentano effettivamente funzioni v, differenti dalle vere, u; ed è facile convincersi che, pur ammettendo che la derivata di u esiste, quella di v può non esistere, o differire molto da u'. Così, per esempio **), se fosse $u - v = \alpha \operatorname{sen} \frac{x}{\alpha^2}$, con α costante ed estremamente piccolo, si avrebbe anche $u' - v' = \frac{1}{\alpha} \cos \frac{x}{\alpha^2}$, e per conseguenza, malgrado che $|u - v|$ non superi mai α, potrebbe invece $|u' - v'|$ diventare estremamente grande intorno ad infiniti valori di x.

15. Una funzione $f(x)$ si dice rispettivamente *crescente*, o *decrescente*, o *costante* a destra di a, quando in un conveniente intervallo $(a, a+h)$ i suoi valori sono tutti superiori, tutti inferiori o tutti uguali ad $f(a)$. Si dice invece che $f(x)$ è crescente, decrescente, costante a sinistra di a, quando è possibile determinare un numero positivo h, tale che, per x appartenente

---

*) Vedi il recente « *Cours d'Économie politique* » di V. Pareto.

**) Laurent: « *Calcul des probabilités* » p. 200. Vedi anche il « *Calcolo* » di Genocchi e Peano, p. XIII.

www.rcin.org.pl

all'intervallo $(a-h, a)$, i valori di $f(x)$ siano rispettivamente inferiori, superiori, o uguali tutti ad $f(a)$. Può anche darsi che non esista un tal numero h. È ovvio, per esempio, che intorno allo zero la funzione $f(x)$, uguale a 0 per $x=0$, ed espressa da $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ per $x \gtrless 0$, non cessa mai di assumere valori positivi, negativi, o nulli, cioè, preso h piccolo quanto si vuole, i valori di $f(x)$ nell'intervallo $(-h, h)$ sono sempre in parte *maggiori*, in parte *minori* di $f(0)$, ed infiniti di essi sono anche *uguali* ad $f(0)$. Dunque la funzione non si può chiamare crescente, e nemmeno decrescente o costante per $x=0$; ed è chiaro che proprio a ciò si deve l'impossibilità di eseguirne la rappresentazione geometrica in vicinanza dell'origine, giacchè, dopo aver costruito un punto intorno al quale l'ordinata non cresce, nè decresce, nè si mantiene costante, non si sa immaginare in qual modo sia esso seguìto dai punti vicini. Altrettanto si può dire della funzione continua $x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$, che non si può chiamare crescente per $x=0$, sol perchè riprende infinite volte, intorno allo zero, il valore $f(0)=0$. È poi notevole la funzione $\varpi(x)$, della quale non si sa dir nulla (I, 27, *b*) intorno a qualsiasi punto.

16. Una funzione $f(x)$ dicesi crescente, o decrescente, o costante *in un intervallo* quando per ogni coppia di numeri x' ed x'', presi nell'intervallo che si considera, la differenza $f(x')-f(x'')$ ha il segno di $x'-x''$, o il segno opposto, o è nulla. È ovvio che una simile funzione è rispettivamente crescente, o decrescente, o costante intorno ad ogni numero dell'intervallo; ma non è altrettanto evidente la proposizione reciproca, che pure sussiste, come si dimostrerà nel paragrafo seguente. Tuttavia si noti subito che questa reciproca non regge se la funzione si suppone, per esempio, crescente solo da un lato di tutti i numeri d'un intervallo. Così la funzione $x-[x]$ è crescente a destra di tutti i valori di x, ma non è crescente in (a, b) se $[a]<[b]$.

17. **Teorema I.** *Una funzione crescente (o decrescente, o costante) intorno a tutti i valori della variabile, che appartengono ad un dato intervallo, è crescente (o decrescente, o costante) nell'intervallo stesso.*

Se la funzione non fosse crescente nell'intervallo (a, b), finito o infinito, questo conterrebbe almeno un intervallo (a_1, b_1), negli estremi del quale si avrebbe $f(a_1) \geqq f(b_1)$. Ora si chiami (a_2, b_2) la metà inferiore o la metà superiore di (a_1, b_1), secondo che per $x = {}^1/_2(a_1+b_1)$ la funzione assume un valore inferiore o non inferiore ad $f(a_1)$, e si osservi che, in ogni caso, $f(a_2) \geqq f(b_2)$. Così proseguendo si perviene, con un noto (*cfr.* I, 7) processo, ad un numero ξ, limite comune degli estremi inferiori $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e degli estremi superiori $b_1, b_2, b_3, \ldots$ degli intervalli ottenuti. Preso h positivo e piccolo quanto si vuole, si può sempre determinare n in modo che a_n e b_n cadano simultaneamente in $(\xi-h, \xi+h)$, uno a sinistra, l'altro a destra di ξ. Si vede così che gli intervalli $(\xi-h, \xi)$ e $(\xi, \xi+h)$ contengono rispettivamente due numeri $x'=a_n$ ed $x''=b_n$, tali che $f(x') \geqq f(x'')$, e ciò im-

www.rcin.org.pl

pedisce che la funzione sia crescente intorno a ξ, giacchè, per un valore di h convenientemente piccolo, dovrebbe essere sempre $f(x') < f(\xi) < f(x'')$. In modo analogo procede la dimostrazione nell'ipotesi d'una funzione decrescente o costante.

18. **Teorema II.** *Una funzione è crescente o decrescente alla destra (o alla sinistra) di* a, *secondo che la sua derivata destra (o sinistra) è positiva o negativa per* x = a.

In sostanza il fatto che una funzione cresce (o decresce) per un dato valore di x consiste nella possibilità di assegnare un numero positivo h, tale che, per $|\delta x| < h$, δy abbia il segno di δx (o il segno opposto). Ora, se per $x = a$ la derivata destra o sinistra di y è positiva, ciò vuol dire che il corrispondente rapporto incrementale finisce per diventare e restare positivo, quando δx tende a zero, e quindi che δy finisce per assumere e conservare il segno di δx. Dunque la funzione è crescente. Nello stesso modo si dimostra che la funzione è decrescente quando la derivata è negativa. Quando poi la derivata è nulla, ciò non impedisce che δy finisca per assumere e conservare un dato segno, e che per conseguenza la funzione possa crescere o decrescere per quel valore di x che si considera; ma può anche darsi che δy finisca per essere uguale a zero, o che non cessi mai di annullarsi o di cambiar segno, ed allora la funzione, se non è costante, non è nemmeno crescente o decrescente.

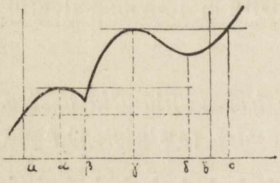
19. **Teorema III.** *Una funzione è crescente o decrescente, in un intervallo, secondo che la sua derivata, supposta unica, si conserva positiva o negativa nell'intervallo stesso.*

Infatti, se si ha, per esempio, $f'(x) > 0$, per tutti i valori di x appartenenti ad un certo intervallo, $f(x)$ è crescente intorno a ciascuno di questi valori, ed è per conseguenza crescente nell'intervallo, in virtù del teorema I.

20. **Minimi e massimi.** Si dice che, per $x = a$, $f(x)$ passa per un *minimo*, o che $f(a)$ è un minimo di $f(x)$, quando nessuno dei valori che $f(x)$ assume intorno ad a è minore di $f(a)$. Similmente si dice che $f(a)$ è un *massimo* di $f(x)$, quando, intorno ad a, nessun valore di $f(x)$ supera $f(a)$. Il minimo ed il massimo così definiti si chiamano anche *assoluti*, per distinguerli dal minimo e dal massimo valore, che una funzione assume in un dato intervallo: questi diconsi *relativi* perchè dipendono dall'insieme dei valori della funzione nell'intervallo considerato, mentre il minimo ed il massimo nel senso assoluto dipendono soltanto dai valori che la funzione prende intorno a determinati valori della variabile indipendente. In un intervallo si possono avere più minimi o massimi assoluti, ma un solo è il valore del minimo o del massimo relativo: questi possono variare insieme all'intervallo, ma i primi conservano il loro carattere in qualunque intervallo, e si verificano sempre per determinati valori di x, invariabili. Queste osserva-

www.rcin.org.pl

zioni riescono evidenti quando si fa uso della rappresentazione geometrica. Così, per esempio, riferendoci alla figura, vediamo che nell' intervallo (a, b) la funzione rappresentata ha il minimo relativo nell'estremo inferiore a, ed il massimo in un punto γ, nel quale si ha pure un massimo assoluto; un altro massimo assoluto si vede in α, e due minimi, uno in β e l'altro, maggiore del precedente massimo, in δ. Quando si sposta a verso la sinistra, il minimo relativo diminuisce, e si verifica nell'estremo inferiore del nuovo intervallo. Quando invece si comincia a spostare b verso la destra, il massimo relativo resta invariato e persiste in γ, fintantochè b passa alla destra del punto c; allora il detto massimo aumenta, e si trasferisce bruscamente nell'estremo superiore del nuovo intervallo. Terminiamo con due osservazioni importanti: il minimo assoluto, per $x = a$, non è che il minimo *relativo ad un intervallo sufficientemente piccolo*, preso intorno ad a; ed il minimo relativo ad un dato intervallo, *esclusi gli estremi*, è anche un minimo assoluto. Altrettanto dicasi del massimo. D' ora innanzi il minimo ed il massimo si dovrà sempre intenderli nel loro nuovo significato, a meno che non si dichiari esplicitamente il contrario.



21. **Teorema IV.** *Quando una funzione a derivata unica passa per un minimo o per un massimo, la derivata si annulla.*

Supponiamo, per esempio, che $f(a)$ sia un minimo, ed osserviamo che, per la definizione stessa del minimo assoluto, la funzione *non è crescente* a sinistra di a, *non è decrescente* a destra, e però la derivata, supposta *unica* (§ 1), considerata come derivata sinistra non può, in virtù del secondo teorema, essere positiva; considerata come derivata destra non può essere negativa: essa è dunque nulla. Non sussiste la proposizione reciproca, giacchè la derivata può benissimo annullarsi per un valore di x, che non renda minima o massima la funzione: nulla impedisce, per esempio, che la funzione sia (come avviene per $y = x^3$) crescente tanto a sinistra quanto a destra del predetto valore.

22. **Teorema V** (di Rolle). *Quando una funzione a derivata unica prende valori uguali negli estremi d'un intervallo, la derivata si annulla almeno una volta nell' intervallo stesso, esclusi gli estremi, purchè anche in questi la funzione sia continua.*

Poichè la funzione è continua *in tutto* l'intervallo considerato (a, b), questo racchiude, in virtù del secondo teorema di Weierstrass, almeno un numero ξ, in cui $f(x)$ raggiunge il minimo o il massimo valore. Se i valori della funzione fossero tutti uguali ad $f(a)$, la derivata sarebbe costantemente nulla. Supponiamo dunque che $f(x)$ prenda, in (a, b), valori diversi da $f(a)$. Allora almeno uno dei due numeri, che rappresentano il minimo ed il massimo valore della funzione, avrà un valore differente da

www.rcin.org.pl

$f(a)=f(b)$, e corrisponderà, per conseguenza, ad un numero ξ, diverso da a e da b. Esclusi così gli estremi dell'intervallo, il minimo o massimo della funzione è tale (§ 20) anche nel senso assoluto, e però (§ 21) si ha necessariamente $f'(\xi)=0$.

23. **Osservazioni.** Circa le restrizioni imposte si osservi che la funzione $x-[x]$, nulla negli estremi di $(0,1)$, è in questo intervallo, quando se ne escludano gli estremi, continua e provvista di derivata unica; ma questa (uguale ad 1) non è mai nulla: ciò si deve alla discontinuità che la funzione possiede a sinistra dell'estremo superiore, discontinuità che le impedisce di raggiungere il valor massimo. Non è tuttavia impossibile che la proprietà enunciata sussista anche quando la funzione non è continua negli estremi, come accade nell'intervallo $\left(0,\frac{1}{\pi}\right)$ per la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, discontinua nell'estremo inferiore. Invece, soddisfatta la condizione della continuità in *tutto* un intervallo, la proprietà si verifica indipendentemente dall'esistenza della derivata negli estremi. Basti l'esempio della funzione $x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, priva di derivata ma continua per $x=0$: in ogni intervallo $\left(0,\frac{1}{n\pi}\right)$ la sua derivata si annulla infinite volte, per valori di x, che sono inversi delle radici dell'equazione $\operatorname{tg}x=x$.

24. **Teorema VI** (di Cauchy). *Se nell'intervallo finito* (a,b) *le funzioni* φ *e* ψ *sono continue, e se, esclusi gli estremi, le derivate* φ' *e* ψ' *esistono, sono uniche e prive di radici comuni, il detto intervallo racchiude almeno un numero* ξ, *diverso dagli estremi, per cui si ha*

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Siccome nell'enunciare una proposizione non si può parlare di quantità prive di significato, nell'enunciato precedente è implicita la supposizione che almeno una delle due funzioni, per esempio ψ, abbia valori disuguali negli estremi dell'intervallo. In tale ipotesi si può sempre determinare la costante k in modo che la funzione $\varphi(x)-k\psi(x)$ prenda valori uguali negli estremi stessi, giacchè basta porre

$$\varphi(a)-k\psi(a)=\varphi(b)-k\psi(b)\ ,$$

e, ricordando che $\psi(a)\gtrless\psi(b)$, ricavarne

$$k=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}.$$

Intanto la funzione considerata, continua *in tutto* l'intervallo, ammette la derivata unica $\varphi'(x)-k\psi'(x)$, che deve annullarsi almeno per un valore ξ, preso *nell'interno* di (a,b), dimodochè si ha $\varphi'(\xi)=k\psi'(\xi)$; e siccome, per l'ipotesi fatta su φ' e ψ', non è possibile che sia $\psi'(\xi)=0$, altrimenti sarebbe *anche* $\varphi'(\xi)=0$, si può sempre dall'ultima eguaglianza (anche quando

PAŃSTW. INSTYTUT MATEM. BIBLIOTEKA
www.rcin.org.pl

$k=0$, nella quale ipotesi si ricade sul teorema di Rolle) trarre

$$k=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Eguagliando fra loro i due valori di k si ottiene il teorema di Cauchy. Si noti che per l'annullarsi di φ' e ψ' *negli estremi* non cessa la validità del teorema, come non cessa per l'inesistenza di φ' e ψ' negli estremi stessi, ma *potrebbe* cessare se in questi si presentasse una discontinuità per φ o per ψ.

25. **Teorema VII** (di Lagrangia). *Per ogni funzione* f(x), *continua in un intervallo finito* (a,b), *nell'interno del quale ammette la derivata unica, si ha*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\ ,$$

dove ξ *rappresenta un numero di* (a,b), *diverso dagli estremi.*

È questo un corollario immediato del teorema di Cauchy: basta fare $\varphi(x)=f(x)$, $\psi(x)=x$, ed osservare che $\psi'(x)=1$.

26. **Corollarii:** *a) Una funzione a derivata nulla è costante.* Infatti se si ha $f'(x)=0$ per ogni numero x, preso in (a,b), si può applicare il teorema di Lagrangia ad ogni intervallo (a,x), il cui estremo superiore non sia maggiore di b; e si ha $f(x)=f(a)=$ *costante.* Questa proposizione è un complemento necessario del teorema III, complemento che non si potrebbe in alcun modo dare all'analogo teorema II. Ben s'intende che $f'(x)$ ha il significato di derivata *unica*; ed è facile convincersi che la proposizione non sussisterebbe se fosse costantemente nulla, per esempio, la sola derivata destra, come avviene per $y=[x]$.

b) Due funzioni, aventi la stessa derivata, non possono differire che per una costante. Infatti, se $\varphi'=\psi'$, è nulla la derivata di $\varphi-\psi$, e però si ha $\varphi-\psi=$ *costante.*

27. **Osservazioni:** *a)* Si chiama *funzione primitiva* di $f(x)$ ogni funzione che ammette $f(x)$ per derivata. Dalle ultime proposizioni risulta che, se di $f(x)$ si conosce una funzione primitiva $F(x)$, *tutte* le altre sono comprese nella formola $F(x)+C$, in cui C rappresenta una *costante arbitraria.*

b) Il teorema di Lagrangia dà $f(x)=f(a)+(x-a)f'(\xi)$, dove, col tendere di x ad a, anche ξ, sempre compreso fra x ed a, tende ad a. Ora, se $f(x)$ cresce indefinitamente, altrettanto deve fare $(x-a)f'(\xi)$, e poichè $x-a$ tende a zero, bisogna che il valore assoluto di $f'(\xi)$ vada crescendo all'infinito: $\lim\limits_{x=a}|f'(\xi)|=\infty$. Qui si faccia attenzione a non considerare il primo membro come se fosse $\lim\limits_{x=a}|f'(x)|$, giacchè non si è sicuri che ξ, nel tendere ad a, prenda *tutti* i valori possibili intorno ad a. Si può dunque soltanto affermare che, *se col tendere della variabile ad un limite finito accade che una funzione a derivata unica oltrepassi ogni limite, anche la derivata cresce indefinitamente, o prende, oscillando, valori arbitrariamente grandi.*

www.rcin.org.pl

c) In modo analogo si dimostra che, *se una funzione a derivata unica tende ad un limite finito quando la variabile cresce indefinitamente, la derivata oscilla o tende a zero.* Infatti, fissato a, non può $(x-a)f'(\xi)$ tendere ad un limite finito, quando x cresce indefinitamente, senza che sia $\lim\limits_{x=a} f'(\xi)=0$. Dunque $\lim\limits_{x=a} f'(x)$ è zero, o non esiste. Tutte queste conseguenze del teorema di Lagrangia, come il teorema stesso, sono suscettibili di facili interpretazioni geometriche; ma, per non cedere alla tentazione di accordar valore dimostrativo a tali interpretazioni, il lettore farà bene a rileggere (§ 14, *d*) certe osservazioni precedenti.

d) Al teorema di Lagrangia si può dar la forma $\delta y : \delta x = f'(\xi)$, prendendo l'incremento δx a partire da un valore qualunque $x=a$. Si noti che il teorema vale anche quando *non esiste* $f'(a)$, giacchè in tutte le proposizioni precedenti, per non introdurre, senza necessità, condizioni sovrabbondanti, abbiamo sempre avuto cura di escludere gli estremi dell'intervallo, pur supponendo in essi continue le funzioni. Quando poi $f'(a)$ esiste, dal teorema di Lagrangia segue, col far tendere δx a zero, $\lim\limits_{x=a} f'(\xi)=f'(a)$; e poichè il primo membro non è da confondersi con $\lim\limits_{x=a} f'(x)$, si può soltanto affermare *) che, quando x tende ad a, la funzione $f'(x)$ passa per infiniti valori, che differiscono da $f'(a)$ tanto poco quanto si vuole; ma non si esclude con ciò che possa prenderne altri, che le impediscano di tendere ad un limite. Adunque ogni funzione, che si può riguardare come derivata *unica* di un'altra, è suscettibile di sole discontinuità di seconda specie. In altri termini, quando un punto M′ tende, lungo una curva, ad un punto fisso M, se sono ben determinate le tangenti alla curva in M ed in M′, la tangente mobile tende a confondersi con la tangente fissa, o non tende ad alcuna posizione limite. Un esempio di ciò si ha nella funzione continua $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, per la quale $f'(0)=0$, mentre $f'(x)=2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ oscilla indefinitamente, nel tendere di x a zero. Il teorema di Lagrangia dà $x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 2\xi \operatorname{sen} \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi}$, e dal fatto stesso che si deve avere $\lim \cos \frac{1}{\xi} = 0$ si deduce che ξ è una tal funzione discontinua di x, che tende a zero, con x, evitando valori infinitamente più numerosi di quelli che va assumendo.

e) Segue ancora dalle precedenti osservazioni che la derivata d'una funzione può ben possedere discontinuità ordinarie, ma là dove queste si presentano si è sicuri che la derivata destra differisce dalla sinistra. Di ciò si ha un esempio nella funzione

$$f(x) = x[x] - {}^1/_2([x]+[x]^2) ,$$

che ha per derivata la funzione $[x]$; e la discontinuità ordinaria di questa, per ogni valore intero di x, rappresenta appunto il passaggio brusco dalla derivata sinistra, uguale ad $x-1$, alla derivata destra, uguale ad x.

---

*) Vedi il «*Calcolo*» di Genocchi e Peano, p. 50.

www.rcin.org.pl

Complementi della teoria dei limiti.

28. Mercè le ultime proposizioni possiamo prepararci a lasciare il campo della pura teoria per entrare in quello, non meno interessante, delle applicazioni alla pratica del calcolo; e prima di ogni altro vogliamo dal teorema di Cauchy dedurre un altro importante teorema, per mezzo del quale ci sarà facile colmare una lacuna (I, 14) lasciata nella teoria dei limiti. Questo teorema ci metterà in grado di calcolare i limiti di molte funzioni, che per determinati valori della variabile indipendente si presenterebbero sotto forme prive di significato, come

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

se fosse lecito applicare le ordinarie regole del calcolo dei limiti. Osserviamo subito che le forme precedenti son tutte riducibili alle prime due, le sole che siano contemplate nell'enunciato del teorema in discorso. Infatti, se il *prodotto* $\varphi\psi$ di due funzioni tende a presentarsi sotto la forma $0.\infty$, quando x tende ad un limite, basta applicare il teorema stesso al *quoziente* di φ per $1:\psi$. Similmente, se la differenza $\varphi-\psi$ tende ad assumere la forma $\infty-\infty$, basta considerare il prodotto di φ per $1-(\psi:\varphi)$ per essere subito ricondotti al caso precedente, purchè $\psi:\varphi$ tenda ad 1, senza di che quella differenza non potrebbe rimanere finita. Al medesimo caso si riduce anche la ricerca del limite di φ^ψ, sia quando φ tende a zero o all'infinito, mentre ψ tende a zero, sia quando φ tende all'unità mentre ψ oltrepassa ogni limite. Basta considerare il logaritmo dell'espressione proposta, cioè $\psi\log\varphi$, che si presenterebbe appunto sotto la forma $0.\infty$, se si commettesse l'errore, del resto infecondo, di applicare illecitamente la nota regola che dà il limite del prodotto di più funzioni, in numero finito, *quando queste tendono a limiti finiti.*

29. **Teorema VIII** (di l'Hospital). *Se due funzioni continue tendono simultaneamente a zero o all'infinito quando la variabile indipendente tende ad un limite finito* a, *o all'infinito, e se il rapporto delle derivate (supposte esistenti fuori di* a, *ed uniche) tende ad un limite, anche il rapporto delle funzioni tende allo stesso limite, purchè le derivate sian prive di radici comuni intorno ad* a, *o invece, nel caso che la variabile vada crescendo all'infinito, di radici comuni arbitrariamente grandi.*

a) Prima supponiamo che, per x tendente ad a, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tendano a zero, e per conseguenza si abbia, in virtù della continuità, $\varphi(a)=0$, $\psi(a)=0$. Preso x sufficientemente vicino ad a perchè nessun numero dell'intervallo (a,x), diverso dagli estremi, annulli insieme φ' e ψ', il teorema di Cauchy dà

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

www.rcin.org.pl

dove ξ, compreso fra a ed x, tende con x ad a. Ne segue

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

quando esiste il secondo membro. Questa conclusione regge ancora nell'ipotesi che x, invece di tendere ad a, vada crescendo oltre ogni limite. Infatti, posto $x=\frac{1}{z}$, si può scrivere

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{z=0}\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z=0}\frac{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Nel far ciò si suppone che le funzioni $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ e $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, continue fintantochè $z\gtrless 0$, siano continue anche per $z=0$, vale a dire che si conviene di attribuir loro il valore 0 per $z=0$. Inoltre, per applicare con sicurezza il teorema di Cauchy, è necessario ammettere l'esistenza d'un tal numero l, che per $x>l$ non si annullino mai simultaneamente $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$. Considerazioni analoghe si possono fare quando x tende a $-\infty$, nel qual caso z dovrà tendere a zero per valori negativi.

b) Ora supponiamo che, per x crescente all'infinito, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ oltrepassino ogni limite, e che il rapporto delle derivate tenda al limite l. Ciò esige che, dato il numero positivo ε, piccolo quanto si vuole, si possa trovare un numero a, tale che, per $x>a$, sia sempre

$$\left|\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}-l\right|<\varepsilon.$$

Posto che a sia stato già preso abbastanza grande perchè in (a,∞) non esistano radici comuni di φ' e ψ', si ha identicamente, in virtù del teorema di Cauchy,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}\cdot\frac{1-\frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\cdot\frac{1-\frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}},$$

per ogni $x>a$, e per un conveniente $\xi>a$, inferiore ad x. Fissato a, si faccia crescere x indefinitamente. Il primo fattore non cessa di restar compreso fra $l-\varepsilon$ ed $l+\varepsilon$, mentre il secondo, che tende all'unità, finisce per cadere e restare nell'intervallo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Ne segue che, a partire da un certo valore di x, si avrà costantemente

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=l+\theta\varepsilon\quad,\quad\frac{1-\frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}=1+\theta'\varepsilon\,,$$

www.rcin.org.pl

con θ e θ' inferiori ad 1 in valore assoluto. Dunque

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l + (\theta + l\theta' + \theta\theta'\varepsilon)\varepsilon .$$

Ora, fissato η, positivo e piccolo quanto si vuole, basta prendere simultaneamente, per $l \gtrless 0$,

$$\varepsilon < |l| \quad , \quad \varepsilon < \frac{\eta}{1+2|l|} ,$$

o $\varepsilon = \eta : (1+\eta)$ per $l = 0$, perchè risulti

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - l \right| < \eta ,$$

e conseguentemente

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l .$$

Il teorema si deve ritenere come valido anche quando il numeratore si conserva finito, nel qual caso il limite del rapporto delle funzioni è zero; e per far vedere che il rapporto delle derivate non può tendere ad un limite diverso da zero basta scrivere

$$1 = \lim \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x) + \psi'(x)}{\psi'(x)} = 1 + \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} .$$

Finalmente se x, invece di crescere all'infinito, tende ad un limite finito a, il teorema sussiste, perchè, posto $x = a + \frac{1}{z}$, si può scrivere

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\psi'\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} .$$

30. **Osservazioni**: *a)* Nella ricerca del limite di $\varphi : \psi$, per x tendente ad a, i numeri $\varphi'(a)$ e $\psi'(a)$ possono non esistere, o entrambi essere nulli senza che il teorema cada in fallo, poichè soltanto *intorno* ad a, non per $x = a$, le funzioni sono obbligate ad ammettere le derivate, e queste ad esser prive di radici comuni. Se le derivate, oltre ad annullarsi per $x = a$, sono continue, la ricerca del limite del loro rapporto ci rimetterà in presenza del problema che si voleva risolvere; ma, supponendo soddisfatte anche le altre condizioni, noi potremo nuovamente applicare il teorema passando alle derivate seconde, poi, se occorre, alle terze; ecc.

b) Certe osservazioni precedenti conducono a formulare un'obbiezione, grave in apparenza, contro il teorema di l'Hospital, in quanto sembra che il procedimento che ne deriva per calcolare il limite d'un quoziente debba riuscir sempre illusorio, sia nel caso che le funzioni vadano crescendo all'infinito, col tendere della variabile ad un limite finito, sia quando tendono a zero mentre la variabile cresce indefinitamente. Infatti le derivate, se non oscillano, vanno anch'esse crescendo all'infinito nel primo caso (§ 27, *b*), e nel secondo tendono a zero (§ 27, *c*). A ciò si risponde che l'importanza del procedimento di calcolo, indicato dal teo-

www.rcin.org.pl

rema di l'Hospital, risiede principalmente nella possibilità di trasformare una espressione, che tende ad un limite, in un altra che non può tendere ad un limite differente, e che si presenta quasi sempre sotto una forma più semplice, o si presta a semplificazioni tali che ne riesca facile il calcolo diretto del limite.

c) Il teorema di l'Hospital si può considerare come valido anche nel caso che il rapporto delle derivate, invece di tendere ad un limite finito, vada crescendo indefinitamente. Infatti, per x tendente ad a, nell'ipotesi che φ e ψ tendano a zero, preso intorno ad a un intervallo in cui $\varphi':\psi'$ si conservi superiore ad un dato numero l, grande quanto si vuole, anche $\varphi:\psi$ si manterrà maggiore di l per gli stessi valori di x, perchè il valore dell'ultimo rapporto, per un dato valore di x, è uguale ad uno dei valori che il primo prende in (a,x). Nel caso poi che φ e ψ vadano crescendo all'infinito, si consideri il rapporto $\psi:\varphi$. Questo tende a zero, come $\psi':\varphi'$, e siccome finisce per conservarsi positivo si può asserire che $\varphi:\psi$ cresce all'infinito come $\varphi':\psi'$.

d) Se il limite del rapporto delle derivate *non esiste*, non è lecito dedurne la non esistenza del limite del rapporto delle funzioni. Per esempio si ha

$$\lim_{x=\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}=\lim_{x=\infty}\frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}=1\ ,$$

mentre non tende ad alcun limite il rapporto delle derivate, evidentemente uguale a $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. Infatti dalla dimostrazione del teorema risulta che, quando esiste il limite del rapporto delle funzioni, per x crescente all'infinito o tendente ad un limite finito, esiste anche, non il secondo, ma il primo dei seguenti limiti:

$$\lim_{x=\cdots}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\ ,\quad \lim_{x=\cdots}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\ .$$

In sostanza ξ è una funzione di x, che cresce all'infinito con x, o tende con questa variabile ad un comune limite finito, ma che può non assumere *tutti* i valori che va prendendo x, d'onde segue che dall'esistenza del primo limite non si può dedurre quella del secondo. Invece l'esistenza del secondo limite, ammessa nell'enunciato del teorema, include quella del primo, e per conseguenza anche quella del limite del rapporto delle funzioni.

e) Delle restrizioni concernenti le radici comuni di φ' e ψ' non si ha mai occasione di tener conto nelle ordinarie applicazioni; ma è utile essere avvertiti della possibilità che il rapporto delle funzioni oscilli, malgrado che tenda ad un limite il rapporto delle derivate. Così per esempio, se si prende

$$\varphi(x)=x+\operatorname{sen}x\cos x\quad,\quad \psi(x)=(x+\operatorname{sen}x\cos x)e^{\operatorname{sen}x}\ ,$$

è chiaro che, crescendo x all'infinito, il rapporto delle funzioni oscilla indefinitamente fra e ed $\frac{1}{e}$; ma il rapporto delle derivate

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{2e^{-\operatorname{sen}x}.\cos x}{x+(2+\operatorname{sen}x)\cos x}$$

tende a zero, perchè il numeratore resta finito, mentre il denominatore cresce al-

www.rcin.org.pl

l'infinito come x. Ciò si deve al simultaneo annullarsi di $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ tutte le volte che x passa per una delle radici di $\cos x$, fra le quali, come si sa, ve ne sono sempre maggiori di qualunque numero assegnato.

31. **Esercizii**: *a)* Qual'è, per x crescente all'infinito, il limite di $x^n e^{-x}$? Evidentemente il limite è zero per $n \leqq 0$. Se poi n è positivo, sia ν il massimo numero non positivo fra i numeri $n-1, n-2, n-3, \ldots$ Si ha, per x infinito,

$$\lim x^n e^{-x} = \lim \frac{x^n}{e^x} = n \lim \frac{x^{n-1}}{e^x} = n(n-1) \lim \frac{x^{n-2}}{e^x} = \ldots$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(\nu+1) \lim \frac{x^\nu}{e^x} = 0 \ .$$

In altri termini e^x cresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza di x. Ne risulta, cambiando x in $\log x$, che questa funzione cresce all'infinito così lentamente, che qualunque sua potenza, con esponente grande quanto si vuole, cresce meno rapidamente di x. Ciò si può constatare in modo diretto, mediante il teorema di l'Hospital, scrivendo

$$\lim \frac{\log^n x}{x} = n \lim \frac{\log^{n-1} x}{x} = n(n-1) \lim \frac{\log^{n-2} x}{x} = \ldots$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(\nu+1) \lim \frac{\log^\nu x}{x} = 0 \ .$$

Il limite, per x infinito, di $x^{\frac{1}{x}}$, si può calcolare (ricordando la continuità di $\log x$) nel seguente modo:

$$\lim \log x^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\log x}{x} = 0 \quad , \quad \log \lim x^{\frac{1}{x}} = 0 \quad , \quad \lim x^{\frac{1}{x}} = 1 \ .$$

b) A titolo di verifica (*cfr.* I, 20, *a*) si osservi che, quando x tende a zero,

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1 \quad , \quad \lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \ .$$

Il teorema di l'Hospital conduce inoltre, sempre per x tendente a zero, ai seguenti risultati:

$$\lim \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{b - \sqrt{b^2 - x^2}} = \lim \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a} \ ,$$

$$\lim \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim \frac{a^x \log a - b^x \log b}{c^x \log c - d^x \log d} = \frac{\log(a:b)}{\log(c:d)} \ ;$$

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{3} \ ,$$

$$\lim \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{6} \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6} \ ,$$

$$\lim \frac{2x - 3 \operatorname{sen} x + x \cos x}{x^5} = \frac{1}{5} \lim \frac{2 - 2\cos x - x \operatorname{sen} x}{x^4}$$

$$= \frac{1}{20} \lim \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{60} \ ,$$

$$\lim \frac{(9 + 6\cos x)x - (14 + \cos x) \operatorname{sen} x}{x^7}$$

$$= \frac{2}{7} \lim \frac{4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{sen} x \cos \frac{x}{2} - 3x \cos \frac{x}{2}}{x^5} = \frac{3}{70} \lim \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{140} \ .$$

www.rcin.org.pl

Analogamente

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

o pure

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3 \cos x} = \lim \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Se per calcolare il limite di $\frac{1}{x^2} - \cot^2 x$ si comincia dal porre questa espressione sotto la forma

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

si vede subito, senza applicare il teorema di l'Hospital, che il primo fattore tende a 2, e si sa che gli altri tendono rispettivamente ai limiti $\frac{1}{3}$ ed 1. Dunque

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

c) Quando si sa (I, 20, *d*) che, per x tendente a zero, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tende ad e, è naturale domandarsi come si comporta la differenza $e - (1+x)^{\frac{1}{x}}$, e si è in tal modo condotti al seguente calcolo:

$$\lim \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = e \lim \frac{(1+x)\log(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \frac{e}{2} \lim \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{e}{2} \lim \frac{1}{1+x} = \frac{e}{2}.$$

Similmente

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} - e}{x^2} = \frac{e}{4} \lim \frac{2x + x^2 - 2(1+x)\log(1+x)}{x^3}$$

$$= \frac{e}{6} \lim \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{e}{12}.$$

d) Se si vuol calcolare, per x infinito, il limite di $x - \sqrt{(x-a)(x-b)}$, conviene porre $x = \frac{1}{z}$, per far poi tendere z a zero. Così l'espressione proposta diventa uguale al quoziente di $1 - \sqrt{(1-az)(1-bz)}$ per z, e però il suo limite è uguale al limite di

$$\frac{1}{2}\sqrt{(1-az)(1-bz)}\left(\frac{a}{1-az} + \frac{b}{1-bz}\right)$$

per $z = 0$. Dunque

$$\lim_{x=\infty} \left(x - \sqrt{(x-a)(x-b)}\right) = {}^1/_2(a+b).$$

A questo risultato si perviene subito, senza far uso del teorema di l'Hospital, se all'espressione proposta si dà la forma

$$\frac{(a+b)x - ab}{x + \sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{a + b - \frac{ab}{x}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right)}}.$$

www.rcin.org.pl

e) Più generalmente, tutte le volte che per due funzioni φ e ψ, crescenti all'infinito con x, si può determinare una funzione f, tale che i rapporti di φ e ψ ad f tendano verso un limite finito k, diverso da zero, se si conosce anche il limite l di $(\varphi'-\psi')\frac{\sqrt{f}}{f'}$, è facile calcolare il limite di $\sqrt{\varphi}-\sqrt{\psi}$. Infatti

$$\lim(\sqrt{\varphi}-\sqrt{\psi})=\lim\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{\varphi}+\sqrt{\psi}}=\frac{1}{2\sqrt{k}}\lim\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{f}}=\frac{l}{\sqrt{k}}.$$

Per $f=\varphi=x^2$ e $\psi=(x-a)(x-b)$ si ricade sull'esercizio precedente. In modo analogo si tratta il caso delle radici n^{ime}, e si trova

$$\lim(\sqrt[n]{\varphi}-\sqrt[n]{\psi})=\frac{1}{n}\lim\frac{\varphi'-\psi'}{x^{n-2}}$$

quando esiste il secondo membro, supponendo che i rapporti di φ e ψ ad x^n, per x infinito, tendano ad 1. In particolare

$$\lim_{x=\infty}(\sqrt[n]{x^n+ax^{n-1}+\ldots}-\sqrt[n]{x^n+bx^{n-1}+\ldots})=\frac{a-b}{n}.$$

III. SVILUPPI IN SERIE.

Serie di funzioni.

1. Ora vogliamo occuparci delle funzioni definite per mezzo di serie. I valori di x, per i quali converge una data serie $u_1+u_2+u_3+\ldots$, i cui termini sono funzioni di x, possono costituire uno o più intervalli, nei quali viene così ad essere definita la *somma* della serie come funzione di x. Se si considera un intervallo qualunque (a,b), in cui la serie converge, anche il *resto* $\varphi_n(x)$, cioè la somma della serie che si ottiene sopprimendo nella serie data i primi n termini, è una funzione di x, definita nel detto intervallo. Si sa che, quando n cresce all'infinito, il resto tende a zero, vale a dire che, dato ε positivo e piccolo ad arbitrio, si può, per ogni valore di x compreso in (a,b), trovare un numero ν, tale che il valore assoluto di φ_n rimanga sempre inferiore ad ε quando n supera ν. Se si riesce a determinare ν *indipendentemente da* x, la serie si dice *uniformemente convergente.* In altre parole se, corrispondentemente a ciascun valore di x, immaginiamo scelto per ν il più piccolo valore possibile, si può dire che ν è una funzione di x, definita nell'intervallo (a,b). Se questa funzione è finita in tale intervallo, essa vi ammette (I, 9) il limite superiore, e la serie converge uniformemente; ma può anche darsi che ν non sia finito nell'intervallo considerato, dimodochè sia impossibile determinare un valore di n, *lo stesso per tutti i*

www.rcin.org.pl

valori di x, a partire dal quale φ_n resti inferiore ad ε. Ciò accade, per esempio, quando, facendo convenientemente variare x insieme ad n, si riesce a far sì che φ_n non tenda a zero. Con questo mezzo si può facilmente constatare la *non uniforme* convergenza di molte serie.

2. **Esempii**: *a)* La serie

$$\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)+\cdots \qquad (1)$$

converge uniformemente nell'intervallo $(0,1)$, perchè il resto $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ si mantiene inferiore ad ε quando n supera il numero $\frac{1}{\varepsilon}$, *indipendente da* x. Non avviene altrettanto per la serie

$$(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots\cdots, \qquad (2)$$

convergente nel medesimo intervallo, giacchè il resto è x^n, se $x<1$, e non si può fissare ν in modo che, per $n>\nu$, sia $x^n<\varepsilon$ *per ogni valore di* x. Infatti, se si concede che x possa accostarsi ad 1 quanto si vuole, basta porre $x=1-\frac{1}{n}$ perchè l'espressione del resto diventi $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, e così, per n infinito, non tenda a zero.

b) Della serie $1+x+x^2+\ldots$ non si dice che *non* converge *uniformemente*, perchè basta limitarsi ad affermare che *non converge* nel predetto intervallo, a meno che non si escluda l'estremo superiore, nel qual caso, dopo aver sostituito ad 1 un numero $a<1$ (sia pure vicinissimo ad 1), è facile constatare che la convergenza è uniforme. Infatti, fissato ad arbitrio il numero positivo ε, se si prende ν abbastanza grande perchè a^ν non sia maggiore di $(1-a)\varepsilon$, è chiaro che, per $n>\nu$, il resto $x^n:(1-x)$ si manterrà inferiore ad ε. Lo stesso si può dire della serie $1+2x+3x^2+\cdots\cdots$, se ν si determina in modo che $(\nu+1)a^\nu$ non sia maggiore di $(1-a)\varepsilon$. Queste due determinazioni di ν sono possibili, perchè (II, 31, *a*), qualunque sia k, e per ν crescente all'infinito, $\nu^k a^\nu$ tende a zero.

c) La somma dei primi n termini della serie

$$\left(x-xe^{-x^2}\right)+\left(xe^{-x^2}-2xe^{-2x^2}\right)+\left(2xe^{-2x^2}-3xe^{-3x^2}\right)+\cdots\cdots \qquad (3)$$

è $x-nxe^{-nx^2}$, e tende ad x per n crescente all'infinito. La serie converge dunque, ma non uniformemente, perchè, posto $x=\frac{1}{n}$, il resto nxe^{-nx^2} diventa $e^{-\frac{1}{n}}$, e non tende a zero. Similmente la serie

$$\frac{x}{(1+x)(1+2x)}+\frac{x}{(1+2x)(1+3x)}+\frac{x}{(1+3x)(1+4x)}+\cdots\cdots$$

è convergente per $x\geqq 0$, perchè la somma dei primi n termini è

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(n+1)x},$$

ed ha per limite $\frac{1}{1+x}$ quando n cresce all'infinito; ma essa non converge uniformemente, perchè il resto diventa uguale ad $\frac{1}{2}$ quando si pone $x=\frac{1}{n+1}$, e

www.rcin.org.pl

questo valore appartiene ad ogni intervallo che ha 0 per estremo inferiore. La medesima serie converge invece uniformemente in ogni intervallo, il cui estremo inferiore a è positivo, perchè, dato ε positivo ed arbitrariamente piccolo, basta prendere $n+1$ superiore ad $\frac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}$, numero indipendente da x, per essere sicuri che riuscirà e resterà inferiore ad ε il resto n^{imo}.

d) Ogni funzione continua è rappresentabile mediante una serie uniformemente convergente. Infatti, costruita una successione qualunque di numeri α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ tendenti a zero, se si prende $u_n = f(x+\alpha_n) - f(x+\alpha_{n-1})$, la somma dei primi n termini della serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ è $f_n(x) = f(x+\alpha_n)$, e si ha $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$. Dunque la serie è convergente, ed il suo resto è

$$\varphi_n(x) = f(x) - f(x+\alpha_n) .$$

Ciò premesso, dato ad arbitrio il numero positivo ε, si può sempre, in virtù del teorema di Cantor, poichè $f(x)$ è continua, determinare h in modo che la differenza $f(x') - f(x'')$ sia minore di ε, in valore assoluto, tutte le volte che $|x' - x''| < h$. Ne segue, prendendo ν sufficientemente grande perchè risulti $|\alpha_\nu| < h$, che si ha $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ per $n > \nu$, qualunque sia x.

3. **Teorema I.** *Una serie di funzioni converge assolutamente ed uniformemente se converge la serie formata dai limiti superiori dei valori assoluti dei termini.*

Se μ_n è il limite superiore di $|u_n(x)|$ nell'intervallo (a,b), la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ converge assolutamente *) per tutti i valori di x appartenenti ad (a,b), perchè i suoi termini non superano, in valore assoluto, i corrispondenti termini della serie $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$, che per ipotesi converge nell'intervallo considerato. Inoltre, fissato ad arbitrio il numero positivo ε, esiste sempre un numero ν, tale che, per $n > \nu$, è

$$\mu_{n+1} + \mu_{n+2} + \mu_{n+3} + \cdots\cdots < \varepsilon .$$

Dunque *a fortiori* sarà $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ per ogni valore di n superiore al medesimo numero ν, *indipendente da* x, e però la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ converge anche uniformemente.

4. **Teorema II.** *Se i valori assoluti dei termini d'una data serie formano una serie uniformemente convergente, converge anche uniformemente ed assolutamente la serie ottenuta moltiplicando per funzioni finite i termini della serie data.*

Siano $v_1, v_2, v_3, \ldots$ funzioni finite nell'intervallo (a,b), cioè tali che i loro valori assoluti non superino un certo numero l. Sia $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ la serie data. La serie $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \ldots$ converge assolutamente, perchè i valori dei suoi termini non superano i corrispondenti termini della serie convergente $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$, moltiplicati per l. Dato ad arbi-

*) Sulla convergenza assoluta vedi « *Analisi algebrica* » p. 159.

www.rcin.org.pl

trio il numero positivo ε, si può sempre trovare, per ipotesi, un numero ν, *indipendente da* x, tale che, per $n > \nu$, riesca $|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots$ inferiore ad $\varepsilon : l$, ed *a fortiori* sia

$$|u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + u_{n+3}v_{n+3} + \cdots\cdots| < \varepsilon .$$

Dunque la serie $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots$ converge anche uniformemente.

5. **Teorema III.** *Se, per* $x = a$, *i termini d'una serie uniformemente convergente tendono a limiti finiti, anche la somma della serie tende ad un limite finito, uguale alla somma dei limiti dei termini.*

a) Si considerino, per fissare le idee, i limiti *a destra* di a, e si stacchi un intervallo arbitrariamente piccolo $(a, a+h)$ dall'intervallo in cui la serie converge uniformemente. In forza di simile convergenza, dato ε positivo ed arbitrariamente piccolo, è sempre possibile determinare ν in modo che, per $n > \nu$, si abbia

$$|\varphi_n(x')| < {}^1/_3\varepsilon \quad , \quad |\varphi_n(x'')| < {}^1/_3\varepsilon \quad , \quad \text{e quindi} \quad |\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < {}^2/_3\varepsilon$$

per due valori *qualunque*, x' ed x'', appartenenti all'intervallo $(a, a+h)$. Ora, *fissato* n, si osservi che, quando x tende ad a, la somma $f_n(x)$ dei primi n termini della serie tende ad un limite finito, uguale alla somma dei limiti di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, e però si può sempre far impicciolire h sufficientemente perchè si abbia $|f_n(x') - f_n(x'')| < {}^1/_3\varepsilon$. Ne segue, chiamando $f(x)$ la somma della serie, che si ha

$$|f(x') - f(x'')| \leqq |f_n(x') - f_n(x'')| + |\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \varepsilon$$

per ogni coppia di valori di x' ed x'' presi in $(a, a+h)$. Dunque $f(x)$ ammette (I, 16) per x tendente ad a, a destra, un limite finito e determinato $f(a+0)$.

b) Ciò premesso, dimostriamo che questo limite è appunto la somma della serie formata dai limiti della serie data. Si ha

$$f(x) - \sum_1^n u_i(a+0) = \sum_1^n (u_i(x) - u_i(a+0)) + \varphi_n(x) \ . \qquad (4)$$

Dato ε positivo e piccolo ad arbitrio, esiste un numero ν, tale che, per $n > \nu$, è sempre $|\varphi_n(x)| < {}^1/_3\varepsilon$ per *tutti* i valori di x appartenenti ad $(a, a+h)$. Ora, *fissato* n, si faccia tendere x ad a. Poichè $u_i(x)$ tende ad $u_i(a+0)$, si ha, per h sufficientemente piccolo,

$$\left| \sum_1^n (u_i(x) - u_i(a+0)) \right| < {}^1/_3\varepsilon \ ,$$

e però, in virtù di (4),

$$\left| f(x) - \sum_1^n u_i(a+0) \right| < {}^2/_3\varepsilon \ .$$

www.rcin.org.pl

Quindi, osservando che anche $f(x)-f(a+0)$ si può rendere, in valore assoluto, inferiore ad $^1/_3\varepsilon$,

$$\left|f(a+0)-\sum_1^n u_i(a+0)\right| \leqq \left|f(a+0)-f(x)\right| + \left|f(x)-\sum_1^n u_i(a+0)\right| < \varepsilon .$$

Dunque $f(a+0)=u_1(a+0)+u_2(a+0)+u_3(a+0)+\ldots\ldots$

6. **Teorema IV.** *Se una serie di funzioni continue converge uniformemente, la somma della serie è una funzione continua.*

Infatti

$$f(a)=\sum_1^\infty u_i(a) \quad , \quad f(a\pm 0)=\sum_1^\infty u_i(a\pm 0) .$$

La seconda uguaglianza si può affermare in virtù dell'uniformità e del teorema precedente. D'altra parte si ha, per la continuità dei termini,

$$u_i(a)=u_i(a\pm 0) \; ; \quad \text{poi} \quad f(a)=f(a\pm 0) .$$

Dunque $f(x)$ è una funzione continua.

7. **Teorema V.** *Se le derivate dei termini d'una serie convergente di funzioni formano una serie uniformemente convergente, la somma di questa serie è la derivata della somma della serie primitiva.*

Limitandoci a considerare, per esempio, le derivate destre, osserviamo che, se a appartiene all'intervallo in cui si avvera l'uniforme convergenza, purchè si escluda l'estremo superiore, si può prendere h sufficientemente piccolo perchè $a+h$ cada nel medesimo intervallo, ed allora, dato ad arbitrio il numero positivo ε, si può sempre trovare un numero ν, *indipendente da* x, tale che per $n \geqq \nu$ sia

$$\left|\sum_{n+1}^\infty u'_i(x)\right| < {}^1/_8\varepsilon ,$$

per tutti i valori di x presi in $(a, a+h)$. Ne segue

$$\left|\sum_{\nu+1}^n u'_i(x)\right| \leqq \left|\sum_{\nu+1}^\infty u'_i(x)\right| + \left|\sum_{n+1}^\infty u'_i(x)\right| < {}^1/_4\varepsilon .$$

Intanto, dopo aver posto, per brevità,

$$\sigma_n=\sum_1^n\left(\frac{u_i(a+h)-u_i(a)}{h}-u'_i(a)\right) ,$$

si osservi che si ha, impiegando il teorema di Lagrangia,

$$\sigma_n=\sigma_\nu+\sum_{\nu+1}^n(u'_i(\xi)-u'_i(a)) ,$$

dove ξ, superiore ad a, è minore di $a+h$. Ora, *fissato* ν nel modo prece-

www.rcin.org.pl

dentemente accennato, ne risulta anzitutto

$$\left|\sum_{\nu+1}^{n}(u'_i(\xi)-u'_i(a))\right|<{}^1/_2\varepsilon\ ;$$

poi, osservando che

$$\lim_{h=0}\frac{u_i(a+h)-u_i(a)}{h}=u'_i(a)\ ,$$

si può far impicciolire h sufficientemente perchè sia $|\sigma_\nu|<{}^1/_2\varepsilon$. Ne risulta $|\sigma_n|<\varepsilon$ per n arbitrariamente grande ed $h>0$ arbitrariamente piccolo. Ora, *fissati* ν ed h, se si fa crescere n all'infinito, si ottiene, in virtù della convergenza delle due serie considerate,

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\sum_{1}^{\infty}u'_i(a)\right|\leqq\varepsilon\ ;$$

quindi

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\sum_{1}^{\infty}u'_i(a)\ ,$$

cioè $f'(a)=u'_1(a)+u'_2(a)+u'_3(a)+\ldots..$

8. **Osservazioni**: *a)* Gli ultimi tre teoremi provvedono in parte alle lacune lasciate nei §§ 14, 18 del *cap.* I, e nel § 5 del *cap.* II, in quanto che ci segnalano infiniti casi, nei quali le regole concernenti il limite o la continuità o la derivabilità d'una somma di funzioni sussistono malgrado che queste siano in numero infinito, ma senza escludere che le regole stesse possano valere anche per altri casi.

b) Il teorema IV ci dice che una funzione discontinua non è mai rappresentabile (*cfr.* § 2, *d)* mediante una serie uniformemente convergente di funzioni *continue.* Così, per esempio, la somma della serie (2) presenta una discontinuità ordinaria a sinistra di $x=1$, e ciò basta per asserire che la serie non converge uniformemente nell'intervallo $(0,1)$; ma non bisogna credere che, inversamente, la convergenza *non uniforme* sia un sicuro *indizio di discontinuità* per la somma della serie: basti l'esempio della serie (3), che ha per somma la funzione continua x, mentre non converge uniformemente.

c) Analogamente il teorema V mostra che la convergenza uniforme della serie derivata *è sufficiente* perchè si possa affermare che la derivata della serie primitiva esiste ed è uguale alla somma delle derivate dei termini; ma la condizione stessa *non è necessaria*, poichè vi sono *) serie che si possono derivare termine a termine, quantunque non siano uniformemente convergenti le relative serie delle derivate. È poi facile dare un esempio di serie, per cui non è lecita la derivazione termine a termine. Così la serie (1) ha per somma x, e si ottiene, derivando, la relazione $1=(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\ldots$, *inesatta* per $x=1$: ciò si deve appunto alla *non uniforme* convergenza della serie del secondo membro.

---

*) Vedi un esempio nel « *Résumé du Cours d'Analyse* » di Mansion, p. 255.

www.rcin.org.pl

9. **Serie di potenze.** Ha per noi speciale importanza la rappresentazione delle funzioni mediante serie di potenze:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots \tag{5}$$

Per tali serie è fondamentale il seguente teorema: *una serie di potenze converge assolutamente ed uniformemente per tutti i valori della variabile* x, *inferiori, in valore assoluto, al numero positivo* α, *se per* $x = \alpha$ *i termini son tutti finiti.* Si osservi che la serie si può considerare come ottenuta moltiplicando per le quantità $a_0, a_1\alpha, a_2\alpha^2, \ldots$ (supposte tutte, in valore assoluto, minori d'un certo numero) i termini della serie $1 + \frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \cdots\cdots$, e siccome (§ 2, *b*) questa converge assolutamente ed uniformemente quando $|x|$ varia da 0 fino ad un numero vicino ad α quanto si vuole, ma inferiore ad α, altrettanto (§ 4) si può dire della serie proposta. Evidentemente le condizioni indicate nell'enunciato del teorema sono soddisfatte quando la serie è convergente per $x = \alpha$, perchè in tale ipotesi si ha $\lim\limits_{n=\infty} a_n \alpha^n = 0$; ma possono essere soddisfatte anche se la serie non converge, giacchè, crescendo n all'infinito, può ben darsi che $a_n \alpha^n$ rimanga finito senza tendere a zero. Ne segue che *la serie, se converge per* $x = \alpha$, *converge anche in tutto* $(-\alpha, \alpha)$, *escluso al più l'estremo inferiore*; ed è uniforme la sua convergenza nell'intervallo stesso, esclusi al più gli estremi. Ora si noti che non sempre esiste un numero $\alpha > 0$, tale che la serie sia convergente per $x = \alpha$. In questo caso risulta subito dall'ultimo teorema che la serie converge *solo per* $x = 0$ (ciò accade per la serie il cui termine generale è $n! x^n$). Può darsi invece che i numeri come α siano grandi quanto si vuole, nel qual caso la serie sarà convergente *per tutti i valori di* x (basti l'esempio della serie che ha per termine generale $x^n : n!$). Ma quando per un valore di x la serie non è convergente, l'insieme dei numeri α è necessariamente finito, e però ammette un limite superiore ρ, che può non essere un massimo. Adunque *i valori di* x, *che fanno convergere una serie procedente secondo le potenze di* x, *costituiscono un intervallo* $(-\rho, \rho)$, negli estremi del quale può nondimeno cessare la convergenza, mentre *nell'interno* questa è sempre uniforme. I due casi considerati in principio si possono includere nel caso generale: essi corrispondono alle ipotesi $\rho = 0$, $\rho = \infty$. Per le serie

$$\sum_1^\infty x^n \quad , \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \quad , \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2} \, ,$$

si ha $\rho = 1$, vale a dire che l'intervallo è $(-1, 1)$ per le tre serie; ma, mentre per la prima bisogna escludere entrambi gli estremi, e per la seconda il solo estremo superiore, soltanto la terza converge in tutto l'intervallo. In altri termini, i valori di x che rendono convergenti le tre serie son privi di minimo e di massimo nella prima serie, hanno soltanto il minimo nella seconda, ed ammettono minimo e massimo nella terza. Il numero ρ

www.rcin.org.pl

si chiama *raggio di convergenza* della serie che si considera. Dalla teoria delle serie *) si deduce agevolmente che il suo valore è

$$\rho = \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \quad \text{o} \quad \rho = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

quando esiste almeno uno di questi due limiti.

10. Passiamo ora a considerare la serie formata dalle derivate dei termini della serie (5):

$$g(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots\ldots \tag{6}$$

Il raggio di convergenza ρ' di questa serie non può essere maggiore di ρ, perchè, crescendo n, il termine generale $na_n x^{n-1}$ della serie (6) finisce sempre per superare, in valore assoluto, il termine $a_n x^n$ della serie (5). D'altra parte, preso in $(-\rho, \rho)$ un numero positivo α, minore di ρ, si ha $\lim_{n=\infty} a_n \alpha^n = 0$, giacchè la serie (5) è convergente per $x = \alpha$, e però (§ 4) la serie (6) converge assolutamente ed uniformemente, perchè si può considerare come ottenuta moltiplicando per le quantità finite $a_1, a_2\alpha, a_3\alpha^2, \ldots$ i termini della serie $1 + 2\frac{x}{\alpha} + 3\frac{x^2}{\alpha^2} + \ldots$, la cui convergenza (§ 2, *b*) è, per $|x| < \alpha$, assoluta ed uniforme. Dunque $\rho' = \rho$, vale a dire che la serie (6) ammette lo stesso intervallo di convergenza della serie (5), esclusi al più *gli estremi*, nei quali si capisce che la derivazione può far comparire la divergenza o l'indeterminazione, mentre *nell'interno* persiste inalterata la convergenza assoluta ed uniforme. In virtù di questa uniformità possiamo non solo asserire (§ 6) che la funzione $g(x)$ è continua, ma, quel che più importa, possiamo affermare (§ 7) che $g(x)$ *è la derivata di* $f(x)$; e siccome questa conclusione vale per qualunque serie di potenze, sarà lecito applicarla alle serie che si ottengono derivando successivamente, termine a termine, la serie (6), dimodochè si ha

$$f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}, \; f''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}, \; f'''(x) = \sum_3^\infty n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, \ldots$$

Da queste relazioni e dalla (5) si ricava subito, per $x = 0$,

$$f(0) = a_0 \;,\; f'(0) = a_1 \;,\; f''(0) = 2a_2 \;,\; f'''(0) = 6a_3 \;, \ldots\ldots$$

e si perviene così all'importante conclusione: *se una funzione* f(x) *è rappresentabile mediante una serie di potenze, questa è necessariamente*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots\ldots \tag{7}$$

Così noi già possediamo una regola per potere svolgere in serie di potenze una data funzione $f(x)$, ma non abbiamo ancora il diritto di applicarla, perchè ci manca un criterio che ci assicuri, volta per volta, della legittimità d'un tale sviluppo. Questa lacuna sarà colmata fra breve.

*) *Analisi algebrica*, pp. 138, 140.

www.rcin.org.pl

Formole di Taylor e di Mac-Laurin.

11. Sia $f(x)$ una funzione, dotata di derivata n^{ima} per $x=a$. La definizione della prima derivata

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

suggerisce di porre

$$f(x) = f(a) + (x-a)(f'(a) + \rho_1) ,$$

rappresentando con ρ_1 una quantità, della quale si sa soltanto che, per x tendente ad a, tende a zero. Poi si è naturalmente condotti a studiare il rapporto di ρ_1 ad $x-a$. In virtù del teorema di l'Hospital, tenendo presente la definizione di $f''(x)$, si ha, per x tendente ad a,

$$\lim \frac{\rho_1}{x-a} = \lim \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2} = {}^1/_2 \lim \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = {}^1/_2 f''(a) ,$$

e però si può scrivere

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}(f''(a) + \rho_2) ,$$

dove ρ_2 tende a zero con $x-a$. Quindi, invocando nuovamente il teorema di l'Hospital, ed utilizzando il risultato precedente,

$$\lim \frac{\rho_2}{2(x-a)} = \lim \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a) - {}^1/_2(x-a)^2 f''(a)}{(x-a)^3}$$

$$= {}^1/_3 \lim \frac{f'(x)-f'(a)-(x-a)f''(a)}{(x-a)^2} = {}^1/_6 f'''(a) .$$

Così proseguendo si perviene alla formola

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(a) + \rho_n) , \quad (8)$$

in cui ρ_n rappresenta una quantità che tende a zero quando x tende ad a.

12. Si vedrà che la formola (8), così come si trova, è sufficiente per le applicazioni geometriche e per la ricerca dei minimi e dei massimi di $f(x)$, ma non presenta alcuna utilità per gli sviluppi in serie. Per questi, infatti, ciò che importa è la conoscenza del modo di comportarsi di ρ_n, non per x tendente ad a, sì bene per n crescente all'infinito. Bisogna dunque, anche a costo di obbligare $f(x)$ ad altre condizioni, precisare maggiormente l'espressione di ρ_n, cercando di porne in luce i vincoli col simbolo funzionale f. Noi supporremo, d'ora innanzi, che la derivata n^{ima} esista, non per $x=a$ soltanto, come si è supposto nel dimostrare la (8), ma *in tutto un intervallo* (α, β), nel quale prenderemo ad arbitrio il numero a. Poniamo

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n , \quad (9)$$

www.rcin.org.pl

e cerchiamo di determinare il *resto* R_n attribuendogli la forma

$$R_n = \frac{(x-a)^\nu \varphi(x)}{(n-1)!\nu},$$

in cui ν è un numero arbitrario, positivo, e φ è una certa funzione di x, che dipende anche da n e da ν. Fissato momentaneamente un valore b in (α, β), si consideri la funzione ausiliaria

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^\nu}{(n-1)!\nu} \varphi(b).$$

In virtù di (9) si ha $F(a) = f(b)$, ed è poi visibile che $F(b) = f(b)$. Dunque la funzione $F(x)$ prende valori uguali negli estremi di (a, b), e però (II, 22) la sua derivata deve annullarsi per qualche valore ξ, appartenente al detto intervallo. Intanto un calcolo facile dà

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{\nu-1}}{(n-1)!} \varphi(b).$$

Quindi, esprimendo che questa funzione prende il valore 0 per $x = \xi$, si trova il valore di $\varphi(b)$, e finalmente si ottiene, dopo aver restituito x nel posto di b,

$$\varphi(x) = (x-\xi)^{n-\nu} f^{(n)}(\xi) \quad , \quad R_n = \frac{(x-a)^\nu (x-\xi)^{n-\nu}}{(n-1)!\nu} f^{(n)}(\xi).$$

Se, per esempio, si fa $\nu = n$, si trova la più semplice forma del resto, dovuta a Lagrangia:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Invece per $\nu = 1$, se si pone $\xi = (1-\theta)a + \theta x$, con θ compreso fra 0 ed 1, si ottiene la forma data da Cauchy:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\xi).$$

La formola (9), completata con una di queste espressioni del resto, si chiama *formola di Taylor*.

13. Data una funzione $f(x)$, e costruita l'una o l'altra espressione di R_n, se si riconosce che questa tende a zero per n infinito, si ottiene lo sviluppo di $f(x)$ in serie che procede secondo le potenze di $x - a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \cdots\cdots$$

In particolare, per $a = 0$, si ricade sullo sviluppo (7); ma noi possiamo ora, ponendo $a = 0$ in (9), scrivere con maggior precisione e generalità, anche quando $f(x)$ non è rappresentabile mediante una serie di potenze,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

www.rcin.org.pl

dove

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{o} \quad R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) .$$

Questa è la *formola di Mac-Laurin*. Siamo così giunti a possedere nell'esame di R_n, per n infinito, un mezzo per poter giudicare, volta per volta, se lo sviluppo (7) è legittimo.

14. **Osservazione.** Non si creda che basti la convergenza delle serie di Taylor o di Mac-Laurin perchè i corrispondenti sviluppi siano legittimi. Può ben darsi, per esempio, che la serie (7) sia convergente, ma non rappresenti $f(x)$. Bisogna infatti notare che R_n *non è il resto della serie*, ma è semplicemente la differenza tra $f(x)$ e la somma dei primi n termini della serie (7), e però nulla impedisce che tenda, per n infinito, ad un limite $g(x)$, non costantemente uguale a zero, nel qual caso la serie rappresenterebbe, non $f(x)$, ma $f(x)-g(x)$. Naturalmente, siccome lo sviluppo di $f(x)-g(x)$ non può aver luogo se non nell'unico modo indicato dalla (7), la $g(x)$ non è una funzione qualunque, ma è tale che deve per $x=0$ annullarsi insieme a tutte le sue derivate; ed è appunto quest'obbligo di soddisfare ad infinite condizioni che rende assai difficile l'esistenza di siffatte funzioni g. Tuttavia se ne ha un esempio semplice nella funzione *continua* $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, necessariamente uguale a zero per $x=0$. Prima si osservi, richiamando un precedente risultato (II, 31, a), che

$$g'(0) = \lim_{x=0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x=0} x^{-1} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{z=\infty} z^{\frac{1}{2}} e^{-z} = 0 .$$

È poi facile dimostrare che, se per $x=0$ è nulla la funzione $g^{(n)}$, anche $g^{(n+1)}$ è uguale a zero. Infatti le successive derivazioni di g, per $x \gtrless 0$, conducono a risultati della forma

$$g^{(n)}(x) = \sum A x^{-\alpha} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

e però

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x=0} \sum A x^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum A \lim_{z=\infty} z^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{-z} = 0 .$$

15. **Esercizii.** Premettiamo un'osservazione, che in parecchi casi riesce utile. Abbiamo detto che per esser sicuri della legittimità dello sviluppo (7) è indispensabile constatare, non che la serie converge, ma che R_n tende a zero. Orbene, sempre che si riesce ad assicurarsi che la derivata n^{ima}, pur crescendo n all'infinito, si conserva finita nell'intervallo $(0, x)$, quella condizione è soddisfatta, e lo sviluppo è legittimo. Per dimostrar ciò, poichè il valore assoluto di $f^{(n)}(\theta x)$ non può, crescendo n, superare un certo numero, basta far vedere che $x^n : n!$ tende a zero; ed effettivamente dall'eguaglianza

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{x}{n}$$

si deduce subito che il primo membro finisce per decrescere sempre in valore assoluto, appenachè n supera $|x|$, e però tende ad un limite l; poi si ha, prendendo i limiti dei due membri, $l = l.0 = 0$.

www.rcin.org.pl

a) La derivata n^{ima} di $f(x)=e^x$ è $f^{(n)}(x)=e^x$, funzione finita in ogni intervallo, qualunque sia n (giacchè *non dipende* da n). È dunque inutile esaminare l'espressione di R_n, perchè si è sicuri *a priori*, in virtù dell'ultima osservazione, che R_n tende a zero. Intanto si ha $f^{(n)}(0)=1$, e conseguentemente

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

qualunque sia x. In modo analogo si ottengono gli sviluppi seguenti:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\ ,\quad \operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$$

b) Per $f(x)=e^{x\cos a}\cos(x\operatorname{sen} a)$ e $g(x)=e^{x\cos a}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen} a)$ è noto (II, 12, *c*) che

$$f^{(n)}(x)=e^{x\cos a}\cos(na+x\operatorname{sen} a)\quad ,\quad g^{(n)}(x)=e^{x\cos a}\operatorname{sen}(na+x\operatorname{sen} a)\ ,$$

e però

$$e^{x\cos a}\cos(x\operatorname{sen} a)=1+\frac{x}{1}\cos a+\frac{x^2}{1.2}\cos 2a+\frac{x^3}{1.2.3}\cos 3a+\cdots\cdots\ ,$$

$$e^{x\cos a}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen} a)=\frac{x}{1}\operatorname{sen} a+\frac{x^2}{1.2}\operatorname{sen} 2a+\frac{x^3}{1.2.3}\operatorname{sen} 3a+\cdots\cdots\ .$$

Queste formole includono le precedenti per $a=0$ ed $a={}^1/_2\pi$. Si trovano poi gli sviluppi di $e^x\cos x$ e di $e^x\operatorname{sen} x$ facendo $a={}^1/_4\pi$; *ecc.*

c) Per sviluppare in serie la funzione $y=\operatorname{arctg} x$ rammentiamoci (II, 12, *c*) che la derivata n^{ima} è $(n-1)!\cos^n y\operatorname{sen} n(y+{}^1/_2\pi)$. Il resto nella serie di Mac-Laurin, sotto la forma data da Lagrangia, è il prodotto di $\frac{x^n}{n}$ per una quantità che si conserva finita senza tendere a zero, e però tende a zero solo nel caso che il valore assoluto di x non superi l'unità. In questa ipotesi, osservando che $f^{(n)}(0)=(n-1)!\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, la formola di Mac-Laurin dà

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots$$

d) Per $f(x)=\log(1+x)$ si ottiene

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\quad ,\quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ .$$

Quindi

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n\ ,$$

dove

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n\quad \text{o}\quad R_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\ .$$

Per $x>1$, come per $x\leqq -1$, possiamo dispensarci dall'esaminare le espressioni del resto, giacchè si vede direttamente che in questi casi la serie non converge. Quando x si suppone non maggiore di 1, ma positivo, il rapporto $x:(1+\theta x)$ è inferiore ad $x\leqq 1$, e però la sua potenza n^{ima} si conserva finita mentre $\frac{1}{n}$ tende a zero. Ne segue, adoperando la prima forma del resto, $\lim R_n=0$. Invece

www.rcin.org.pl

per x maggiore di -1, ma negativo, si deve ricorrere alla seconda forma del resto, perchè la prima non lascia vedere come si comporta R_n per n infinito. Ora, poichè i rapporti $1:(1+\theta x)$ ed $(1-\theta):(1+\theta x)$ si mantengono inferiori rispettivamente ad $1:(1+x)$ e ad 1, mentre x^n tende a zero, è chiaro che, anche in questo caso, $\lim R_n = 0$. Adunque nell'intervallo $(-1, 1)$, escluso l'estremo inferiore,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots$$

Cambiando x in $-x$ si ottiene lo sviluppo

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots,$$

che vale nel medesimo intervallo, escluso l'estremo superiore; poi si giunge, sommando, alla formola

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots,$$

vera nell'intervallo $(-1, 1)$, gli estremi esclusi.

e) Quantunque costretti ad astenerci, in tutto questo corso, dal considerare numeri immaginarii, qui crediamo utile far notare le relazioni che l'uso di tali numeri stabilisce fra i varii simboli funzionali, più comunemente adoperati. Così, se si estende *) il significato di e^x al caso d'un esponente immaginario, convenendo che la funzione continui ad essere rappresentata dal suo sviluppo in serie, si ottiene, dopo aver cambiato x in ix, ed avvertendo che $i^2 = -1$,

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots = \cos x + i \operatorname{sen} x\ .$$

Nello stesso modo si trovano le relazioni

$$\cos ix = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad , \quad \operatorname{sen} ix = \frac{i}{2}(e^x - e^{-x})\ .$$

Similmente, dopo aver notata l'analogia fra lo sviluppo di $\operatorname{arctg} x$ e la formola ottenuta in fine del precedente esercizio, si vede subito che

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}\ .$$

In virtù di questa relazione, e delle altre che se ne possono dedurre per $\operatorname{arcsen} x$ ed $\arccos x$, si suole, in analisi, considerare le funzioni circolari inverse come appartenenti alla classe delle funzioni logaritmiche.

f) Quando non si rifugge dall'uso degli immaginarii, le formole precedenti ne possono fornire altre, interessantissime; ma i risultati ai quali si perviene con queste illecite applicazioni, alle variabili complesse, di formole stabilite non senza una certa difficoltà per le variabili reali, vanno sempre accolti con diffidenza; e per legittimarli occorre una verifica diretta, eseguita rimanendo nel campo dei numeri reali, a meno che non si voglia riprendere lo studio dei principii del Cal-

*) Per maggiori dettagli vedi « *Analisi algebrica* » p. 312.

www.rcin.org.pl

colo *), ponendosi fin dall'inizio nel campo dei numeri complessi. Limitiamoci a far vedere come si possa utilizzare lo sviluppo di $\log(1+x)$ per trovare le funzioni rappresentate dalle serie

$$\cos x + {}^1/_2 \cos 2x + {}^1/_3 \cos 3x + \ldots\ldots \quad , \quad \operatorname{sen} x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots\ldots$$

Se u e v sono queste funzioni, da

$$u + iv = \sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{nix} = -\log(1 - e^{ix}) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cot \frac{x}{2}\right)$$

si deduce $e^u \cos v = \frac{1}{2}$, $e^u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$; poi

$$u = -\log\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) \quad , \quad v = {}^1/_2(\pi - x) \ .$$

Queste formole valgono nell'intervallo $(0, 2\pi)$, esclusi gli estremi; ma il calcolo precedente nulla ci dice in proposito. Ai medesimi risultati si perviene, con un po' più di rigore, ma in un intervallo troppo ristretto, sostituendo a $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$ le loro espressioni in funzione di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$. Così, per esempio, se si fa uso della nota formola

$$\operatorname{sen} nx = \frac{n}{1} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \operatorname{sen}^3 x . \cos^{n-3} x + \ldots\ldots ,$$

si trova, prendendo x nell'intervallo $({}^1/_2\pi, {}^3/_2\pi)$,

$$v = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}^3 x}{(1 - \cos x)^3} + \ldots\ldots = \operatorname{arc\,tg}\left(\cot \frac{x}{2}\right) = {}^1/_2(\pi - x) \ .$$

Simili calcoli, quantunque non rigorosi, sono ammissibili come provvisorii *mezzi d'investigazione*: essi vengono spesso adoperati in segreto da molti che in palese li disprezzano, e che ignorano, forse, l'opinione di Leibnitz, di non doversi cioè « porre ostacolo con soverchia scrupolosità all'arte d'inventare ».

g) Molto importante è lo sviluppo di $f(x) = (1+x)^m$, già noto dall'Algebra nel caso di m intero e positivo. Si trova subito

$$f^{(n)}(x) = m(m-1) \ldots\ldots (m-n+1)(1+x)^{m-n} ;$$

quindi

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots\ldots ,$$

purchè x ed m sian tali che $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. Per abbreviare la discussione di R_n vogliamo prima di tutto indagare per quali valori di x e di m converge la serie precedente. A questa, che si chiama *serie binomiale*, giova dar la forma

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots\ldots ,$$

---

*) L'esposizione elementare, ed in pari tempo rigorosa, di tali principii, fatta nel modo che qui si accenna, si trova nel « *Résumé du Cours d'Analyse* » di Mansion. Vedi anche i « *Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire* » del medesimo Autore (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1885-86).

www.rcin.org.pl

ponendo

$$a_n = \left(1 - \frac{\mu}{1}\right)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\left(1 - \frac{\mu}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{\mu}{n}\right),$$

dove $\mu = m + 1$. Così, crescendo n, i coefficienti a_n finiscono per esser tutti dello stesso segno, perchè

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{n-\mu} \quad , \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 .$$

Ne segue subito (§ 9) che il raggio di convergenza è 1, dimodochè ci resta soltanto da esaminare le condizioni per la convergenza negli estremi dell'intervallo $(-1, 1)$. Nell'estremo inferiore la serie diventa $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots$; e poichè

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{n}{n-\mu} - 1\right) = \lim_{n=\infty} \frac{n\mu}{n-\mu} = \mu ,$$

essa converge *) per $m > 0$ (ed anche per $m = 0$), ma diverge per $m < 0$. Nell'estremo superiore la serie diventa $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots\ldots$, e però i suoi termini finiscono per essere a segni alternati. Ne segue che la serie non converge se si finisce per avere $a_n \geqq a_{n-1}$: ciò accade per $m \leqq -1$. Essa converge invece per $m > -1$, perchè **) in tale ipotesi, oltre ad essere $a_n < a_{n-1}$ per n sufficientemente grande, è $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. Infatti, *fissato* $\nu > m$, si ha

$$\frac{a_\nu}{a_n} > \left(1 + \frac{\mu}{\nu+1}\right)\left(1 + \frac{\mu}{\nu+2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\mu}{n}\right) > 1 + \left(\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\mu ;$$

poi, ricordando ***) la divergenza della serie armonica, $\lim (a_\nu : a_n) = \infty$, per n infinito; e finalmente $\lim a_n = 0$. Dunque, riassumendo, *l'intervallo di convergenza della serie binomiale è* $(-1, 1)$; *ma bisogna escludere entrambi gli estremi se* m *non supera* -1, *ed il solo estremo inferiore quando* m, *pur superando* -1, *è negativo.* Ciò premesso, dimostriamo che, crescendo n all'infinito, il resto R_n (da non confondere col *resto* della serie) tende a zero tutte le volte che la serie considerata è convergente. Prendiamo questo resto (in cui per comodo si cambia n in $n+1$) sotto la forma datagli da Cauchy:

$$R_{n+1} = \pm mx(1 + \theta x)^{m-1} . \alpha_n x^n . \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n .$$

Si è posto

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{m}{1}\right)\left(1 - \frac{m}{2}\right)\left(1 - \frac{m}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{m}{n}\right),$$

dimodochè $\pm \alpha_n x^n$ è il termine generale della serie binomiale, relativa all'esponente $m - 1$, serie convergente per $|x| < 1$, qualunque sia m, ed anche per $x = -1$ ed $m \geqq 1$, come per $x = 1$ ed $m > 0$. In tutti questi casi R_{n+1} si trova decomposto in tre fattori, dei quali il primo ed il terzo restano finiti (giacchè $1 - \theta \leqq 1 + \theta x$), ed il secondo tende a zero, come termine generale d'una serie convergente. Ci resta da esaminare soltanto i casi nei quali non è convergente la seconda serie, mentre converge la prima; e questi sono due, corrispondenti alle

---

*) « *Analisi algebrica* » p. 138-139.

**) « *Analisi algebrica* » p. 128.

***) « *Analisi algebrica* » p. 118.

www.rcin.org.pl

ipotesi $x=-1$ con $0\leqq m<1$, ed $x=1$ con $-1<m\leqq 0$. Messo da parte il caso ovvio $m=0$, si vede, per $x=-1$, che

$$\frac{1}{\alpha_n}>\left(1+\frac{m}{1}\right)\left(1+\frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{m}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{m}{n}\right)>1+m\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right);$$

quindi $\lim \alpha_n=0$. Invece per $x=1$ si ha

$$\alpha_n>1-m\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\quad,\quad \lim_{n=\infty}\alpha_n=\infty\ ,$$

e però bisogna adoperare l'altra forma del resto, cioè $\pm(1+\theta)^{m-n}a_n$: questa lascia subito vedere che $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$.

16. Altre utili applicazioni si possono fare della formola di Taylor al calcolo delle serie numeriche. Data una serie $u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots$ a termini positivi decrescenti, immaginiamo una funzione $f(x)$, che vada sempre decrescendo, al crescere di x, assumendo per $x=1,2,3,\ldots\ldots$ i valori $u_1, u_2, u_3,\ldots$; e supponiamo che della $f(x)$ si conosca una funzione primitiva $F(x)$. Questa va sempre crescendo con x, perchè (II, 19) la sua derivata è positiva, e però (I, 14) tende, per x infinito, ad un limite finito o infinito. Intanto, se con α e β rappresentiamo certi due numeri degli intervalli $(n-1, n)$ ed $(n, n+1)$, si ha

$$F(n)-F(n-1)=f(\alpha)\quad,\quad F(n+1)-F(n)=f(\beta)\quad,\quad f(\alpha)>u_n>f(\beta)\ ;$$

quindi

$$F(n+1)-F(1)<u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n<F(n)-F(0)\ .$$

Ne segue che *la serie* $u_1+u_2+u_3+\ldots$ *è convergente o divergente, secondo che* F(x) *tende, per* x *infinito, ad un limite finito o all'infinito.* Infatti, nel primo caso, la somma dei suoi primi n termini si mantiene, crescendo, inferiore ad $F(n)-F(0)$, che ammette, per ipotesi, un limite finito; nel secondo caso la detta somma, sempre superiore ad $F(n+1)-F(1)$, che cresce indefinitamente insieme ad n, deve *a fortiori* oltrepassare ogni limite. Questo notevole *criterio di convergenza* è dovuto a Cauchy.

17. Ora la formola di Taylor ci offre il mezzo di addentrarci sempre più nello studio della serie data, anche quando i termini non si seguono decrescendo. Prima di tutto vogliamo dimostrare il seguente teorema di Franel *): *se, crescendo* x *all'infinito, la derivata di* f(x), *supposta unica, tende a zero conservando un certo segno, e decrescendo in valore assoluto, l'espressione*

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+{}^1/_2\,u_n-F(n) \tag{10}$$

tende, per n *infinito, ad un limite finito* l. Infatti a questa espressione si può sempre dar la forma $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n$ ponendo

$$v_n=F(n-1)-F(n)+{}^1/_2(f(n-1)+f(n))\ ;$$

*) « *Intermédiaire des Mathématiciens* » t. I, p. 234.

www.rcin.org.pl

e d'altra parte, se si applica la (9), adoperando la prima forma del resto, si ottiene

$$F\left(n-\frac{1}{2}\right)=F(n-1)+\frac{1}{2}f'(n-1)+\frac{1}{8}f''(\alpha)\ ,$$

$$F\left(n-\frac{1}{2}\right)=F(n)-\frac{1}{2}f'(n)+\frac{1}{8}f''(\beta)\ ,$$

dove α e β rappresentano certi due numeri, presi rispettivamente nella metà inferiore e nella metà superiore dell'intervallo $(n-1, n)$. Ne segue subito, eguagliando fra loro i due precedenti valori di $F\left(n-\frac{1}{2}\right)$,

$$v_n=-{}^1/_8 f''(\alpha)+{}^1/_8 f''(\beta)\ .$$

Così $v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots$ ci si presenta, almeno da un certo termine in poi, sotto la forma d'una serie a termini alternativamente positivi e negativi, che vanno decrescendo in valore assoluto, e tendono a zero. Dunque $v_1+v_2+v_3+\ldots$ è una serie convergente, e la sua somma l rappresenta appunto il limite dell'espressione (10). Ciò premesso, se si osserva che la somma $v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots$ resta sempre compresa fra 0 e $-{}^1/_8 f''(n)$, si può scrivere

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=F(n)+\frac{1}{2}f'(n)+\frac{\theta}{8}f''(n)+l\ , \qquad (11)$$

dove θ è un numero dell'intervallo $(0, 1)$. Questa formola è molto utile per la valutazione approssimata di talune somme; ma in ciascun caso converrà studiare direttamente $v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots$ per ottenere una maggiore approssimazione. Del resto, nel caso generale, la formola di Taylor può fornire uguaglianze analoghe alla (11), sempre più precise; ed infatti basta prendere due soli termini di più, nella detta formola, per essere condotti a sostituire $\frac{\theta}{8}f''(n)$ con $\frac{1}{12}f''(n)\pm\frac{\theta}{192}f''''(n)$, in (11), purchè le ipotesi già fatte per f'' si trasportino ad f''''.

18. **Esempii**: *a)* Mediante il criterio di Cauchy, dimostrato nel § 16, si riesce a constatare in modo assai rapido la divergenza delle serie, definite dai termini generali

$$\frac{1}{n}\ ,\quad \frac{1}{n\log n}\ ,\quad \frac{1}{n\log n\log\log n}\ ,\ \ldots\ldots\ .$$

Basta osservare che, per n infinito, queste funzioni tendono a zero decrescendo, e che ammettono le funzioni primitive

$$\log n\ ,\quad \log\log n\ ,\quad \log\log\log n\ ,\ \ldots\ldots\ ,$$

indefinitamente crescenti con n. Dal teorema di Franel, dimostrato nel § 17, possiamo avere altre indicazioni sulle serie precedenti. Per esempio, esiste il numero

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right),$$

che si rappresenta abitualmente con C, e si chiama *costante di Eulero*. Per

www.rcin.org.pl

altre vie si riesce a calcolarne il valore: 0,5772156649015328..... Poi dalla (11) si possono avere, per ogni n, due valori della somma $1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$, approssimati per difetto ($\theta=1$) e per eccesso ($\theta=0$).

b) Se $u_n=\log n$, si può prendere $F(n)=n\log n-n$, giacchè la derivata di $x\log x-x$ è $\log x$. Il numero

$$\lim_{n=\infty}\left(\log(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n+n\right)$$

esiste, in virtù del teorema di Franel, ed in seguito si vedrà che il suo valore è $\log\sqrt{2\pi}$. Ora dalla (11) già potremmo dedurre $n!$; ma per approssimarci maggiormente al vero valore osserviamo che

$$-v_n=-1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\log\frac{n}{n-1}=\frac{1}{3(2n-1)^2}+\frac{1}{5(2n-1)^4}+\frac{1}{7(2n-1)^6}+\ldots,$$

d'onde

$$0<-v_n<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n-1)^4}+\ldots\ldots\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),$$

e per conseguenza

$$0<-(v_{n+1}+v_{n+2}+v_{n+3}+\ldots)<\frac{1}{12n}.$$

Si ottiene dunque $\log(n!)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{\theta}{12n}+\log\sqrt{2\pi}$, e finalmente, ricavando $n!$, si giunge all'importante *formola di Stirling*:

$$1.2.3\ldots n=\sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

Valutazione assintotica delle serie di potenze.

19. Se il rapporto di due funzioni tende ad 1 quando la variabile indipendente cresce all'infinito, o pure quando, nel tendere di questa ad un limite finito, le funzioni vanno crescendo oltre ogni limite, si dice che una delle funzioni è *assintotica* all'altra. Se, dopo aver trovata una funzione φ_0, assintotica ad una data f, si riesce a trovarne un'altra φ_1, assintotica ad $f-\varphi_0$, poi un'altra φ_2, assintotica ad $f-\varphi_0-\varphi_1$, e così via, si ottiene la rappresentazione assintotica della funzione data: $f=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots$ Questa eguaglianza va intesa in un senso convenzionale, come quella che riassume le seguenti, il cui senso preciso ci è noto:

$$\lim\frac{f(x)}{\varphi_0(x)}=1\quad,\quad\lim\frac{f(x)-\varphi_0(x)}{\varphi_1(x)}=1\quad,\quad\lim\frac{f(x)-\varphi_0(x)-\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=1\ ,\ldots$$

Evidentemente le funzioni $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\ldots\ldots$ sono tali, che il rapporto di ciascuna alla precedente ha per limite 0, dimodochè, se nel costruire successivamente le funzioni φ si perviene ad una costante, le funzioni seguenti hanno tutte 0 per limite. Ora noi vogliamo specialmente occuparci delle funzioni rappresentabili mediante una serie di potenze in un intervallo fi-

www.rcin.org.pl

nito $(-\rho, \rho)$. Già sappiamo che queste funzioni sono continue, ed anzi derivabili per $|x| < \rho$, ma ignoriamo ancora ciò che accade per $x = \pm\rho$; ed è appunto dal modo di comportarsi d'una serie negli estremi dell'intervallo di convergenza che si può spesso trarre profitto per valutarne assintoticamente la somma in prossimità degli estremi stessi. D'altra parte si vedrà che, in certe questioni, la conoscenza di siffatte espressioni assintotiche può tener luogo di quella della somma esatta, quasi sempre inaccessibile.

20. Premettiamo il seguente teorema: *se in un estremo dell'intervallo di convergenza una serie di potenze è divergente, la funzione rappresentata dalla serie cresce oltre ogni limite quando la variabile indipendente tende dall'interno dell'intervallo verso l'estremo che si considera.* Per fissar meglio le idee, e per semplificare le dimostrazioni, considereremo sempre l'estremo superiore ρ, e supporremo $\rho = 1$: ciò è lecito, perchè basta cambiare x in ρx nella serie proposta per ridurre ad 1 il raggio di convergenza. Sia

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots \quad , \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \infty \ ,$$

cambiando, se occorre, i segni di tutti i coefficienti. Si tratta di far vedere che, dato un numero l, arbitrariamente grande, $f(x)$ diventa e resta maggiore di l, appena x supera un certo numero, sufficientemente vicino ad 1. Preso $l' > l$, si approfitti della divergenza della serie $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ per determinare ν in modo che, per $n > \nu$, la somma $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ sia maggiore di l', e si osservi che, per x compreso fra 0 ed 1,

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu+1}) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu+2})x + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu+3})x^2 + \cdots > \frac{l'}{1-x} \ ,$$

ossia

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu) + a_{\nu+1} + a_{\nu+2}x + a_{\nu+3}x^2 + \cdots > l' \ .$$

Intanto il primo membro, moltiplicato per $x^{\nu+1}$, non differisce da

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu)x^{\nu+1} - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_\nu x^\nu) + f(x) \ .$$

Dunque

$$f(x) > a_0(1 - x^{\nu+1}) + a_1(x - x^{\nu+1}) + \cdots + a_\nu(x^\nu - x^{\nu+1}) + l' x^{\nu+1} \ .$$

Ora, *fissato* ν, se si fa tendere x ad 1, il secondo membro tende ad l', e però finisce per mantenersi superiore al dato numero $l < l'$; ed *a fortiori* si avrà $f(x) > l$. Dunque $\lim\limits_{x=1} f(x) = \infty$.

21. *Se due serie di potenze, a coefficienti positivi, sono divergenti per uno stesso valore* $x = \rho$, *estremo del comune intervallo di convergenza, e se, crescendo* n *indefinitamente, il rapporto dei coefficienti* n^{imi} *tende ad un limite, anche il rapporto delle funzioni rappresentate dalle due serie tende allo stesso limite quando* x *tende a* ρ. È questo il teorema su cui si fonda la determinazione assintotica delle serie di potenze. Ridotto ad 1 il raggio di convergenza, se si osserva che le funzioni

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots \quad , \quad \psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\cdots$$

www.rcin.org.pl

debbono, in virtù del teorema precedente, diventare infinite quando x tende ad 1, si vede che la proposizione enunciata è, per così dire, il teorema di l'Hospital (II, 29, b) delle serie di potenze. Del resto si noti che, nel caso attuale, l'applicazione del teorema di l'Hospital non condurrebbe a nulla, perchè le derivate delle funzioni φ e ψ si presentano nuovamente sotto la forma di serie di potenze, divergenti per $x=1$. Ciò premesso, supponiamo che, almeno a partire da un certo valore di n, i coefficienti a_n e b_n siano positivi, ed ammettiamo l'esistenza, per n infinito, del limite l del loro rapporto, dimodochè, dato arbitrariamente il numero positivo ε, si possa trovare un numero ν, tale che per $n>\nu$ sia sempre

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon\ ,$$

cioè a_n compreso fra $(l-\varepsilon)b_n$ ed $(l+\varepsilon)b_n$. Ne segue anche (per $x>0$)

$$\left|\frac{a_{\nu+1}+a_{\nu+2}x+a_{\nu+3}x^2+\cdots}{b_{\nu+1}+b_{\nu+2}x+b_{\nu+3}x^2+\cdots}-l\right|<\varepsilon\ .$$

D'altra parte, *fissato* ν, poichè $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ oltrepassano ogni limite quando x tende ad 1, il rapporto

$$\frac{1-\dfrac{1}{\psi(x)}(b_0+b_1x+\cdots+b_\nu x^\nu)}{1-\dfrac{1}{\varphi(x)}(a_0+a_1x+\cdots+a_\nu x^\nu)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{b_{\nu+1}+b_{\nu+2}x+b_{\nu+3}x^2+\cdots}{a_{\nu+1}+a_{\nu+2}x+a_{\nu+3}x^2+\cdots}\ ,$$

tende ad 1. Dunque, per ogni numero positivo ε, si potrà trovare alla sinistra di 1 un intervallo sufficientemente piccolo, perchè si abbia

$$(l-\varepsilon)(1-\varepsilon')<\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}<(l+\varepsilon)(1+\varepsilon')$$

per tutti i valori di x, presi nel detto intervallo. Ne segue che, se si dà arbitrariamente il numero positivo η, si può, per gli stessi valori di x, avere

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-l\right|<\eta\quad,\quad \text{e però}\quad \lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=l\ ,$$

prendendo, per esempio, $\varepsilon=l\varepsilon'={}^1/_3\eta<l$.

22. Ora siamo in grado di completare ciò che si è detto circa la continuità delle serie di potenze nell'intervallo di convergenza, giacchè possiamo aggiungere che *anche negli estremi*, se in essi converge, la serie rappresenta una funzione continua. In altri termini: *se in un estremo dell'intervallo di convergenza una serie di potenze ha la somma l, la funzione rappresentata dalla serie tende ad l quando la variabile indipendente tende dall'interno dell'intervallo verso l'estremo che si considera.* Questo importante teorema, dovuto ad Abel, si trova già completato dal teorema del § 20. Sia

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\quad,\quad a_0+a_1+a_2+\cdots=l\ .$$

www.rcin.org.pl

Si può sempre supporre $l > 0$, perchè, se fosse $l < 0$, basterebbe cambiare il segno a tutti i coefficienti, per ricadere nel caso precedente; e se fosse $l = 0$ si potrebbe cambiare il valore di a_0. Ora si consideri la funzione

$$\varphi(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots\dots .$$

Poichè i coefficienti, almeno a partire da un certo termine, son tutti positivi, si può applicare il teorema del precedente paragrafo alla funzione φ ed all'altra: $\psi = 1 + x + x^2 + \dots\dots$ Si ottiene

$$\lim_{x=1}(1-x)\varphi(x) = \lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \quad , \quad \text{cioè} \quad \lim_{x=1} f(x) = l .$$

23. **Osservazione.** Non si creda che il teorema di Abel sia evidente. Si noti, infatti, che in esso si afferma l'eguaglianza fra i valori di due quantità, sostanzialmente diverse nel significato:

$$\lim_{x=1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad , \quad \lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 + \dots + a_n) .$$

Inoltre il detto teorema ci dà come sicura l'esistenza del primo di questi limiti quando esiste il secondo; ma può ben darsi che questo non esista quando esiste il primo. Eccone un esempio semplicissimo:

$$\lim_{x=1}(1 - x + x^2 - \dots) = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{n=\infty}(1 - 1 + \dots \pm 1) \quad \text{non esiste.}$$

Del resto per altre serie il teorema non regge, giacchè i numeri

$$\lim_{x=a}(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots) \quad , \quad \lim_{n=\infty}(u_0(a) + u_1(a) + \dots + u_n(a))$$

possono esistere entrambi, senza essere uguali. Per esempio

$$\lim_{x=1}((x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \dots) = 1 \quad , \quad \lim_{n=\infty}(0 + 0 + \dots + 0) = 0 .$$

24. **Applicazioni ed esempii**: *a)* Col teorema di Abel abbiamo acquistato quanto ancora ci mancava per arrivare, in modo assai più rapido, alla conoscenza completa di certi sviluppi in serie, evitando l'uso della formola di Mac-Laurin. Così, per isvolgere in serie di potenze $\log(1+x)$ ed $\operatorname{arctg} x$ basta osservare che le derivate di queste funzioni sono

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots\dots \quad , \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots\dots ,$$

e che le funzioni stesse si annullano per $x = 0$, per potere scrivere, in base alle sole indicazioni del § 10,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\dots \quad , \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\dots ,$$

in ogni intervallo $(-\alpha, \alpha)$, con α vicino quanto si vuole (ma inferiore) ad 1. Ora il teorema di Abel ci autorizza ad estendere gli ultimi risultati anche al caso di $\alpha = 1$, subordinatamente alla sola condizione che le serie restino convergenti: ciò accade per $x = 1$ nella prima serie, e per $x = \pm 1$ nella seconda. Dunque

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\dots \quad , \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\dots .$$

www.rcin.org.pl

b) In modo analogo si può determinare la somma della serie binomiale

$$f(x)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

per *tutti* i valori di x e di m, per i quali la serie stessa è convergente. Infatti si ha

$$f'(x)=m\left(1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\right);$$

poi, moltiplicando i due membri per $1+x$, ed osservando che

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}+\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{n!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!},$$

si ottiene $(1+x)f'(x)=mf(x)$, ossia $f'(x):f(x)=m:(1+x)$. Il primo membro è visibilmente la derivata di $\log f(x)$, il secondo è la derivata di $m\log(1+x)$, e però queste funzioni possono differire solo per una costante, la quale, del resto, è nulla, perchè tali sono, per $x=0$, le due funzioni. Dunque $f(x)=(1+x)^m$.

c) Due esempii di sviluppi assintotici, nel caso d'una variabile intera, crescente all'infinito, ci sono già noti dal § 18:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\log n+C+\cdots,$$

$$\log(n!)=n\log n-n+{}^1/_2\log n+\log\sqrt{2\pi}+\cdots\cdots$$

Dal secondo è facile dedurre una proprietà, utile a ricordare per l'uso che spesso ne faremo: *il coefficiente di* x^n *nello sviluppo di* $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ *è assintotico ad* $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Infatti si ha

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}=\frac{1.2.3\ldots2n}{(2.4.6\ldots2n)^2}=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=\frac{e^{\frac{\theta-4\theta'}{24n}}}{\sqrt{\pi n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\cdots\cdots,$$

in virtù della formola di Stirling; ossia

$$\lim_{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

d) Ora vogliamo utilizzare il teorema del § 21 per valutare assintoticamente la funzione $f(x)=x+x^4+x^9+\cdots\cdots$, manifestamente divergente per $x=1$, ma convergente a sinistra di 1. Prima consideriamo la funzione

$$\varphi(x)=[\sqrt{1}]x+[\sqrt{2}]x^2+[\sqrt{3}]x^3+\cdots+[\sqrt{n}]x^n+\cdots\cdots,$$

legata ad $f(x)$ dalla relazione evidente $(1-x)\varphi(x)=f(x)$, e paragoniamola all'altra

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}x+\frac{3.5}{2.4}x^2+\frac{3.5.7}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots,$$

in cui il coefficiente di x^n è

$$\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots2n}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}(2n+1)=\frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}}+\cdots=2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}+\cdots\cdots.$$

www.rcin.org.pl

Il limite del rapporto dei coefficienti di x^n nelle due serie ha dunque il valore

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim_{n=\infty}\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Ne segue, in virtù del teorema invocato,

$$\lim_{x=1}\frac{\varphi(x)}{(1-x)^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x=1}\frac{f(x)}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,$$

e però si può scrivere l'eguaglianza

$$x+x^4+x^9+\cdots=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\,,$$

assintoticamente vera a sinistra di 1. Proseguendo il calcolo si può giungere ad ottenere nel secondo membro, senza gravi difficoltà, l'espressione più approssimata

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sqrt{\pi(1-x)}+\cdots\cdots$$

Al medesimo risultato si perviene direttamente quando si conosce una certa proprietà *) di $f(x)$, che noi qui proponiamo come esercizio al lettore, quantunque non si sappia stabilire con mezzi elementari, quali son quelli di cui attualmente disponiamo:

$$\left(\frac{1}{2}+x+x^4+x^9+\cdots\cdots\right)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}+x'+x'^4+x'^9+\cdots\cdots\right)\left(\log\frac{1}{x'}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

I numeri x ed x', presi fra 0 ed 1, si suppongono vincolati dalla relazione $\log\frac{1}{x}\log\frac{1}{x'}=\pi^2$. In virtù di questa x' tende a zero quando x tende ad 1, nella quale ipotesi si ottiene subito

$$\lim(x+x^4+x^9+\cdots)\sqrt{1-x}=\tfrac{1}{2}\lim\left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-x}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim\sqrt{\frac{1-x}{\log\frac{1}{x}}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

e) La serie $f(x)=x-x^4+x^9-\cdots\cdots$ non converge per $x=1$, ma ciò non toglie che la sua somma possa tendere ad un limite quando x tende ad 1 crescendo. Per trovare questo limite si osservi che nella serie

$$\frac{f(x)}{1-x}=x+x^2+x^3+x^9+x^{10}+\cdots+x^{15}+x^{25}+x^{26}+\cdots\cdots$$

il coefficiente di x^n è $a_n=1$ o $a_n=0$, secondo che il massimo intero contenuto in $\sqrt{n}$, ossia $\nu=[\sqrt{n}]$, è dispari o pari. Un calcolo facile dà

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{1-(-1)^\nu}{2}(n+1)+\frac{(-1)^\nu}{2}\nu(\nu+1)\,;$$

poi, osservando che $0\leqq n-\nu^2\leqq 2\nu$, si ottiene

$$\lim\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n+1}=\frac{1}{2}\pm\lim\frac{n-\nu^2}{2n}=\frac{1}{2}\,.$$

---

*) Cauchy: «*Mémoire sur la théorie des nombres*» (1830, p. 614).

www.rcin.org.pl

Ciò premesso, basta paragonare la serie

$$\varphi(x) = a_1 x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots\cdots$$

con

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots ,$$

per vedere che si ha $\lim\limits_{x=1}(1-x)^2\varphi(x) = \frac{1}{2}$. Del resto $(1-x)^2\varphi(x) = f(x)$. Dunque

$$\lim_{x=1}(x - x^4 + x^9 - x^{16} + \cdots\cdots) = \frac{1}{2} .$$

f) Data a valutare la funzione $f(x) = x + {}^1/_2 x^4 + {}^1/_3 x^9 + \cdots$, conviene considerare le serie

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-x} \quad , \quad \psi(x) = \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} ,$$

nelle quali i coefficienti di x^n sono

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} \quad , \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} ,$$

continuando a rappresentare con ν il massimo intero contenuto in $\sqrt{n}$. Il limite del rapporto di questi coefficienti è $\lim\limits_{n=\infty}(\log\nu : \log n) = \frac{1}{2}$, e però $f(x)$ è assintotica ad $\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-x}$. Per andare più oltre si consideri la funzione

$$f(x) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots ,$$

in cui

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}C + \log\frac{\nu}{\sqrt{n}} + \cdots\cdots ,$$

e conseguentemente $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots = {}^1/_2 C$; quindi, in virtù del teorema di Abel,

$$\lim_{x=1}\left(f(x) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}C .$$

Al primo membro si può dare un'altra forma osservando che, per x tendente ad 1,

$$\lim\log\frac{\log\frac{1}{x}}{1-x} = \log\lim\frac{\log\frac{1}{x}}{1-x} = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad \lim\left(\log\log\frac{1}{x} + \log\frac{1}{1-x}\right) = 0 .$$

Possiamo dunque scrivere, a sinistra dell'unità, l'eguaglianza assintotica *)

$$x + {}^1/_2 x^4 + {}^1/_3 x^9 + \cdots = -{}^1/_2\log\log\frac{1}{x} + {}^1/_2 C .$$

g) La funzione $f(x) = 1^{\mu-1}x + 2^{\mu-1}x^2 + 3^{\mu-1}x^3 + \ldots$ prende per $x = 1$ il valore finito $1^{\mu-1} + 2^{\mu-1} + 3^{\mu-1} + \cdots\cdots$ quando μ è negativo, ed invece cresce indefinitamente a sinistra di 1 nel caso opposto, cioè per $\mu \geqq 0$. Siccome si sa che $f(x) = -\log(1-x)$ per $\mu = 0$, ci resta da esaminare ciò che avviene nel

*) Sonin: « *Sur les polynômes de Bernoulli* » (Giornale di Crelle, t. 116, p. 147).

www.rcin.org.pl

caso di μ positivo. Qui bisogna richiamare *) la definizione della *funzione gamma*

$$\Gamma(\mu)=\lim_{n=\infty}\frac{n!\,n^{\mu-1}}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots\ldots(\mu+n-1)},$$

ed è utile ricordare, perchè ci avverrà di servircene in seguito, la proprietà

$$\mu\Gamma(\mu)=\Gamma(\mu+1),$$

in virtù della quale, essendo $\Gamma(1)=1$, è pure $\Gamma(\mu+1)=\mu!$ quando μ è intero. Inoltre

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n=\infty}\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)=1.3.5\ldots(2\mu-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu}}.$$

Tornando alla questione, se si paragona $f(x)$ con

$$(1-x)^{-\mu}=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots,$$

si vede subito che il rapporto dei coefficienti di x^n tende appunto a $\Gamma(\mu)$, per n infinito, e però

$$\lim_{x=1}(1^{\mu-1}x+2^{\mu-1}x^2+3^{\mu-1}x^3+\ldots)(1-x)^{\mu}=\Gamma(\mu).$$

Discussione delle funzioni.

25. Fra le più importanti applicazioni della formola di Taylor è la ricerca dei minimi e dei massimi delle funzioni. Già si è visto (II, 21) che, se per $x=a$ la funzione $f(x)$, a derivata unica $f'(x)$, passa per un minimo o per un massimo, è $f'(a)=0$. Ora supponiamo che a annulli le successive derivate di $f(x)$, fino alla n^{ima} esclusa, o, come si suol dire, che a sia una radice multipla di $f'(x)$, dell'ordine $n-1$. Dalla formola di Taylor, presa sotto la prima forma (§ 11), si deduce

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(a)+\rho_n).$$

Quando x tende ad a, la quantità fra parentesi tende ad $f^{(n)}(a)$, e però $f(x)-f(a)$ finisce per assumere e conservare il segno di $(x-a)^n f^{(n)}(a)$. Questo segno varia con quello di $x-a$ se n è dispari, ma resta invariato e coincide col segno di $f^{(n)}(a)$ se n è pari. Ne segue che nel primo caso non si ha nè minimo nè massimo, e nel secondo si ha certamente un minimo o un massimo. In altri termini: *i valori di* x *che rendono minima o massima una funzione di* x *sono le radici semplici della derivata, e le radici multiple di ordine dispari.* Secondo che il valore di $f^{(n)}(a)$ è positivo o negativo si ha un minimo o un massimo (nel caso di n pari), o si può affermare che la funzione è crescente o decrescente (quando n è dispari). S'intende che in tutto ciò si suppone unica questa derivata n^{ima}, altrimenti, come si vedrà, può ben darsi che la proposizione enunciata cada in fallo.

*) « *Analisi algebrica* » p. 484.

www.rcin.org.pl

26. **Esercizii**: *a)* Fra i rettangoli che hanno un dato perimetro, il quadrato è quello che racchiude l'area massima. Infatti, se x è la lunghezza d'un lato, e $2a$ quella del perimetro, l'area è misurata dal numero $y = x(a - x)$. Intanto la derivata prima $y' = a - 2x$ si annulla per $x = {}^1/_2 a$, e poichè la derivata seconda è *negativa*, si vede che per $x = {}^1/_2 a$ la funzione y raggiunge il valore *massimo* ${}^1/_4 a^2$. Similmente, fra tutti i rettangoli che racchiudono un'area a^2, il quadrato è quello che ha il minimo perimetro. Infatti, se x è la lunghezza d'un lato, e $2y$ quella del perimetro, si ha $y = x + \frac{a^2}{x}$, $y' = 1 - \frac{a^2}{x^2}$, $y'' = \frac{2a^2}{x^3}$. La prima derivata si annulla per $x = a$ e per $x = -a$; per questi valori è $y'' > 0$, $y'' < 0$, rispettivamente, e però la funzione ammette un minimo $2a$ ed un massimo $-2a$; ma soltanto il primo risponde alla questione geometrica, perchè questa richiede che sia $x > 0$.

b) Con un foglio rettangolare proponiamoci di costruire una scatola di volume massimo, tagliando via dagli angoli quattro quadrati uguali. Se a e b sono le dimensioni del foglio, ed x l'altezza che si vuol dare alla scatola, il volume di questa è misurato dal numero

$$y = x(a - 2x)(b - 2x) = abx - 2(a + b)x^2 + 4x^3 .$$

Ponendo uguale a zero la derivata $y' = ab - 4(a + b)x + 12x^2$, si ottiene

$$x = {}^1/_6 \left(a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right) .$$

La derivata seconda $y'' = -4(a + b) + 24x$ diventa $\pm 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. Per avere il massimo di y bisogna dunque ritenere il segno —, si deve cioè prendere $x = {}^1/_6 \left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right)$, valore sempre compreso fra ${}^1/_6 a$ ed ${}^1/_6 b$. Del resto l'altra soluzione è illusoria, perchè dà un valore superiore alla metà della più piccola dimensione.

c) Se si vuol discutere la funzione $y = x^{\frac{1}{x}}$ nell'intervallo $(0, \infty)$, si cominci dal notare che, quando x tende a zero, basta porre $x = 1 : z$, e far poi crescere z all'infinito, per trovare $y = 1 : z^z$, $\lim y = 0$. Per $x = 1$ è $y = 1$, e per x crescente all'infinito la funzione tende a riprendere (II, 31, *a*) il valore 1. Si capisce dunque che, quando x varia da 1 all'infinito, la funzione deve passare per un minimo o per un massimo, ed è facile prevedere che si ha un massimo, giacchè $y > 1$ per $x > 1$. Per accertarsene si osservi che la derivata

$$y' = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \log x) ,$$

positiva per $x < e$, diventa negativa per $x > e$, e però la funzione, prima crescente, decresce poi. Essa raggiunge dunque per $x = e$ il massimo valore

$$e^{\frac{1}{e}} = 1{,}444667.....$$

Se si vuol constatare mediante l'esame di y'' che la funzione passa effettivamente per un massimo, e non per un minimo, si osservi che

$$\text{da} \quad \frac{y'}{y} = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \text{si deduce} \quad \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = -\frac{3 - 2\log x}{x^3} .$$

Ora, facendo $x = e$, $y = e^{\frac{1}{e}}$, $y' = 0$, si ottiene $y'' = -e^{\frac{1}{e} - 3}$: ciò basta per asserire che $e^{\frac{1}{e}}$ è il *massimo* valore di $x^{\frac{1}{x}}$.

www.rcin.org.pl

d) Proponiamoci di trovare le basi dei sistemi di logaritmi, nei quali può esistere un logaritmo uguale al numero corrispondente. Sia a la base incognita, e si cerchi se la funzione $y = x - \mathrm{Log}\, x$ può annullarsi. È manifesto che, per x positivo e sufficientemente piccolo, come per x abbastanza grande, y è positivo. Affinchè questa funzione possa annullarsi occorre dunque e basta che il suo minimo valore sia negativo o nullo. Questo minimo è determinato dall'equazione

$$y' = 1 - \frac{\mathrm{Log}\, e}{x} = 0 \ ;$$

e per convincersi che si tratta realmente d'un minimo, e non d'un massimo, basta riflettere che per $x < \mathrm{Log}\, e$ la funzione decresce, per cominciare poi a crescere a partire da $x = \mathrm{Log}\, e$. Il minimo valore di y è dunque

$$\mathrm{Log}\, e - \mathrm{Log}\, \mathrm{Log}\, e = \mathrm{Log}\, \frac{e}{\mathrm{Log}\, e} \ .$$

Perchè questo valore sia negativo o nullo è necessario che si abbia $e \leqq \mathrm{Log}\, e$, cioè successivamente, $1 \leqq \mathrm{Log}\, e^{\frac{1}{e}}$, $a \leqq e^{\frac{1}{e}}$.

e) Vogliamo dimostrare che, nell'ellisse, la distanza del centro ad una normale qualunque non supera la differenza dei semi-assi. All'equazione dell'ellisse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ si può soddisfare ponendo $x = a\cos\varphi$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\varphi$, dove φ varia da 0 a 2π. Il coefficiente angolare della tangente (II, 13) si ottiene derivando l'equazione della curva:

$$b^2x + a^2yy' = 0 \quad , \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{b\cos\varphi}{a\,\mathrm{sen}\,\varphi} \ .$$

Dunque l'equazione della normale è

$$y - b\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}{b\cos\varphi}(x - a\cos\varphi) \ ,$$

cioè, riducendo, $ax\,\mathrm{sen}\,\varphi - by\cos\varphi = (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$; e però la distanza di questa retta al centro è

$$h = \frac{(a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} \ :$$

ponendone uguale a zero la derivata rispetto a φ si ottiene

$$(a^2\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)(\cos^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi) - (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\varphi = 0 \ ,$$

cioè $a^2\mathrm{sen}^4\varphi - b^2\cos^4\varphi = 0$, d'onde, limitandoci a considerare il primo quadrante, $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{b:a}$; poi, per questo valore di φ,

$$\mathrm{sen}\,\varphi = \sqrt{\frac{b}{a+b}} \ , \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{a}{a+b}} \ , \quad \mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \ ,$$

e finalmente $a^2\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = ab$, $h = a - b$.

f) Si può dimostrare che la luce impiega il minor tempo possibile quando passa da un punto ad un altro attraverso due mezzi omogenei, separati da un piano. Siano infatti a e b le distanze dei punti, che si considerano nei due mezzi, al piano di separazione; sia φ l'angolo d'incidenza, ψ l'angolo di rifrazione, nv e v le velocità della luce nei due mezzi; e si osservi che il tempo impiegato nel pas-

www.rcin.org.pl

saggio da un punto all'altro è

$$t = \frac{1}{v}\left(\frac{a}{n\cos\varphi} + \frac{b}{\cos\psi}\right).$$

Gli angoli φ e ψ sono fra loro vincolati mediante la relazione

$$a\,\mathrm{tg}\,\varphi + b\,\mathrm{tg}\,\psi = costante,$$

dalla quale, derivando rispetto a φ, si deduce

$$\frac{a}{\cos^2\varphi} + \frac{b\psi'}{\cos^2\psi} = 0\ .$$

Intanto si ha

$$t' = \frac{1}{v}\left(\frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}{n\cos^2\varphi} + \frac{b\,\mathrm{sen}\,\psi}{\cos^2\psi}\psi'\right) = \frac{a(\mathrm{sen}\,\varphi - n\,\mathrm{sen}\,\psi)}{nv\cos^2\varphi},$$

e si vede che dev'essere $\mathrm{sen}\,\varphi : \mathrm{sen}\,\psi = n$ perchè t' si annulli. È questa appunto la notissima legge di rifrazione, scoperta da Cartesio, e presentata da Fermat e da Leibnitz come un caso particolare della legge universale di *risparmio*, che presiede alle manifestazioni di tutti i fenomeni naturali, anche di quelli che più sembrano ribelli alle investigazioni matematiche *).

g) Nelle questioni geometriche accade talvolta che il minimo (o il massimo) di cui si va in cerca sia *relativo* (II, 20) ad un certo intervallo, in cui la variabile indipendente è obbligata a rimanere per le condizioni stesse del problema; ed allora può ben darsi che la derivata non si annulli, e che, per conseguenza, la ricerca riesca infruttuosa. Bisogna pertanto, ogni volta che la variabile indipendente non può uscire da un determinato intervallo, aver cura di scegliere altrimenti tale variabile, o pure indagare direttamente se per avventura *negli estremi* non si verifichi un minimo o un massimo, che potrebbe rispondere alla questione proposta, quantunque non sia minimo o massimo nel senso assoluto. Un esempio semplicissimo ci si presenta nella ricerca della minima o massima fra le corde di un circolo, che hanno un estremo fisso A, ed un altro mobile M. È chiaro *a priori* che si ha il minimo $r = 0$ quando M coincide con A, ed il massimo $r = 2a$ quando M coincide col punto B, diametralmente opposto ad A sulla circonferenza. Se si prende AB come asse delle ascisse, ed A come origine, si ha $r^2 = 2ax$, poi $rr' = a$, e si vede che r' non si annulla nè in A nè in B. Ciò si deve al fatto che la variabilità di x è limitata all'intervallo $(0, 2a)$, e che il minimo ed il massimo cercati avvengono proprio negli estremi. Se invece si prende come variabile indipendente l'angolo $\theta = \widehat{MAB}$, si ha $r = 2a\cos\theta$, $r' = -2a\,\mathrm{sen}\,\theta$, e si trova il solo massimo $r = 2a$, corrispondente a $\theta = 0$. Ciò si spiega osservando che θ varia soltanto nell'intervallo $(-{}^1/_2, {}^1/_2\pi)$, negli estremi del quale si verifica il minimo $r = 0$, *relativo* all'intervallo stesso, mentre il massimo $r = 2a$ avviene per $\theta = 0$, cioè per un valore che cade *nell'interno* del predetto intervallo. Questo massimo è dunque tale anche nel senso assoluto, e però r' deve annullarsi. Sparisce ogni difficoltà se il punto A si sposta, per esempio, verso B, arrivando alla distanza b dal centro, nel qual caso si ha $r^2 - 2br\cos\theta + b^2 = a^2$; poi derivando, e ponendo $r' = 0$, si ottiene $\mathrm{sen}\,\theta = 0$, cioè $\theta = 0$ ed $r = a + b$,

*) Leggi, in proposito, l'interessante capitolo sulla *direzione del movimento* nei «*Premiers principes*» di Spencer.

www.rcin.org.pl

o $\theta = \pi$ ed $r = a - b$. Una nuova derivazione dà

$$r'' = \frac{br\cos\theta}{b\cos\theta - r} = \frac{\pm b(a \pm b)}{\pm b - (a \pm b)} = \mp \frac{b}{a}(a \pm b) \lessgtr 0 ,$$

e così si vede che $a + b$ è il massimo, $a - b$ il minimo valore di r.

h) Sia $\varphi(x)$ una funzione continua intorno ad $x = 0$, ma discontinua di prima specie per $x = 0$: sia $\varphi(-0) < 0$, $\varphi(+0) > 0$. Per esempio si può prendere $\varphi(x) = (e^{\frac{1}{x}} - 1) : (e^{\frac{1}{x}} + 1)$, osservando che $\varphi(\mp 0) = \mp 1$. La funzione $f(x) = x^2 \varphi(x)$ non ha, per $x = 0$, nè minimo nè massimo, perchè intorno allo zero la funzione $\varphi(x)$, continua, ha il segno di x, e però altrettanto si può dire di $f(x)$, che per conseguenza è crescente tanto a sinistra quanto a destra dello zero. Intanto

$$f'(0) = \lim_{x=0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x=0} x\varphi(x) = 0 .$$

Analogamente $f''(0)$ può non esistere; ma, nel caso opposto, si ha

$$f''(0) = \lim_{x=\pm 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2 \lim_{x=\pm 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \lim_{x=\pm 0} \varphi(x) = 2\varphi(\pm 0) \gtrless 0 .$$

In tutti i casi si può affermare che non è $f''(0) = 0$. Adunque *per* $x = 0$ *è nulla la derivata prima di* f(x), *ma non la derivata seconda, eppure* f(0) *non è nè un minimo nè un massimo di* f(x). Ciò si spiega osservando che la derivata seconda non è unica.

i) Discutiamo, per finire, il modo di variare della funzione $\Gamma(x)$ quando x va da 0 all'infinito. Richiamata (§ 24, *g*) la definizione

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n-1)} ,$$

ci converrà farne uso prendendo i logaritmi dei due membri:

$$\log\Gamma(x) = \sum_1^\infty \big(x \log n - (x-1)\log(n-1) - \log(x+n-1)\big) .$$

Derivando si ottiene

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \sum_1^\infty \left(\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{x+n-1}\right) ,$$

con l'avvertenza di porre 0 al posto di $\log 0$; ed in particolare (§ 18, *a*), per $x = 1$, si trova

$$\Gamma'(1) = \sum_1^\infty \left(\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = -\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = -C .$$

Quindi

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + C = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x+2} + \ldots\ldots .$$

Il secondo membro cresce con x, e poichè per $x = 1$ e per $x = 2$ prende i valori $0 < C$ ed $1 > C$, diventa uguale a C una volta sola: ciò avviene per un certo valore $x = \xi$, compreso fra 1 e 2, radice unica di $\Gamma'(x)$. Siccome si ha $\Gamma'(x) < 0$ o $\Gamma'(x) > 0$ secondo che $x < \xi$ o $x > \xi$, si vede che $\Gamma(x)$ è prima de-

www.rcin.org.pl

crescente, poi crescente, e però $\Gamma(\xi)$ è il *minimo* valore di $\Gamma(x)$. Alla medesima conclusione si perviene osservando che

$$\frac{\Gamma''(\xi)}{\Gamma(\xi)}=\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{(\xi+1)^2}+\frac{1}{(\xi+2)^2}+\ldots\ldots>0\ .$$

Il valore della radice ξ, già isolata nell'intervallo $(1,2)$, si ottiene applicando i noti *) metodi di approssimazione. Un calcolo facile dà

$$\xi=1{,}4616321\ldots\ldots\ ,\quad \Gamma(\xi)=0{,}8856032\ldots\ldots$$

Quando x varia da ξ all'infinito, la funzione, crescendo sempre, oltrepassa ogni limite, giacchè $\Gamma(x+1)\geqq[x]!$ Essa cresce anche quando x va invece decrescendo da ξ verso zero; e cresce indefinitamente, perchè

$$\lim_{x=0} x\Gamma(x)=\lim_{x=0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1\ .$$

In altri termini, per x tendente a zero, $\Gamma(x)$ *è assintotica ad* $\frac{1}{x}$; anzi, se si osserva che

$$\lim_{x=0}\left(\Gamma(x)-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x=0}\frac{\Gamma(x+1)-1}{x}=\lim_{x=0}\Gamma'(x+1)=\Gamma'(1)=-C\ ,$$

si può scrivere $\Gamma(x)=\frac{1}{x}-C$, assintoticamente; *ecc.* Alla formola completa si perviene più rapidamente svolgendo $\Gamma(x+1)$ in serie di potenze, e dividendo poi tutto per x.

Formole d'interpolazione.

27. Costruire una funzione $y=f(x)$, tale che ai valori $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ della variabile indipendente corrispondano dati valori $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$ della funzione, tale cioè che si abbia $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3, \ldots\ldots$: questo è il problema dell'*interpolazione*, problema naturalmente indeterminato, in generale. Nondimeno, se si vuole che y sia una funzione intera, di grado inferiore ad n, basterà prescrivere n coppie di valori corrispondenti perchè la funzione sia pienamente determinata. È infatti nota fin dagli elementi dell'Algebra l'identità necessaria fra due polinomii, uguali per valori della variabile, in numero superiore al grado dei polinomii stessi. Similmente, quando $\lim_{n=\infty} x_n=0$, il problema è determinato se si vuole che la funzione sia sviluppabile in serie di potenze; e può anche darsi che in questa forma non ammetta soluzione. Infatti, supposte esistenti due siffatte funzioni, la loro differenza $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$ deve annullarsi per infiniti valori di x, tendenti a zero, e per conseguenza, in virtù della continuità, deve annullarsi per $x=0$. Ne segue $a_0=0$; ed osservando che anche $a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots\ldots$ è annullata dai medesimi valori di x, si trova analogamente $a_1=0$, poi $a_2=0$, *ecc.*, vale a dire che le due funzioni coincidono. È poi

*) « *Analisi algebrica* » p. 419.

www.rcin.org.pl

evidente che, se i numeri $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$ sono dati a caso, è ben difficile che la funzione cercata esista, giacchè occorre, prima di tutto, che, nel crescere di n all'infinito, i predetti numeri tendano ad un limite finito.

28. **Funzioni interpolari.** L'espressione

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

si chiama funzione interpolare del *primo* ordine. Quella del *secondo* ordine è

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3)}{x_2 - x_3} .$$

Così proseguendo si arriva alla funzione interpolare dell'ordine $n-2$, e si definisce quella dell'ordine $n-1$ scrivendo

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n} .$$

Tutte queste funzioni si possono esprimere direttamente mediante i numeri dati $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$ Infatti si ha

$$f(x_1, x_2) = \frac{y_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_2}{x_2 - x_1} \quad , \quad f(x_1, x_3) = \frac{y_1}{x_1 - x_3} + \frac{y_3}{x_3 - x_1} ;$$

poi, sottraendo e dividendo per $x_2 - x_3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} .$$

È facile intuire il risultato generale

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} + \cdots + \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})} ,$$

che si verifica col solito procedimento. Questa formola, dovuta ad Ampère, mostra che *ogni funzione interpolare è funzione simmetrica delle variabili da cui dipende.*

29. **Formola di Newton.** La definizione delle funzioni interpolari ci dà subito le uguaglianze

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x) ,$$

$$f(x_1, x) = f(x_1, x_2) + (x - x_2) f(x_1, x_2, x) ,$$

$$f(x_1, x_2, x) = f(x_1, x_2, x_3) + (x - x_3) f(x_1, x_2, x_3, x) ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) ,$$

dalle quali, moltiplicando la seconda per $x - x_1$, la terza per $(x - x_1)(x - x_2)$, *ecc.*, la $(n-1)^{ima}$ per $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-2})$, e sommando, si deduce

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \cdots\cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) . \qquad (12)$$

www.rcin.org.pl

Ora, se si vuole che $f(x)$ sia un polinomio di grado $n-1$ (o eventualmente di grado inferiore), si osservi che, in questa ipotesi, $f(x)-f(x_1)$ è divisibile per $x-x_1$, perchè si annulla per $x=x_1$. Ne segue che $f(x_1,x)$ è un polinomio del grado $n-2$, e poichè questo polinomio deve prendere il valore $f(x_1,x_2)$ quando si fa $x=x_2$, la differenza $f(x_1,x)-f(x_1,x_2)$ è divisibile per $x-x_2$, e però $f(x_1,x_2,x)$ è un polinomio del grado $n-3$; *ecc.* Continuando si riconosce che $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x)$ è una *costante*, dimodochè si ha

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)\ ;$$

poi, sostituendo in (12),

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f(x_1,x_2)+(x-x_1)(x-x_2)f(x_1,x_2,x_3)+\cdots\cdots$$
$$+(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{n-1})f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\ . \qquad (13)$$

Questa è la *formola di Newton*, mediante la quale si può sempre costruire l'unico polinomio, di grado inferiore ad n, che prende i valori prescritti y_1, $y_2,\ldots,y_n$ in corrispondenza dei valori $x_1,x_2,\ldots,x_n$ di x. Il grado del polinomio, generalmente uguale ad $n-1$, può riuscire più basso, ed effettivamente ciò avviene tutte le volte che i numeri y sono dati in modo che la funzione $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ risulta uguale a zero.

30. **Formola di Lagrangia.** Per far comparire esplicitamente, nel secondo membro di (13), i numeri $y_1,y_2,\ldots,y_n$, basta fare uso della formola di Ampère, dimostrata nel § 28. Prima si osservi che, essendo ogni funzione interpolare esprimibile in forma lineare ed omogenea delle y, anche $f(x)$ ha questa forma, vale a dire che si può scrivere

$$f(x)=y_1f_1(x)+y_2f_2(x)+y_3f_3(x)+\cdots+y_nf_n(x)\ . \qquad (14)$$

Ciò premesso, la funzione $f_n(x)$ si determina subito, mercè la formola di Ampère, dopo avere osservato che soltanto l'ultimo termine di (13) contiene y_n. Basterà poi cambiare x_n in qualunque x_ν per ottenere, in virtù della simmetria, l'espressione di $f_\nu(x)$:

$$f_\nu(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\nu-1})\cdot(x-x_{\nu+1})\ldots(x-x_n)}{(x_\nu-x_1)(x_\nu-x_2)\ldots(x_\nu-x_{\nu-1})\cdot(x_\nu-x_{\nu+1})\ldots(x_\nu-x_n)}\ . \qquad (15)$$

La formola (14), in cui le f_ν hanno il significato (15), è la *formola di Lagrangia*. Questa si può, del resto, stabilire direttamente, osservando che, se si vuol tentare la risoluzione del problema con un'espressione della forma (14), occorre che $f_\nu(x)$ sia un polinomio di grado inferiore ad n, che diventi uguale ad 1 per $x=x_\nu$, ed invece si annulli per ogni $x=x_{\nu'}\gtrless x_\nu$. Evidentemente un tal polinomio non può avere un'espressione diversa dalla (15). Trovata così una funzione intera $f(x)$, che risponde alla questione, già sappiamo che non può esisterne un'altra, a meno che il suo grado non raggiunga o superi n.

www.rcin.org.pl

31. Il secondo membro di (13) rappresenta una funzione che prende i valori prescritti $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$ quando ad x si attribuiscono i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La differenza fra il primo ed il secondo membro è una funzione $R_n(x)$, che si riduce identicamente a zero sol quando f sia quella particolare funzione intera, di grado inferiore ad n, che viene individuata dalle precedenti condizioni; ma, in generale, di $R_n(x)$ si può dire soltanto che ammette le radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supponiamo questi numeri già disposti in ordine crescente, ed osserviamo che la derivata $R'_n(x)$ deve annullarsi (II, 22) per $n-1$ valori di x, presi rispettivamente negli intervalli $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$. Similmente $R''_n(x)$ si annulla per $n-2$ valori di x, certamente compresi fra x_1 ed x_n; *ecc.* Finalmente $R_n^{(n-1)}(x)$ deve annullarsi per un numero ξ, appartenente all'intervallo (x_1, x_n). Intanto si ha

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - (n-1)!\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Dunque

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} . \tag{16}$$

Questo teorema è assai utile in certe questioni geometriche. Si noti che, *se* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tendono simultaneamente ad* a, anche ξ tende ad a; quindi, ammessa la continuità di $f^{(n-1)}(x)$ per $x = a$,

$$\lim f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} . \tag{17}$$

Tornando ad R_n, osserviamo che dalla (12), dopo aver cambiato n in $n+1$, risulta

$$R_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) ;$$

quindi, indicando con ξ un *numero medio fra* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ed* x,

$$R_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} . \tag{18}$$

Così la formola di Newton, in cui si aggiunga questa espressione di R_n al secondo membro, ci si presenta come un'estensione della formola di Taylor (§ 12) completata col resto di Lagrangia, ed in virtù di (17) si riduce effettivamente a quest'ultima formola quando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si fanno tendere simultaneamente verso un limite a.

32. **Applicazioni**: *a)* La proprietà (17) ci mette in grado di rispondere alla questione accennata in fine del § 27, ci permette cioè di trovare quella funzione $f(x)$, sviluppabile in serie di potenze, che prende valori assegnati *a priori* corrispondentemente ai valori $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di x, tendenti a zero. Siano $n', n'', n''', \ldots$ numeri qualunque, differenti tra loro e maggiori di n: se i numeri

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = a_0 \quad , \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}) = a_1 \quad , \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}, x_{n''}) = a_2, \ldots$$

esistono, la funzione cercata è $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

www.rcin.org.pl

b) Il calcolo del logaritmo volgare (cioè in base 10) d'un numero qualunque si può sempre ridurre al calcolo del logaritmo d'un numero grande quanto si vuole, moltiplicando, se occorre, il dato numero per una potenza di 10. Vogliamo far vedere che, quando le tavole di cui si dispone sono ad n decimali, basta rendere il numero x (di cui si vuol calcolare il logaritmo) maggiore di $10^{[\frac{n}{2}]}$, per poter fare uso della nota regola

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} \nu + (x - \nu) \operatorname{Log} \frac{\nu + 1}{\nu} ,$$

dove ν rappresenta il massimo intero contenuto in x. Infatti, se si applica la formola di Newton, completata col resto (18), alla funzione $\operatorname{Log} x$, prendendo $x_1 = \nu$, $x_2 = \nu + 1$, si ottiene appunto la precedente uguaglianza, col secondo membro aumentato di

$$R = (x - \nu)(\nu + 1 - x) \frac{m}{2\xi^2} .$$

Ora osserviamo che $(x - \nu)(\nu + 1 - x)$, prodotto di due fattori, la cui somma è 1, non può (§ 26, *a*) superare $\frac{1}{4}$, e ricordiamoci (I, 20, *c*) che $m < \frac{1}{2}$. Ne segue subito che, entro i limiti di approssimazione, fra i quali sono stati eseguiti i calcoli, R è trascurabile, perchè

$$R < \frac{1}{16\xi^2} < \frac{1}{16 . 10^{2[\frac{n}{2}]}} < \frac{1}{10^n} .$$

c) Se le x e le corrispondenti y si considerano come coordinate di punti d'una curva, la funzione interpolare del primo ordine rappresenta il coefficiente angolare d'una corda M_1M_2. Immaginiamo presi M_1 ed M_2 in prossimità del punto M, corrispondente all'ascissa a, e facciamoli tendere ad M. Se la derivata y' è continua per $x = a$, l'eguaglianza (17) dà *)

$$\lim \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = f'(a) ,$$

e ci dice che *la tangente in* M *è la posizione limite di tutte le secanti* M_1M_2, mentre la definizione della tangente non ci permette di affermare ciò se non quando un estremo della corda si trova già fissato in M.

d) Anche la funzione interpolare del secondo ordine ha un semplicissimo significato geometrico. Si sa infatti dalla Geometria analitica che l'area del triangolo $M_1M_2M_3$, nell'ipotesi che i vertici siano incontrati in quest'ordine stesso da un punto che percorre il perimetro lasciando il triangolo alla sua sinistra, è

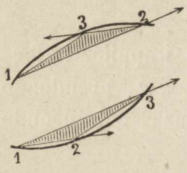
$$\sigma = {}^1/_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = {}^1/_2 (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) f(x_1, x_2, x_3) .$$

Ora, data la curva $y = f(x)$, supponiamo continua e diversa da zero, per $x = a$ la derivata seconda $f''(x)$, e determiniamo (I, 23) intorno ad a un intervallo

*) Questa eguaglianza si potrebbe assumere come *definizione* della derivata, e con ciò si avrebbero certi vantaggi, indicati da Peano in *Mathesis* (1892, p.12).

www.rcin.org.pl

nel quale $f''(x)$ conservi il segno di $f''(a)$. Agli estremi d'un tale intervallo corrispondono sulla curva due punti P e Q, ed in virtù di (16), per tre punti qualunque M_1, M_2, M_3, presi sull'arco PQ, è chiaro che $f(x_1, x_2, x_3)$ ha il segno di $f''(a)$. Ciò premesso, dopo aver fissato M_1, si prenda M_2 alla destra di M_1, in modo cioè che sia $x_2 > x_1$, e si scelga M_3 in guisa che un punto mobile, arrivato da M_1 in M_2, debba voltare a sinistra se vuol proseguire per M_3. In queste condizioni σ sarà positivo, e però $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ avrà il segno di $f''(a)$, cioè $f''(a)$ è positivo o negativo secondo che x_3 sta fuori o dentro l'intervallo (x_1, x_2). Intanto è facile riconoscere che il punto M_3 deve star fuori dell'arco M_1M_2, o deve invece cadere nell'interno di tale arco, secondo che questo è *convesso* o *concavo* verso la parte inferiore della figura. Ne segue che $f''(a)$ è *positivo* nel primo caso, *negativo* nel secondo. Si vede così che il segno di $f''(x)$ può servire a riconoscere, lungo la curva $y = f(x)$, quali archi (convenientemente piccoli) volgono in su la loro concavità $(f'' > 0)$, quali invece la volgono in giù $(f'' < 0)$.



e) Quando, nelle circostanze indicate, i punti M_1, M_2, M_3 tendono simultaneamente a confondersi col punto fisso $M(x = a)$, anche il circolo circoscritto al triangolo $M_1M_2M_3$ tende a confondersi con un circolo fisso, che si chiama *circolo osculatore* alla curva, in M, per ragioni che in seguito appariranno più chiare. Per dimostrare l'esistenza del suddetto circolo limite basta far vedere che il centro del circolo $M_1M_2M_3$ tende a collocarsi sopra una retta fissa, e che il raggio tende ad un limite ρ. Intanto è noto dagli elementi della Geometria che la lunghezza di questo raggio si ottiene dividendo per 4σ il prodotto $l_1 l_2 l_3$ delle lunghezze dei lati del triangolo $M_1M_2M_3$. D'altra parte, se con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ si rappresentano le inclinazioni dei lati stessi sull'asse delle x, si ha

$$\pm(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = l_1 l_2 l_3 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 .$$

Ne segue, osservando che questi tre angoli tendono all'analogo angolo φ, relativo al punto fisso M, e ricordando la proprietà (17),

$$\pm\frac{1}{\rho} = 2\lim f(x_1, x_2, x_3)\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 = f''(a)\cos^3\varphi ,$$

dove $\operatorname{tg}\varphi = f'(a)$. Dunque

$$\rho = \pm\frac{(1 + f'^2(a))^{\frac{3}{2}}}{f''(a)} .$$

Questa lunghezza, molto importante per lo studio delle curve, si chiama *raggio di curvatura*. Si noti, per finire, che il centro del circolo $M_1M_2M_3$ si trova costantemente sulla perpendicolare elevata ad M_1M_2, nel punto di mezzo, e poichè nel tendere di M_1 ed M_2 ad M la retta M_1M_2 tende alla *tangente* in M, è chiaro che la suddetta perpendicolare tende invece a confondersi con la *normale*, d'onde segue che il circolo osculatore in qualunque punto d'una curva sta fra quelli che toccano la curva nel punto che si considera.

www.rcin.org.pl

Decomposizione delle funzioni razionali in somme di frazioni semplici.

33. Una funzione razionale si può *) sempre porre sotto forma di quoziente di due funzioni intere $f(x):g(x)$, prime tra loro. Inoltre, immaginando già estratta la parte intera di questo quoziente, è lecito supporre il grado di f inferiore a quello di g. Data $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, *con radici tutte semplici*, si rappresenti f mediante la formola d'interpolazione di Lagrangia. Prima si osservi che nell'espressione (15) il numeratore ed il denominatore valgono rispettivamente

$$g(x):(x-x_\nu) \quad , \quad g'(x_\nu)\gtrless 0 \, .$$

Ne segue

$$y_\nu f_\nu(x)=\frac{f(x_\nu)}{x-x_\nu}\cdot\frac{g(x)}{g'(x_\nu)}=\frac{a_\nu g(x)}{x-x_\nu} \quad , \quad \text{dove} \quad a_\nu=\frac{f(x_\nu)}{g'(x_\nu)}\gtrless 0 \; ; \quad (19)$$

quindi, sostituendo in (14),

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-x_n} \, . \qquad (20)$$

Così la funzione data si trova decomposta in una somma di frazioni semplici. Si vedrà nella terza parte del corso quale sia l'utilità di questa decomposizione.

34. Poniamoci ora nel caso generale: sia

$$g(x)=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots\ldots=(x-\alpha)^r\varphi(x) \; ,$$

dimodochè $\varphi(\alpha)\gtrless 0$. Identicamente

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}+\frac{f(x)-a_r\varphi(x)}{(x-\alpha)^r\varphi(x)} \; ,$$

qualunque sia a_r; ma questo numero si può fissare in modo che $f-a_r\varphi$ riesca divisibile per $x-\alpha$, per la qual cosa occorre che sia $f(\alpha)-a_r\varphi(\alpha)=0$, cioè

$$a_r=\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=r!\,\frac{f(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)}\gtrless 0 \, . \qquad (21)$$

Allora, chiamati f_1 e g_1 i quozienti di $f-a_r\varphi$ e di g per $x-\alpha$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \; ,$$

e si è condotti a decomporre la frazione $f_1:g_1$, più semplice di $f:g$ perchè l'ordine di α, come radice del denominatore, si trova abbassato ad $r-1$. Immaginando ripetute le considerazioni precedenti si può senz'altro scrivere

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{a_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \; ,$$

*) Vedi, per esempio, il « *Corso di Analisi algebrica* » di Capelli e Garbieri, p. 418.

www.rcin.org.pl

dove

$$a_{r-1}=\frac{f_1(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)-a_r\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\frac{r!}{g^{(r)}(\alpha)}\left(f'(\alpha)-\frac{f(\alpha)}{r+1}\cdot\frac{g^{(r+1)}(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)}\right),$$

e così di seguito, finchè si giunge a

$$\frac{f_{r-1}(x)}{g_{r-1}(x)}=\frac{a_1}{x-\alpha}+\frac{f_r(x)}{g_r(x)},$$

dove $g_r(x)$, ossia $\varphi(x)$, non ha più la radice α. Passando ora a considerare la radice β, poi le altre, successivamente, si vede che si perverrà finalmente alla formola

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1}{x-\alpha}+\frac{a_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots\cdots+\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}$$
$$+\frac{b_1}{x-\beta}+\frac{b_2}{(x-\beta)^2}+\cdots\cdots+\frac{b_s}{(x-\beta)^s}+\cdots\cdots,$$

che include (20) per $r=s=\ldots=1$, come la legge (19) per la formazione dei coefficienti è inclusa in (21). Gli altri coefficienti, nel caso generale, sono dati da formole sempre più complicate *); ma di queste, come della (21), si fa raramente uso nella pratica del calcolo, dove, una volta che si è riusciti a constatare la possibilità di porre la frazione sotto la forma precedentemente ottenuta, si ricorre di preferenza al metodo dei *coefficienti indeterminati*.

35. Ordinariamente la frazione data ha i coefficienti reali; ed è conveniente, per ragioni che potremo intendere in seguito, decomporla in frazioni semplici, che siano anch'esse a coefficienti reali. Con questo scopo i fattori lineari di g, corrispondenti a due radici immaginarie conjugate $\alpha\pm i\beta$, si lasciano accoppiati nel prodotto x^2+px+q, che si considera come denominatore d'una frazione semplice. Per calcolarne il numeratore applichiamo la formola (19) ricordandoci **) che i numeri ottenuti sostituendo in $f:g'$ una volta $x=\alpha+i\beta$, ed un'altra $x=\alpha-i\beta$, sono conjugati. Se li rappresentiamo con $\lambda+i\mu$ e $\lambda-i\mu$, le radici considerate daranno luogo, nella formola (20), alla somma

$$\frac{\lambda+i\mu}{x-(\alpha+i\beta)}+\frac{\lambda-i\mu}{x-(\alpha-i\beta)}=\frac{ax+b}{x^2+px+q},$$

in cui a e b sono, come p e q, numeri reali. Se, per esempio, g ammette soltanto radici immaginarie semplici, si potrà scrivere, invece di (20),

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1x+b_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{a_2x+b_2}{x^2+p_2x+q_2}+\cdots+\frac{a_nx+b_n}{x^2+p_nx+q_n},$$

supponendo $g(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots(x^2+p_nx+q_n)$. Ora, passando al caso delle radici multiple, supponiamo $g(x)=(x^2+px+q)^r\varphi(x)$,

---

*) « *Analisi algebrica* » p. 495.

**) « *Analisi algebrica* » p. 346.

www.rcin.org.pl

ed osserviamo che nell'identità

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^r}+\frac{f(x)-(ax+b)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^r\varphi(x)}$$

si può disporre delle costanti a e b in guisa che $f-(ax+b)\varphi$ riesca divisibile per x^2+px+q: basta mettere $\lambda+\mu\frac{x-\alpha}{\beta}$ al posto di $ax+b$, dopo aver calcolato $\lambda\pm i\mu=f(\alpha\pm i\beta):\varphi(\alpha\pm i\beta)$. Proseguendo in tal modo, come nel paragrafo precedente, si vede che ogni coppia di radici immaginarie conjugate, multiple dell'ordine r, dà luogo, nella decomposizione di $f:g$ in frazioni semplici, ad una somma di questa forma:

$$\frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q}+\frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{a_rx+b_r}{(x^2+px+q)^r}\,.$$

IV. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.

Prime nozioni.

1. Immaginiamo n variabili $x, y, z, \ldots$, *indipendenti* fra loro, cioè tali che il valore attribuito ad una non menomi in alcun modo la libertà d'imporre ad un'altra qualsiasi quel valore che più ci piace. L'insieme dei sistemi di valori che ad esse possono attribuirsi costituisce un *campo ad* n *dimensioni*, di cui è caso particolare, per $n=1$, ciò che abbiamo precedentemente chiamato intervallo. Se ad ogni sistema di valori delle n variabili, appartenente ad un certo campo, si fa, con un criterio qualunque, corrispondere un numero, l'insieme di questi numeri costituisce una *funzione* delle n variabili, definita in quel campo, e si rappresenta con $f(x, y, z, \ldots)$. Si suole anche dire che la funzione è definita per ogni *punto* del campo, intendendo per punto niente altro che un sistema di n valori particolari qualunque, attribuiti alle variabili indipendenti. Le proprietà dimostrate nel primo capitolo, per le funzioni d'una variabile, si estendono facilmente alle funzioni di più variabili.

2. **Continuità.** Quando alle variabili indipendenti si attribuiscono gli incrementi $\delta x, \delta y, \ldots$, ne risulta per la funzione l'incremento

$$\delta f=f(x+\delta x, y+\delta y, \ldots)-f(x, y, \ldots)\,.$$

Si dice che la funzione è *continua* se, col far tendere simultaneamente a zero gli incrementi $\delta x, \delta y, \ldots$, senza porre tra loro alcun legame, δf tende *sempre* a zero. Fissati i valori di $n-1$ variabili, f può riguardarsi come

www.rcin.org.pl

funzione della rimanente variabile, ed è chiaro che, quando è continua rispetto al sistema delle variabili, la funzione è continua rispetto a ciascuna di esse; ma non bisogna credere che la reciproca sia vera, vale a dire che la continuità di $f(x,y,\ldots)$ consista semplicemente nella continuità rispetto ad $x,y,\ldots$, variabili separatamente. Per convincersi che *una funzione può essere discontinua, malgrado che sia continua rispetto a ciascuna delle variabili da cui dipende*, basta considerare, per esempio, una funzione delle coordinate cartesiane d'un punto, la quale abbia il valore 1 sugli assi, e sia nulla in ogni altro punto. Una simile funzione è manifestamente discontinua nell'origine, sebbene sia continua rispetto a ciascuna variabile, quando l'altra si pone uguale a zero. Basta il semplice cambiamento del valore 1 in 0, nell'origine, perchè in questo punto la funzione perda la continuità rispetto alle variabili considerate separatamente; eppure si può dire, malgrado ciò, che la nuova funzione è infinitamente meno discontinua dell'antica.

3. **Derivate parziali.** Quando la f si considera come funzione della sola x, o della sola y, e così via, le sue derivate successive si dicono *derivate parziali* rispetto ad x, ad $y,\ldots$, e si rappresentano con $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}$, $f'''_{yx},\ldots$ Per esempio, nel caso di due variabili indipendenti, si ha, dopo aver fissati arbitrariamente x ed y,

$$f'_x(x,y)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,,\quad f'_y(x,y)=\lim_{h=0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,;$$

poi da f'_x si deducono analogamente f''_{xx} ed f''_{xy}, come da f'_y si deducono f''_{yx} ed f''_{yy}; *ecc.* Perchè esistano le derivate *parziali* occorre, naturalmente, che la funzione sia continua rispetto a ciascuna variabile, ma non è necessaria la continuità nel senso complessivo, dichiarato nel precedente paragrafo. Ora vogliamo dimostrare che, nella ricerca delle derivate parziali successive, *l'ordine in cui si eseguono le derivazioni non influisce sul risultato, purchè le funzioni che successivamente si ottengono siano continue.* Possiamo evidentemente limitarci al caso di due sole derivazioni, e far vedere che la derivata di f'_x rispetto ad y non differisce dalla derivata di f'_y rispetto ad x, tutte le volte che le funzioni fornite dalla derivazione, ossia f''_{xy} ed f''_{yx}, sono continue. Attribuiti ad x e ad y gli incrementi $\delta x=h, \delta y=k$, si consideri l'espressione

$$\mathrm{R}=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)\,.$$

Scritta nel seguente modo

$$\mathrm{R}=\big(f(x+h,y+k)-f(x+h,y)\big)-\big(f(x,y+k)-f(x,y)\big)\,,$$

essa rappresenta l'incremento che subisce la funzione $f(x,y+k)-f(x,y)$,

www.rcin.org.pl

quando, lasciando costanti y e k, si passa dal valore x al valore $x+h$; e però, se si applica il teorema di Lagrangia (II, 25) alla predetta funzione di x, si ottiene

$$R = h(f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)) ,$$

per un conveniente numero θ, compreso fra 0 ed 1. Ora ci troviamo in presenza dell'incremento che subisce $f'_x(x+\theta h, y)$ quando, fissato $x+\theta h$, si attribuisce ad y l'incremento k. Ne segue, in virtù del medesimo teorema, applicato, questa volta, ad una funzione della sola y,

$$R = hkf''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k) ,$$

dove θ' è compreso fra 0 ed 1. Dunque, se la funzione f''_{xy} è continua nel punto (x, y), il suo valore in questo punto rappresenta, per h e k tendenti a zero, il limite del quoziente $R:hk$. Prendendo invece R sotto la forma

$$R = (f(x+h, y+k) - f(x, y+k)) - (f(x+h, y) - f(x, y)) ,$$

si riesce a dimostrare che il detto limite è uguale al valore di f''_{yx} nel punto che si considera, purchè *) nel punto stesso questa funzione sia continua. Dunque $f''_{xy} = f''_{yx}$.

4. **Funzioni composte.** Se in $y = f(u, v, w, \ldots)$ le variabili $u, v, w, \ldots$ non sono indipendenti, ma sono invece funzioni d'una stessa variabile indipendente x, anche y è funzione della sola x, quantunque apparisca funzione di più variabili. In tal caso si dice che y è una *funzione composta*, ed $u, v, w, \ldots$ sono le funzioni componenti. Dimostriamo che, se le derivate parziali prime di f sono continue, e se esistono le derivate prime delle funzioni componenti, *la derivata della funzione è uguale alla somma delle derivate parziali, ottenute applicando la regola per la derivazione delle funzioni di funzioni.* S'intende che le derivate parziali di f rispetto alle variabili u, $v, w, \ldots$ si calcolano trattando queste come indipendenti. Possiamo, per semplicità, limitarci a dimostrare il teorema nel caso di due sole funzioni componenti. Corrispondentemente all'incremento δx siano h e k gli incrementi delle funzioni u e v. L'incremento di y è $\delta y = f(u+h, v+k) - f(u, v)$. Intanto si ha, in virtù del teorema di Lagrangia,

$$f(u+h, v) - f(u, v) = hf'_u(u+\theta h, v) ,$$

$$f(u+h, v+k) - f(u+h, v) = kf'_v(u+h, v+\theta' k) .$$

Ne segue, sommando e dividendo per δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} f'_u(u+\theta h, v) + \frac{\delta v}{\delta x} f'_v(u+h, v+\theta' k) ;$$

*) Qui, veramente, si suppone troppo. Le condizioni per poter affermare l'eguaglianza $f''_{xy} = f''_{yx}$ sono state ridotte al minimo da Peano in *Mathesis* (1890, p. 153).

www.rcin.org.pl

poi, passando ai limiti, e tenendo presenti le ipotesi fatte,

$$y' = u' f'_u(u, v) + v' f'_v(u, v) \,. \tag{1}$$

5. **Osservazioni**: *a)* Il teorema evidentemente sussiste anche quando una sola delle derivate parziali è discontinua, purchè sia continua rispetto alla corrispondente variabile;

b) La regola (1) include come casi particolari tutte le regole di derivazione precedentemente dimostrate. Se, per esempio, si ha $y = u + v$, uv, $u:v$, ecc., si ha pure, rispettivamente,

$$f'_u = 1 \,,\; v \,,\; \frac{1}{v}, \ldots \;;\quad f'_v = 1 \,,\; u \,,\; -\frac{u}{v^2}, \ldots \,,$$

e la (1) dà

$$y' = u' + v' \quad , \quad vu' + uv' \quad , \quad \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} \,, \ldots\ldots$$

c) Inoltre la regola (1) permette di ottenere direttamente le derivate di certe funzioni, per le quali si è dovuto precedentemente ricorrere a particolari artificii. Così, per calcolare la derivata di $y = x^x$, basta considerare successivamente come sola variabile la x *base* o la x *esponente*, derivare e sommare i risultati, dimodochè si ha subito

$$y' = x . x^{x-1} + x^x \log x = x^x (1 + \log x) \,.$$

Più generalmente, se u e v sono funzioni di x, la derivata di $y = u^v$ è

$$y' = vu^{v-1} . u' + u^v v' \log u = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \log u \right) .$$

6. **Omogeneità.** La funzione $f(x, y, z, \ldots)$ si dice *omogenea*, di grado m, se si ha identicamente

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots) \,. \tag{2}$$

Per esempio $ax^2 + 2bxy + cy^2$ è funzione omogenea del secondo grado. Sono omogenee, dei gradi $0, \frac{1}{2}, -1$, rispettivamente, le funzioni

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \quad , \quad \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} \quad , \quad \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{x + y + z} \right)^2 ;$$

ecc. Si noti che *le derivate parziali prime d'una funzione omogenea, di grado* m, *sono funzioni omogenee di grado* m — 1. Infatti, derivando (2) rispetto ad x, poi dividendo per t, viene appunto l'eguaglianza

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots) = t^{m-1} f'_x(x, y, z, \ldots) \,,$$

che differisce dalla (2) solo per il cambiamento di f in f'_x, e di m in $m-1$.

7. **Teorema di Eulero**. *La somma delle derivate parziali prime di una funzione omogenea, moltiplicate per le rispettive variabili, è identicamente uguale al prodotto della funzione per il suo grado.*

www.rcin.org.pl

Dalla (2) si deduce

$$\frac{1}{t^m} f(tx, ty, tz, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) . \tag{3}$$

Derivando rispetto a t, dopo aver fissati arbitrariamente $x, y, z, \ldots\ldots$, si ottiene

$$\frac{1}{t^m}\left(x f'_x(tx, ty, \ldots) + y f'_y(tx, ty, \ldots) + \ldots\right) - \frac{m}{t^{m+1}} f(tx, ty, \ldots) = 0 \; ; \tag{4}$$

quindi, per $t = 1$,

$$x f'_x(x, y, \ldots) + y f'_y(x, y, \ldots) + \cdots = m f(x, y, \ldots) .$$

Questo è il *teorema di Eulero*. Ora osserviamo che, sostituendo ad $x, y, z, \ldots$, nell'ultima uguaglianza, rispettivamente $tx, ty, tz, \ldots$, e dividendo tutto per t^{m+1}, si ricostituisce l'eguaglianza (4), la quale ci dice che la derivata del primo membro di (3), rispetto a t, è uguale a zero, cioè che questo primo membro è indipendente da t, ed è perciò sempre uguale al valore che si ottiene facendo $t = 1$. Si ricade così sulla (2), vale a dire sulla definizione stessa dell'omogeneità. Dunque *il teorema di Eulero caratterizza le funzioni omogenee.*

8. **Derivazione dei determinanti**: *a)* Come applicazione della regola (1) consideriamo il primo dei determinanti

$$y = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ,$$

supponendo che l'altro sia il reciproco di y. La derivata parziale di y rispetto ad un suo elemento è uguale al corrispondente complemento algebrico. Infatti si ha, per esempio, $y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$, ed il solo termine che contiene u_ν è $a_\nu u_\nu$. Inoltre a_ν è indipendente da u_ν. Dunque $y'_{u_\nu} = a_\nu$. Se poi tutti gli elementi sono funzioni d'una stessa variabile x, il determinante y rappresenta una funzione di x, la cui derivata è, in virtù di (1),

$$y' = a_1 u'_1 + a_2 u'_2 + a_3 u'_3 + b_1 v'_1 + b_2 v'_2 + b_3 v'_3 + c_1 w'_1 + c_2 w'_2 + c_3 w'_3 .$$

Oltre l'ipotesi che gli elementi del determinante siano funzioni derivabili, non ne occorrono altre, giacchè le derivate parziali di y sono continue, come somme di prodotti di funzioni continue. All'ultimo risultato si può dar la forma seguente:

$$y' = \begin{vmatrix} u'_1 & v_1 & w_1 \\ u'_2 & v_2 & w_2 \\ u'_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v'_1 & w_1 \\ u_2 & v'_2 & w_2 \\ u_3 & v'_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w'_1 \\ u_2 & v_2 & w'_2 \\ u_3 & v_3 & w'_3 \end{vmatrix} . \tag{5}$$

Questa è la regola per la derivazione d'una funzione di x, data sotto forma di determinante: essa vale, evidentemente, per determinanti di qualunque ordine.

www.rcin.org.pl

b) La regola (5) può talvolta servire per calcolare il valore d'un determinante. Sia, per esempio,

$$y = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & x & \dots & x \\ x & x & x+a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} .$$

La derivata y'' è la somma di n^2 determinanti: in n di essi esiste una colonna di zeri, mentre negli altri compariscono due colonne di elementi uguali ad 1, dimodochè son tutti nulli. Dunque, successivamente, $y''=0$, $y'=a$, $y=ax+b$, dove le costanti a e b si determinano osservando che b è il valore di y per $x=0$ (d'onde segue subito $b=a_1a_2a_3\dots a_n$), ed a è il valore di y', che si calcola facilmente per $x=0$:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix} + \dots\dots$$

Si vede che a è la somma dei prodotti $n-1$ ad $n-1$ dei numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dunque

$$y = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{x}\right) a_1 a_2 \dots a_n x .$$

c) Sono particolarmente importanti, in certe applicazioni, i determinanti *wronskiani*, i quali hanno la prima colonna costituita da funzioni qualunque di una variabile x, mentre le colonne seguenti sono formate dalle successive derivate delle medesime funzioni. Il calcolo delle derivate di tali determinanti si può eseguire assai rapidamente mercè la regola (5). Per esempio,

$$\text{da} \quad y = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix} \quad \text{si deduce} \quad y' = \begin{vmatrix} u & u' & u''' \\ v & v' & v''' \\ w & w' & w''' \end{vmatrix} ,$$

cosicchè, per derivare un determinante wronskiano qualunque, dell'ordine n, basta sostituire alle derivate $(n-1)^{ime}$ delle funzioni le derivate n^{ime}. Similmente si ottiene

$$y'' = \begin{vmatrix} u & u'' & u''' \\ v & v'' & v''' \\ w & w'' & w''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & u' & u^{\text{IV}} \\ v & v' & v^{\text{IV}} \\ w & w' & w^{\text{IV}} \end{vmatrix} , \quad y''' = \begin{vmatrix} u' & u'' & u''' \\ v' & v'' & v''' \\ w' & w'' & w''' \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} u & u'' & u^{\text{IV}} \\ v & v'' & v^{\text{IV}} \\ w & w'' & w^{\text{IV}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & u' & u^{\text{V}} \\ v & v' & v^{\text{V}} \\ w & w' & w^{\text{V}} \end{vmatrix} , \text{ ecc.}$$

9. **Proprietà dei wronskiani.** Per l'uso che ne faremo in seguito conviene qui dimostrare una proprietà importantissima dei determinanti

www.rcin.org.pl

wronskiani. Se per brevità si rappresenta con $(u, v, w, \ldots)$ il determinante wronskiano delle n funzioni $u, u, w, \ldots$, bisogna prima far vedere che si ha *)

$$(tu, tv, tw, \ldots) = t^n(u, v, w, \ldots) . \tag{6}$$

Questa proprietà, che ha tanta analogia di forma con la proprietà caratteristica delle funzioni omogenee, si dimostra subito costruendo il determinante wronskiano delle funzioni $tu, tv, tw, \ldots$, ed osservando che nella seconda colonna si possono sopprimere i termini contenenti t', perchè proporzionali agli elementi della prima colonna; poi, nella terza, è lecito sopprimere i termini che contengono t'' o t', perchè rispettivamente proporzionali agli elementi della prima o della seconda colonna; *ecc.* Si finisce così per trovare il determinante $(u, v, w, \ldots)$ con tutti gli elementi moltiplicati per t, cioè appunto il secondo membro di (6). Ciò premesso, vogliamo dimostrare il seguente teorema: *affinchè due o più funzioni siano linearmente indipendenti occorre e basta che il loro wronskiano non sia nullo.* Prima bisogna sapere che due o più funzioni si dicono *indipendenti linearmente* quando non sono tra loro vincolate con una relazione lineare ed omogenea, a coefficienti costanti. In altri termini le funzioni $u, v, w, \ldots$ non sono linearmente indipendenti se esistono n costanti $a, b, c, \ldots$, non tutte nulle, tali che si abbia identicamente

$$au + bv + cw + \cdots = 0 . \tag{7}$$

Quando ciò accade è chiaro che, essendo anche

$$au' + bv' + cw' + \cdots = 0 \quad , \quad au'' + bv'' + cw'' + \cdots = 0 , \ldots\ldots ,$$

è necessario, per la compatibilità fra queste uguaglianze, considerate come equazioni lineari ed omogenee nelle incognite $a, b, c, \ldots$, che si abbia $(u, v, w, \ldots) = 0$. Ciò che maggiormente importa dimostrare è che, reciprocamente, se questo determinante è identicamente nullo, tra le funzioni u, $v, w, \ldots$ intercede un vincolo (7). Prima si noti che, per $n = 1$, l'eguaglianza (7) esprime appunto l'annullarsi di $(u) = u$. Ne segue che per dimostrare **) il teorema, si può, ammettendolo per meno di n, far vedere che sussiste per n funzioni. Se fosse $u = 0$, la relazione (7) sarebbe manifestamente vera per $a = 1, b = c = \ldots = 0$. Supponiamo dunque che non sia identicamente $u = 0$, ed osserviamo, ricordando il teorema (6), che

$$0 = (u, v, w, \ldots) = u^n\left(1, \frac{v}{u}, \frac{w}{u}, \ldots\right) = u^n\left(\left(\frac{v}{u}\right)', \left(\frac{w}{u}\right)', \ldots\right) ;$$

ma l'ultimo wronskiano è dell'ordine $n - 1$, e però dal suo annullamento si può trarre la conclusione $b\left(\frac{v}{u}\right)' + c\left(\frac{w}{u}\right)' + \ldots = 0$, con $b, c, \ldots$ costanti

*) Neuberg, *Mathesis*, 1894, p. 165.

**) Demoulin, *Mathesis*, 1897, p. 62.

www.rcin.org.pl

non tutte nulle. Ne segue che $b\frac{v}{u}+c\frac{w}{u}+\ldots$ ha un valore costante, che si può chiamare $-a$, e finalmente si vede che le n funzioni sono legate da una relazione (7).

Minimi e massimi.

10. Le formole di Taylor e di Mac-Laurin si estendono assai facilmente alle funzioni di più variabili. Fissato un punto $(a,b,c,\ldots)$, ed in vicinanza di esso un altro punto $(x,y,z,\ldots)$, entrambi appartenenti a quel campo in cui è definita la funzione $f(x,y,z,\ldots)$, si ponga

$$u=a+t(x-a)\quad,\quad v=b+t(y-b)\quad,\quad w=c+t(z-c)\ ,\ \ldots\ ,$$

e si consideri $f(u,v,w,\ldots)$ come funzione dell'unica variabile t. La derivata prima di questa funzione $F(t)$ si calcola facilmente mercè la regola (1), dopo avere osservato che, rispetto all'unica variabile t, si ha $u'=x-a$, $v'=y-b$, $w'=z-c,\ldots$ In tal modo si ottiene

$$F'(t)=(x-a)f'_x(u,v,\ldots)+(y-b)f'_y(u,v,\ldots)+(z-c)f'_z(u,v,\ldots)+\cdots\cdots$$

Una nuova derivazione dà

$$F''(t)=(x-a)^2f''_{xx}(u,v,\ldots)+(y-b)^2f''_{yy}(u,v,\ldots)+(z-c)^2f''_{zz}(u,v,\ldots)+\cdots\cdots$$

$$+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(u,v,\ldots)+2(x-a)(z-c)f''_{xz}(u,v,\ldots)+2(y-b)(z-c)f''_{yz}(u,v,\ldots)+\cdots\cdots$$

Così proseguendo si riconosce che si può scrivere *simbolicamente*

$$F^{(n)}(t)=\left((x-a)f'_x(u,v,\ldots)+(y-b)f'_y(u,v,\ldots)+\ldots\right)^n\ ,$$

convenendo di sostituire ad ogni prodotto $f'_x f'_y f'_y\ldots$, nello sviluppo della n^{ima} potenza, la derivata $f^{(n)}_{xyy\ldots}$, calcolata nel punto $(u,v,\ldots)$, che coincide con $(a,b,c,\ldots)$ o con $(x,y,z,\ldots)$ secondo che si fa $t=0$ o $t=1$. Ciò premesso, basta portare le espressioni di $F,F',F'',\ldots$ nella formola di Mac-Laurin

$$F(1)=F(0)+F'(0)+{}^1/_2F''(0)+{}^1/_6F'''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta)$$

per trovare

$$f(x,y,\ldots)=f(a,b,\ldots)+(x-a)f'_x(a,b,\ldots)+(y-b)f'_y(a,b,\ldots)+\cdots\cdots$$

$$+{}^1/_2\left((x-a)^2f''_{xx}(a,b,\ldots)+(y-b)^2f''_{yy}(a,b,\ldots)+\cdots+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b,\ldots)+\ldots\right)+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left((x-a)^nf^{(n)}_{xx\ldots x}(\xi,\eta,\ldots)+n(x-a)^{n-1}(y-b)f^{(n)}_{xx\ldots y}(\xi,\eta,\ldots)+\ldots\right)\ ,$$

dove $\xi,\eta,\zeta,\ldots$ sono numeri intermedii fra $a,b,c,\ldots$ ed $x,y,z,\ldots$, ri-

www.rcin.org.pl

spettivamente. È questa la *formola di Taylor* per le funzioni di più variabili. Ponendovi $a, b, c, \ldots$ uguali a zero si ottiene la *formola di Mac-Laurin*

$$f(x, y, \ldots) = f(0, 0, \ldots) + x f'_x(0, 0, \ldots) + y f'_y(0, 0, \ldots) + \cdots\cdots$$
$$+ {}^1/_2 (x^2 f''_{xx}(0, 0, \ldots) + y^2 f''_{yy}(0, 0, \ldots) + \cdots + 2xy f''_{xy}(0, 0, \ldots) + \cdots)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{n!} (x^n f^{(n)}_{xx\ldots x}(\theta x, \theta y, \ldots) + n y x^{n-1} f^{(n)}_{xx\ldots y}(\theta x, \theta y, \ldots) + \cdots\cdots),$$

mercè la quale, nell'ipotesi che l'ultimo termine tenda a zero per n crescente all'infinito, la funzione $f(x, y, \ldots)$ si trova sviluppata in una serie di forme algebriche, dei gradi rispettivi $0, 1, 2, 3, \ldots$

11. Ed ora veniamo alla discussione dei *minimi* e dei *massimi*. Quando si dice che un fatto qualsiasi avviene *intorno* ad un punto $(a, b, c, \ldots)$ si vuole affermare l'esistenza d'un numero positivo h, sia pure piccolissimo, tale che il fatto stesso si verifica per *tutti* i punti $(x, y, z, \ldots)$ soddisfacenti alle condizioni

$$|x - a| \leqq h \quad , \quad |y - b| \leqq h \quad , \quad |z - c| \leqq h \; , \ldots , \tag{8}$$

eccettuato al più lo stesso $(a, b, c, \ldots)$. Ciò premesso, si dice che nel punto $(a, b, c, \ldots)$ la funzione $f(x, y, z, \ldots)$ diventa minima (o massima), se intorno a questo punto nessun valore della funzione è minore (o maggiore) di $f(a, b, c, \ldots)$. In altri termini si deve poter trovare un numero positivo h, convenientemente piccolo, tale che per *tutti* i sistemi di valori di $x, y, z, \ldots$, soddisfacenti alle (8), si verifichi l'una o l'altra relazione

$$f(a, b, c, \ldots) \leqq f(x, y, z, \ldots) \quad , \quad f(a, b, c, \ldots) \geqq f(x, y, z, \ldots) \; . \tag{9}$$

Quando ciò avviene, è chiaro che la funzione precedentemente rappresentata con $F(t)$ è anch'essa minima o massima per $t = 0$. Infatti, in virtù delle (9), si ha

$$F(0) \leqq F(t) \qquad \text{o} \qquad F(0) \geqq F(t)$$

per tutti i valori di t, il cui valore assoluto non supera 1, giacchè per tali valori i numeri $u, v, w, \ldots$ soddisfano, come $x, y, z, \ldots$, alle condizioni (8). Inversamente, se per ogni punto $(x, y, z, \ldots)$, preso intorno ad $(a, b, c, \ldots)$, la funzione $F(t)$ è, per $t = 0$, sempre minima, o sempre massima, ciò vuol dire che, comunque si facciano tendere $x, y, z, \ldots$ ad $a, b, c, \ldots$, finisce per esser vera sempre la prima o sempre la seconda disuguaglianza (9). Così lo studio dei minimi e dei massimi di $f(x, y, z, \ldots)$ vien ricondotto allo studio dei minimi e dei massimi di tutte le funzioni $F(t)$, corrispondenti agli infiniti punti $(x, y, z, \ldots)$ che si possono arbitrariamente assumere intorno a ciascun punto $(a, b, c, \ldots)$.

www.rcin.org.pl

12. Se le variabili sono indipendenti, la nota condizione $F'(0)=0$, cioè

$$(x-a)f'_x(a,b,c,\ldots)+(y-b)f'_y(a,b,c,\ldots)+(z-c)f'_z(a,b,c,\ldots)+\cdots=0\,,$$

si scinde, per l'arbitrarietà di $x,y,z,\ldots$, in

$$f'_x(a,b,c,\ldots)=0\quad,\quad f'_y(a,b,c,\ldots)=0\quad,\quad f'_z(a,b,c,\ldots)=0\,,\ \ldots\ldots$$

Dunque *i sistemi di valori di* $x,y,z,\ldots$, *che possono rendere minima o massima la funzione* f *delle variabili indipendenti* $x,y,z,\ldots$, *si ottengono risolvendo il sistema*

$$f'_x(x,y,z,\ldots)=0\quad,\quad f'_y(x,y,z,\ldots)=0\quad,\quad f'_z(x,y,z,\ldots)=0\,,\ \ldots\ldots \tag{10}$$

Per riconoscere se si ha un minimo o un massimo si consideri la forma quadratica

$$F''(0)=(x-a)^2f''_{xx}(a,b,\ldots)+(y-b)^2f''_{yy}(a,b,\ldots)+(z-c)^2f''_{zz}(a,b,\ldots)+\cdots\cdots$$
$$+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b,\ldots)+2(x-a)(z-c)f''_{xz}(a,b,\ldots)+2(y-b)(z-c)f''_{yz}(a,b,\ldots)+\cdots\cdots$$

delle n variabili *indipendenti* $x-a,y-b,\ldots$, forma che ha per discriminante

$$H=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz}\cdots \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz}\cdots \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\,,$$

calcolato per $x=a,y=b,z=c,\ldots$. Questa importante funzione si chiama *hessiana* di f. In ciò che segue noi lasceremo in disparte il caso di $H=0$, e rammenteremo *) che, se H è diverso da zero, le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma quadratica $F''(0)$ sia essenzialmente *positiva* sono

$$f''_{xx}>0\quad,\quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}>0\,,\ \ldots\,,\ H>0\,. \tag{11}$$

Invece, perchè $F''(0)$ si conservi *negativa* per tutti i valori di $x-a,y-b,z-c,\ldots$, è necessario e sufficiente che si conservi positiva $-F''(0)$, e però che si abbia

$$f''_{xx}<0\quad,\quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}>0\,,\ \ldots\,,\ (-1)^nH>0\,. \tag{12}$$

Dunque, se per un sistema di valori $a,b,c,\ldots$ di $x,y,z,\ldots$, soddisfacenti alle (10), sono anche soddisfatte le condizioni (11), la funzione $f(x,y,z,\ldots)$ è *minima* per $x=a,y=b,z=c,\ldots$ È invece *massima* quando sono soddisfatte le (12); ma non è nè minima nè massima quando non sono soddisfatte

*) « *Analisi algebrica* » p. 76.

www.rcin.org.pl

nè le (11) nè le (12) mentre $H \gtrless 0$. Resta in dubbio il caso di $H=0$, che richiede ulteriori studii.

13. Se, per esempio, si vogliono i minimi ed i massimi d'una funzione di due variabili indipendenti $f(x,y)$, bisognerà cominciare dal cercare quei valori delle variabili, che annullano le derivate prime, per sostituirli poi nelle derivate seconde. Si potranno allora presentare le seguenti circostanze:

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''^{2}_{xy} > 0 \quad (\textit{minimo} \text{ se } f''_{xx} > 0, \textit{massimo} \text{ se } f''_{xx} < 0)$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad < 0 \quad (\textit{nè minimo, nè massimo})$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad = 0 \quad (\text{incertezza}).$$

Nemmeno per le funzioni di tre variabili x, y, z, indipendenti, si può avere un minimo o un massimo quando $f''_{xx} f''_{yy} - f''^{2}_{xy} < 0$; ma ciò accade anche se si ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^{2}_{xy} > 0$, tutte le volte che l'hessiana

$$H = f''_{xx} f''_{yy} f''_{zz} + 2 f''_{yz} f''_{zx} f''_{xy} - f''_{xx} f''^{2}_{yz} - f''_{yy} f''^{2}_{zx} - f''_{zz} f''^{2}_{xy}$$

non prende il segno di f''_{xx}. Nel caso opposto si ha un minimo o un massimo secondo che il segno comune è $+$ o $-$. Si noti che i minimi ed i massimi tendono a presentarsi sempre più raramente a misura che le variabili diventano più numerose.

14. Ora supponiamo che fra le n variabili esistano relazioni

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0 \quad , \quad \psi(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots\ldots , \tag{13}$$

in numero $m < n$, e siano tali che m variabili $u, v, w, \ldots$ si possano *) considerare come funzioni delle rimanenti $n-m$: queste indichiamole più specialmente con $x, y, z, \ldots$, ed assumiamole come variabili indipendenti. I valori delle variabili, che rendono minima o massima la funzione data

$$f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) ,$$

debbono annullare le derivate parziali prime, prese rispetto alle variabili indipendenti. In particolare, applicando la regola per la derivazione delle funzioni composte, si deve avere

$$f'_x + u'_x f'_u + v'_x f'_v + \cdots = 0 , \tag{14}$$

e le derivate $u'_x, v'_x, w'_x, \ldots$ si calcolano derivando rispetto ad x le relazioni (13), si deducono cioè, mediante la regola di Cramer, dal sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'_x + u'_x \varphi'_u + v'_x \varphi'_v + \cdots = 0 , \\ \psi'_x + u'_x \psi'_u + v'_x \psi'_v + \cdots = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{array} \right. \tag{15}$$

*) Delle condizioni di questa possibilità, fra le quali è la relazione (16), e dell'esistenza delle derivate prime di $u, v, w, \ldots$, si discorrerà più oltre.

www.rcin.org.pl

purchè si abbia

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \cdots \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} \gtrless 0 \; ; \tag{16}$$

ma, invece di portare i valori di $u'_x, v'_x, w'_x, \ldots$, ricavati dalle (15), nell'equazione (14), possiamo, aggregando questa al sistema (15), immediatamente scrivere la condizione di compatibilità

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_u & f'_v \cdots \\ \varphi'_x & \varphi'_u & \varphi'_v \cdots \\ \psi'_x & \psi'_u & \psi'_v \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Basta porre successivamente nella prima colonna le derivate parziali prime di $f, \varphi, \psi, \ldots$, rispetto alle $n-m$ variabili, che sono state scelte come indipendenti, per ottenere $n-m$ equazioni, sufficienti, insieme alle (13), per la determinazione di $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$ Adunque *i sistemi di valori di* x, y, z, ..., *che soddisfacendo alle* (13) *rendono minima o massima la funzione* f(x, y, z, ...), *sono fra quelli che annullano tutti i determinanti maggiori della matrice*

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \cdots \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \cdots \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} \; . \tag{17}$$

15. Per dare ai calcoli maggior simmetria si suole procedere nel seguente modo. Dal simultaneo annullamento dei maggiori determinanti della matrice (17) si deduce che una stessa relazione lineare lega gli elementi di ciascuna colonna. La relazione di cui si tratta involge necessariamente gli elementi della prima linea, perchè, se fossero linearmente vincolate le sole $\varphi', \psi', \ldots$, sarebbe nullo ogni determinante maggiore della matrice ottenuta sopprimendo in (17) la prima linea; ma ciò è contrario all'ipotesi (16). Quindi si può, per convenienti valori di $\lambda, \mu, \ldots$, scrivere

$$f'_x = \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x + \cdots \; , \; f'_y = \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y + \cdots \; , \; f'_z = \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z + \cdots \; , \; \cdots\cdots$$

In altri termini, per cercare i minimi ed i massimi della funzione f, quando le variabili sono legate dalle relazioni (13), *si porranno uguali a zero, non le derivate prime di* f, *sì bene quelle della funzione*

$$f(x, y, z, \ldots) - \lambda\varphi(x, y, z, \ldots) - \mu\psi(x, y, z, \ldots) - \cdots \; ,$$

e si otterranno così n equazioni, riducentisi a sole $n-m$ per eliminazione

www.rcin.org.pl

di $\lambda, \mu, \ldots$ Aggregando ad esse le (13) si costituirà un sistema di n equazioni, che servirà a determinare le n variabili.

16. **Esercizii:** *a)* Per *calcolare le lunghezze degli assi della conica*

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0 \ ,$$

conviene prima porre questa equazione sotto la forma, nota dalla Geometria analitica,

$$a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0) + \frac{D}{ab - h^2} = 0 \ ,$$

in cui x_0 ed y_0 sono le coordinate del centro, e D rappresenta il discriminante $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$. Si tratta evidentemente di trovare il minimo ed il massimo valore di $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, sapendo che le variabili x ed y sono legate dalla precedente equazione. Bisogna dunque, secondo le indicazioni del § 15, porre

$$x - x_0 = \lambda\big(a(x - x_0) + h(y - y_0)\big) \ , \quad y - y_0 = \lambda\big(h(x - x_0) + b(y - y_0)\big) \ .$$

Ora, se si moltiplica la prima uguaglianza per $x - x_0$, la seconda per $y - y_0$, si ottiene, sommando, $(ab - h^2)r^2 = -\lambda D$. D'altra parte si può determinare λ eliminando $x - x_0$ ed $y - y_0$ fra le medesime uguaglianze:

$$0 = \begin{vmatrix} a\lambda - 1 & h\lambda \\ h\lambda & b\lambda - 1 \end{vmatrix} = (ab - h^2)\lambda^2 - (a + b)\lambda + 1 \ .$$

Ne segue che i quadrati dei semi-assi sono le radici della seguente equazione in r^2:

$$r^4 + \frac{(a + b)D}{(ab - h^2)^2} r^2 + \frac{D^2}{(ab - h^2)^3} = 0 \ .$$

b) Ora proponiamoci di *calcolare gli assi della sezione fatta in un ellissoide da un dato piano diametrale.* Siano a, b, c le lunghezze dei semi-assi, ed α, β, γ i coseni degli angoli che le sezioni principali fanno col piano dato. Prendendo come assi coordinati gli assi dell'ellissoide, le equazioni di questa superficie e del piano dato sono rispettivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \ ,$$

e si tratta di trovare il minimo ed il massimo valore di $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Per quanto si è detto nel § 15 si può subito porre

$$x = \frac{\lambda x}{a^2} + \mu\alpha \quad , \quad y = \frac{\lambda y}{b^2} + \mu\beta \quad , \quad z = \frac{\lambda z}{c^2} + \mu\gamma \ .$$

Sommando queste uguaglianze, dopo averle rispettivamente moltiplicate per x, y, z, si ottiene $r^2 = \lambda$; quindi, sostituendo nell'equazione del piano i valori

$$x = \frac{\mu\alpha a^2}{a^2 - r^2} \quad , \quad y = \frac{\mu\beta b^2}{b^2 - r^2} \quad , \quad z = \frac{\mu\gamma c^2}{c^2 - r^2} \ ,$$

forniti dalle uguaglianze stesse, ed osservando che μ non può essere nullo, si perviene all'equazione

$$\frac{a^2\alpha^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2\beta^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{r^2 - c^2} = 0 \ ,$$

www.rcin.org.pl

del secondo grado in r^2, le cui radici sono i quadrati dei semi-assi cercati. Se dal centro, perpendicolarmente al piano di ciascuna sezione, si erigono segmenti uguali ai semi-assi della sezione stessa, gli estremi di tali segmenti stanno sopra una superficie del quarto ordine, importantissima nello studio dell'ottica *). Poichè le coordinate degli estremi dei segmenti anzidetti sono $x=\pm\alpha r, y=\pm\beta r, z=\pm\gamma r$, basta sostituire nell'ultima equazione i valori di α, β, γ, per ottenere l'equazione della superficie

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0\ ,$$

che in forma intera si riduce a

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-((b^2+c^2)a^2x^2+(c^2+a^2)b^2y^2+(a^2+b^2)c^2z^2)+a^2b^2c^2=0\ .$$

È questa la *superficie delle onde.* Dall'esame di talune sue proprietà fu condotto Hamilton a prevedere il singolare fenomeno della *rifrazione conica*, confermato poi dall'esperienza. In simili scoperte teoriche **) di fatti naturali, sfuggiti per secoli all'osservazione diretta, sta la prova migliore dell'alta importanza delle matematiche.

c) Il calcolo della *minima distanza di due rette* conduce a cercare, più generalmente, il minimo valore di

$$r^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\ ,$$

sapendo che le $2n$ variabili soddisfano alle $2n-2$ condizioni

$$\frac{x_1-a_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-a_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{x_n-a_n}{\alpha_n}\ ,\quad \frac{y_1-b_1}{\beta_1}=\frac{y_2-b_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{y_n-b_n}{\beta_n}\ ,$$

dimodochè r^2 è in realtà funzione di due sole variabili indipendenti. Assumiamo come tali i valori u e v delle due serie di rapporti, ed osserviamo che, sostituendo $x_i=\alpha_i u+a_i, y_i=\beta_i v+b_i, (i=1,2,3,\ldots,n)$, nell'espressione di r^2, questa diventa

$$r^2=au^2+bv^2+c+2fv+2gu+2huv\ , \tag{18}$$

dove si è posto

$$a=\sum_1^n\alpha_i^2\ ,\quad b=\sum_1^n\beta_i^2\ ,\quad h=-\sum_1^n\alpha_i\beta_i\ ,$$

$$-f=\sum_1^n(a_i-b_i)\beta_i\ ,\quad g=\sum_1^n(a_i-b_i)\alpha_i\ ,\quad c=\sum_1^n(a_i-b_i)^2\ .$$

Qui si noti che i determinanti

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}\ ,\quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}\ ,$$

*) Vedi, per esempio, la « *Théorie mathématique de la lumière* » di Poincaré, p. 296.

**) Delle quali si hanno altri bellissimi esempii in Fisica ed in Astronomia. Vedi una comunicazione di G. Cesàro all'Accademia del Belgio (*Bulletins*, 1891, p. 503).

www.rcin.org.pl

rappresentano *) i quadrati delle matrici

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \dots & a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \quad \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \quad \dots & \beta_n \end{vmatrix} .$$

Perchè r^2 diventi minimo o massimo sono (§ 12) necessarie le condizioni

$$au + hv + g = 0 \quad , \quad hu + bv + f = 0 \ , \tag{19}$$

verificate le quali l'espressione (18) si riduce a

$$r^2 = gu + fv + c \ , \tag{20}$$

in virtù del teorema di Eulero (§ 7). Il determinante hessiano di r^2 è $ab - h^2$, e siccome tanto a quanto $ab - h^2$ sono somme di quadrati, si può asserire che si ha effettivamente un minimo. Intanto da (19) e (20) si deduce, eliminando u e v,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} r^2 .$$

Dunque il minimo cercato è

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \dots & a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \quad \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \quad \dots & \beta_n \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{vmatrix}^2} .$$

d) Altri calcoli di minime distanze (punto e piano, o punto e retta nel piano e nello spazio) conducono a *cercare il minimo valore della somma dei quadrati di* n *variabili, soddisfacenti ad* m < n *equazioni lineari.* Siano

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \end{cases} \tag{21}$$

le equazioni, nessuna delle quali sia conseguenza delle altre: ciò esige che i determinanti maggiori della matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{vmatrix}$$

*) « *Analisi algebrica* » p. 23.

www.rcin.org.pl

non siano tutti nulli, e per conseguenza che sia diverso da zero il quadrato

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \cdots c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \cdots c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} \cdots c_{mm} \end{vmatrix}$$

della matrice stessa. Ciò premesso, per trovare i minimi ed i massimi della funzione $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, si è (§ 15) condotti a porre

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1} \\ x_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn} \, . \end{cases} \tag{22}$$

Sommando queste equazioni, dopo averle moltiplicate per $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si ottiene

$$r^2 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_m k_m \, , \tag{23}$$

e tutto si riduce a calcolare i coefficienti λ. Ora, moltiplicando le (22) per a_{i1}, $a_{i2}, \ldots, a_{in}$, poi sommando, si trova

$$k_i = \lambda_1 c_{i1} + \lambda_2 c_{i2} + \cdots + \lambda_m c_{im} \, .$$

Dunque i coefficienti λ sono determinati dal sistema

$$\begin{cases} k_1 = \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{12} + \cdots + \lambda_m c_{1m} \\ k_2 = \lambda_1 c_{21} + \lambda_2 c_{22} + \cdots + \lambda_m c_{2m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k_m = \lambda_1 c_{m1} + \lambda_2 c_{m2} + \cdots + \lambda_m c_{mm} \, , \end{cases}$$

che ammette una soluzione sola. Del resto è inutile risolvere questo sistema, giacchè basta esprimerne la compatibilità con la relazione (23) per ottener subito l'equazione

$$0 = \begin{vmatrix} r^2 & k_1 & k_2 & \ldots k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \cdots c_{mm} \end{vmatrix} \, ,$$

dalla quale si ricava il minimo valore cercato:

$$r^2 = -\frac{1}{C} \begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 & \ldots k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \cdots c_{mm} \end{vmatrix} \, .$$

www.rcin.org.pl

e) Nelle applicazioni si è spesso condotti, per determinare un certo numero di quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a stabilire equazioni lineari, nelle quali i coefficienti ed i termini noti vengono forniti dall'osservazione diretta. Basterebbero n equazioni per la determinazione delle incognite se, per l'inevitabile imperfezione delle misure, non ne risultassero valori necessariamente inesatti delle x. Spinti ad eseguire nuove misure, si finisce per costituire un sistema (21) con un numero m di equazioni, di gran lunga superiore a quello delle incognite, ed il problema che allora ci si presenta è il seguente: *come far concorrere tutte le equazioni ottenute alla determinazione la più probabilmente esatta dei valori delle incognite?* È la *teoria delle probabilità*, uno dei più interessanti rami della Matematica, che dà la risposta a simile questione, insegnando che, nell'impossibilità di *render nulli tutti gli errori* (vale a dire di trovare valori delle x che annullino le differenze fra i primi ed i secondi membri di tutte le m equazioni), bisogna *render minima la somma dei loro quadrati.* Da questa indicazione derivano, per la determinazione delle x, alcuni procedimenti di calcolo, che costituiscono quello che si suol chiamare il *metodo dei minimi quadrati.* In sostanza tutto si riduce a render minima la funzione di n variabili indipendenti

$$\sum_1^m (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - k_i)^2 ,$$

e però, derivando successivamente rispetto ad $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bisogna che sia

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \cdots + c_{n1}x_n = k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_na_{n1} \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{n2}x_n = k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_na_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n = k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_na_{nn} . \end{cases}$$

È questo il sistema che porge per le x i valori più accettabili. Per meglio spiegarsi tutto ciò è bene limitarsi al caso d'una sola quantità incognita x, per determinare la quale siano state prese successivamente n misure $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pochissimo differenti tra loro. Qui bisogna render minima la somma

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2 ,$$

per la qual cosa basta prendere

$$x - a_1 + x - a_2 + \cdots + x - a_n = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) :$$

è proprio quello che si suol fare comunemente *).

---

*) Quètelet «*Théorie des probabilités*» p. 47.

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

CALCOLO DIFFERENZIALE

V. LA DIFFERENZIAZIONE.

Funzioni d'una variabile.

1. Come per *infinitamente grande* si vuole intendere un numero che tende ad oltrepassare qualunque limite, così ogni numero variabile, che ha per limite zero, si chiama *infinitamente piccolo*, o *infinitesimo*. Due infinitesimi si dicono dello stesso ordine quando il loro rapporto tende ad un limite finito, diverso da zero. Se invece il rapporto d'un infinitesimo β ad un infinitesimo α tende a zero (nel qual caso β è uguale al prodotto di α per un altro infinitesimo), si dice che β è di *ordine superiore* ad α. Nel caso opposto, quando cioè il detto rapporto cresce all' infinito, β è di *ordine inferiore* ad α. Non è sempre possibile decidere se due infinitesimi sono, o pur no, del medesimo ordine, perchè non sempre il loro rapporto tende ad un limite. Così $\beta = \alpha \operatorname{sen} \frac{1}{\alpha}$ è infinitesimo insieme ad α, ma non si sa dire se tende a zero come α, o più rapidamente di α. Nondimeno, tutte le volte che il rapporto di β ad α, preso in valore assoluto, oscilla fra due limiti positivi, si può ben dire che β ha l'ordine di α. Quando si hanno più infinitesimi da paragonare fra loro, si usa scegliere fra essi, arbitrariamente, un *infinitesimo principale*, e considerare i rapporti degli altri all'infinitesimo prescelto ed alle sue potenze. Si chiamano allora infinitesimi del primo ordine tutti quelli che hanno l'ordine dell'infinitesimo principale α; più generalmente, si chiama infinitesimo dell'ordine n ogni infinitesimo che ha l'ordine di α^n. Per esempio $\log(1+\alpha)$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, *ecc.*, sono infinitesimi del *primo* ordine fintantochè α è l'infinitesimo principale. Similmente $1-\cos\alpha$ è del *secondo* ordine, $\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ del *terzo*, $\operatorname{tg}(\operatorname{sen}\alpha) - \operatorname{sen}(\operatorname{tg}\alpha)$ del *settimo* *), *ecc.* Del resto si noti che non sempre si può assegnare l'ordine d'un infinitesimo.

*) Vedi, in proposito, un interessante esercizio in *Mathesis* (1898, p. 31).

www.rcin.org.pl

Così, per esempio, se α è un infinitesimo, anche $e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$ ed $1:\log\alpha$ sono infinitesimi; ma, mentre (II, 31) il rapporto del primo ad α^n tende a zero qualunque sia n, il rapporto analogo, per l'altro, cresce all'infinito, dimodochè non si sa dire quanto sia grande l'ordine del primo, e quanto, invece, sia piccolo l'ordine del secondo. Gli infinitesimi

$$\ldots\ldots, e^{-e^{\frac{1}{\alpha^2}}}, e^{-\frac{1}{\alpha^2}}, \ldots, \alpha - \operatorname{sen}\alpha, 1-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, \sqrt{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha^2}}, \frac{1}{\log\log\frac{1}{\alpha^2}}, \ldots$$

si trovano ordinati in modo che ciascuno è infinitesimo rispetto a tutti quelli che lo seguono, in modo cioè che, procedendo da sinistra verso destra, l'ordine, partendo da valori grandi quanto si vuole, tende a zero decrescendo sempre. Analogamente si classificano gli infinitamente grandi. Non si creda, tuttavia, che qualunque numero, infinitamente piccolo o infinitamente grande, debba necessariamente trovare il suo posto in simili scale di paragone. Così, per esempio, se l'infinitesimo β è tale che, come $1:\log\alpha$, il suo rapporto a qualunque potenza di α (con esponente positivo) oltrepassa ogni limite, non si può dire quale sia l'ordine n di $\alpha\beta$. Infatti da una parte è chiaro che n dovrebbe superare 1, e dall'altra ciò non può accadere, perchè il rapporto di $\alpha\beta$ ad α^n cresce indefinitamente per qualunque $n>1$. In un certo senso (I, 2) si potrebbe dire che, nella scala di paragone, costituita dalle potenze di α, l'infinitesimo $\alpha\beta$ sta *alla sinistra* di α. Similmente si cercherebbe invano il posto da assegnare all'infinitesimo β, legato ad α dalla relazione

$$\beta = \alpha^2 \log\frac{\alpha}{\beta}.$$

Infatti, posto $\alpha=\beta t$, si ottiene $\alpha = 1:t\log t, \beta = 1:t^2\log t$, e si riconosce che t deve crescere all'infinito affinchè α e β tendano a zero; quindi, osservando che $\beta:\alpha^n = t^{n-2}(\log t)^{n-1}$, si vede che questo rapporto cresce indefinitamente per $n \geqq 2$, e tende a zero per $n<2$. Dunque β sta, per così dire, *alla destra* di α^2, cioè tende a zero meno rapidamente di α^2, ma più rapidamente di qualunque α^n, per $n<2$.

2. **Proposizione fondamentale.** Dire che *due infinitesimi differiscono per un infinitesimo di ordine superiore,* o che *il loro rapporto tende all'unità*, è affermare due fatti che sostanzialmente si equivalgono, perchè ciascuna delle uguaglianze

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=0 \quad , \quad \lim\frac{\beta}{\alpha}=1$$

è una conseguenza dell'altra. Ciò premesso, è facile dimostrare il seguente teorema, fondamento del Calcolo differenziale: *resta invariato il limite del rapporto di due infinitesimi, quando questi vengono alterati di quantità infinitesime d'un ordine superiore.* Infatti, per

www.rcin.org.pl

calcolare il limite di $\beta:\alpha$, se β' ed α' differiscono da β ed α, rispettivamente, per infinitesimi di ordine superiore, si può invece calcolare il limite seguente:

$$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=\lim\frac{\beta'}{\beta}\lim\frac{\beta}{\alpha}\lim\frac{\alpha}{\alpha'}=\lim\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

3. Ora supponiamo di avere l'eguaglianza tra infinitesimi $\alpha=\beta$, della quale si debba fare uso dividendo i due membri per un conveniente infinitesimo γ, in modo da ottenere, *passando al limite*, l'eguaglianza $a=b$ fra quantità invariabili. L'utilità del teorema dimostrato sta in ciò che l'eguaglianza $\alpha=\beta$, spesso complicata, ed inaccessibile alle ordinarie regole del calcolo dei limiti, si può semplificare sopprimendo, in ciascun membro, qualunque parte, riconosciuta infinitesima d'un ordine superiore alla parte che rimane. Si ottiene così un'altra eguaglianza tra infinitesimi $\alpha'=\beta'$, generalmente *inesatta*; ma ciò non importa per l'uso che se ne deve fare, giacchè, dividendo i due membri per γ (o, se si vuole, per qualche altro infinitesimo γ', che da γ differisce per un infinitesimo di ordine superiore), si finirà sempre per trovare, passando al limite, l'eguaglianza esatta $a=b$. Ma, si noti, non sta in ciò l'essenza del Calcolo differenziale, che risiede invece nell'uso sistematico d'un certo simbolo, mediante il quale si può fare in modo da essere sicuri *a priori* che l'eguaglianza $\alpha'=\beta'$ è anch'essa esatta, vale a dire che, nel cercare infinitesimi α' e β' da sostituire rispettivamente ad α e β, si trascurano, senza avvedersene, infinitesimi uguali nei due membri, e si riesce in tal modo a metter la mano, per così dire, sugli infinitesimi $\alpha'=a\gamma'$, $\beta'=b\gamma'$. Ed allora, essendo l'eguaglianza $\alpha'=\beta'$ immediatamente riducibile ad $a=b$, *non si ha più bisogno del passaggio al limite*. Sparisce così il *calcolo* dei limiti, grazie al detto simbolo, per far posto al Calcolo differenziale, che pur si fonda sul *concetto* di limite.

4. Dal punto di vista accennato in ultimo luogo si può ben dire che il Calcolo differenziale è tutto dovuto al genio di Leibnitz; e, del resto, questa scienza si trova oggi saldamente stabilita nella forma ideata da Leibnitz, con le stesse denominazioni e gli stessi segni, dovuti, più che ad una scelta fortunata, alla perspicacia dell'inventore. La cura che questi poneva nella scelta dei simboli ci è rivelata dal fatto *) che, nel confrontare il suo metodo con quello di Newton, e nell'affermarne la superiorità, egli opinava « essere la segnatura parte non piccola dell'arte d'inventare ». Anche recentemente l'importanza delle notazioni e della nomenclatura è stata messa in rilievo nelle « *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen* » da Mach, il quale « considera il linguaggio ed un appropriato sistema di simboli e denominazioni tecniche, non solo come organi indispensabili per la cooperazione tra gli investigatori e per l'accumulazione e trasmissione dei risultati man mano

*) Mansion « *Résumé*, etc. » p. 209.

www.rcin.org.pl

ottenuti, da una generazione alla successiva, ma anche e sopratutto come unico mezzo efficace a sgravare la memoria e l'intelligenza umana da ogni peso e lavoro inutile, rendendo possibile la loro sempre crescente utilizzazione per le funzioni più importanti ed essenziali. Chi si occupa di studii matematici si trova spesso dominato dall'impressione che i suoi simboli e le sue formole s'incarichino quasi di lavorare per lui, o, per usare la famosa frase di Eulero, che la sua matita vinca di perspicacia il suo cervello. Per quanto possa parere strano, dice Mach, la grande potenza delle scienze matematiche consiste sopratutto nel fatto, che esse sono riuscite a risparmiare alla mente ogni lavoro inutile ed a spingere fino all'estremo l'economia degli sforzi intellettuali. Ed allo stesso ideale tendono, secondo lui, anche le scienze fisiche, specialmente nei rami più progrediti » *).

5. **Il primo differenziale.** Dalla definizione della derivata d'una funzione y di x si deduce $\delta y = y'\delta x + \rho\delta x$, per ciascun valore di x, con ρ tendente a zero quando, fissato x, si fa tendere a zero δx. Ora, poichè la differenza fra δy ed $y'\delta x$ è infinitesima d'un ordine superiore a δx, è lecito sostituire, in virtù del teorema fondamentale, $y'\delta x$ a δy, nelle ricerche di limiti di rapporti; e noi ben presto ci accorgeremo dei grandi vantaggi di questa sostituzione. La quantità $y'\delta x$, nell'ipotesi che la variabile indipendente sia x, la rappresenteremo con dy, e la chiameremo il *differenziale* di y. Adunque *si chiama differenziale d'una funzione il prodotto della derivata della funzione per l'incremento infinitesimo, arbitrariamente attribuito alla variabile indipendente.* Da questa definizione si deducono subito le conseguenze:

a) il differenziale della variabile indipendente x non è che l'incremento arbitrario δx, supposto variabile e tendente a zero per ciascun valore di x. Infatti, se, $y = x$, è $y' = 1$, e la definizione del differenziale (cioè $dy = y'\delta x$) dà $dx = \delta x$;

b) ora l'eguaglianza di definizione diventa $dy = y'dx$, e se ne ricava

$$y' = \frac{dy}{dx}\,. \tag{1}$$

È con questa nuova segnatura che la derivata si adopera in Calcolo differenziale: così le derivate ci si presenteranno come *rapporti*, e non più come *limiti di rapporti* tra infinitesimi;

c) più generalmente *il rapporto dei differenziali di due funzioni rappresenta la derivata della prima funzione rispetto alla seconda.* Infatti, se $y = f(u)$, dove u è una funzione della variabile indipendente x, si ha

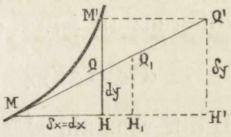
$$dy = y'dx = f'(u)u'dx = f'(u)du \quad , \quad f'(u) = \frac{dy}{du}\,.$$

6. **Interpretazione geometrica.** Sulla curva rappresentata dall'equazione

*) Da una recensione di G. Vailati (*Rivista sperimentale di Freniatria*, 1896).

www.rcin.org.pl

$y = f(x)$ si consideri, in vicinanza d'un punto fisso M, di ascissa x, un punto M′, la cui ascissa sia $x + \delta x$. Supporre δx infinitesimo significa supporre M′ mobile lungo la curva, e tendente a confondersi con M. Siano H e Q i punti nei quali l'ordinata di M′ incontra due rette condotte per M, la prima parallelamente all'asse x, l'altra tangenzialmente alla curva. Se la variabile indipendente è x, è chiaro che si ha



$$MH = dx = \delta x \ , \ HQ = dy \ , \ HM' = \delta y \ .$$

Sostituire dy a δy significa dunque trascurare QM′, ossia sostituire Q ad M′ per tutte le posizioni di M′ intorno ad M, e per conseguenza significa *sostituire la tangente alla curva* in prossimità di ciascun punto. Del resto, qualunque sia la variabile indipendente, *il punto* $(x + dx, y + dy)$ *appartiene sempre alla tangente*, come $(x + \delta x, y + \delta y)$ appartiene alla curva. Ancora si noti che, se ξ è un numero compreso fra x ed $x + \delta x$, si ha

$$dy = f'(x)dx \quad , \quad \delta y = f'(\xi)dx \ ,$$

dimodochè la sostituzione del *differenziale* dy all'*incremento* δy equivale anche a prendere, invece di ξ, variabile per ciascun valore di x, il valore stesso di x.

7. **Regole per la differenziazione.** Per *differenziare*, ossia per calcolare il differenziale d'una funzione di x, basta, in virtù della definizione stessa del differenziale, calcolare la derivata della funzione, e moltiplicarla per dx. In tal modo si ottiene

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx \ , \ de^x = e^x dx \ , \ d\,\mathrm{sen}\,x = \cos x\,dx \ , \ d\cos x = -\mathrm{sen}\,x\,dx \ ,$$

$$d\log x = \frac{dx}{x} \ , \ d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x} \ , \ d\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{dx}{1+x^2} \ , \ d\,\mathrm{arcsen}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ ecc.$$

anche quando x non è la variabile indipendente. Dopo ciò le note regole di derivazione si traducono facilmente in altrettante regole di differenziazione. Così, per esempio, la somma di due o più funzioni si differenzia sommando i differenziali delle parti; il prodotto di due funzioni si differenzia moltiplicando ciascuna funzione per il differenziale dell'altra, e sommando i risultati; ecc. Infatti si ha

$$d(u+v) = (u+v)'dx = (u'+v')dx = u'dx + v'dx = du + dv \ ,$$

$$duv = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx = u\,dv + v\,du \ ,$$

$$d\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{vu' - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2} \ ; \ ecc.$$

8. **Differenziali successivi.** Il differenziale dx della variabile indipendente, arbitrario per ciascun valore di x, si può considerare come il prodotto d'un infinitesimo α, *indipendente da* x, per una funzione di x, arbitraria: $dx = \alpha\chi(x)$. A questa si può nuovamente applicare la differenziazione, e si ottiene così il secondo differenziale di x, che si rappresenta con

www.rcin.org.pl

d^2x, ed ha il valore

$$d^2x = d\alpha\chi = \alpha d\chi = \alpha\chi' dx = \alpha^2\chi\chi' .$$

Continuando a differenziare si trovano analogamente, l'un dopo l'altro, i differenziali *terzo*, *quarto*, e così via:

$$d^3x = \alpha^3(\chi\chi'^2 + \chi^2\chi'') \quad , \quad d^4x = \alpha^4(\chi\chi'^3 + 4\chi^2\chi'\chi'' + \chi^3\chi''') \ , \ \ldots\ldots$$

Il differenziale n^{imo} di x, ossia il risultato di n differenziazioni, applicate successivamente, si rappresenta con d^nx, ed è, in generale, un infinitesimo dell'ordine n^{imo}, quando α è l'infinitesimo principale. Come si vede, i risultati delle successive differenziazioni si vanno rapidamente complicando, e molti beneficii del Calcolo andrebbero perduti se si dovesse mantenere a $\chi(x)$ la sua arbitrarietà. Conviene invece prendere $\chi(x) = 1$, perchè in tal guisa si ha

$$d^2x = 0 \quad , \quad d^3x = 0 \quad , \quad d^4x = 0 \ , \ \ldots\ldots \ , \qquad (2)$$

e tutti i calcoli, come presto si vedrà, si semplificano notevolmente. È questa la convenzione fondamentale, che si esprime così: *il primo differenziale della variabile indipendente si suppone indipendente dalla variabile stessa.* Ciò premesso, è facile calcolare i differenziali successivi d'una funzione qualunque:

$$d^2y = ddy = d(y'dx) = dy'.dx = y''dx.dx = y''dx^2 \ ,$$

$$d^3y = dd^2y = d(y''dx^2) = dy''.dx^2 = y'''dx.dx^2 = y'''dx^3 \ , \ ecc.$$

In generale $d^ny = y^{(n)}dx^n$, convenendo di scrivere dx^n per $(dx)^n$. Si giunge in tal modo alla relazione

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \ , \qquad (3)$$

che include la (1) per $n = 1$. Adunque *la derivata* n^{ima} *d'una funzione rispetto alla variabile* indipendente *è uguale al quoziente del differenziale* n^{imo} *della funzione per la* n^{ima} *potenza del differenziale della variabile indipendente.* Senonchè, mentre per $n = 1$ si può (§ 5, *c*), in questo enunciato, sopprimere la restrizione che la variabile sia indipendente, altrettanto non si può fare per $n > 1$, perchè nelle successive differenziazioni di dy sono state adoperate le (2), non più vere quando non è x la variabile indipendente.

9. Ed ora siamo in grado di capire ciò che nel § 3 è stato solamente accennato, vale a dire che si può esser sicuri dell'esattezza dell'eguaglianza tra infinitesimi $\alpha' = \beta'$ (ottenuta trascurando infinitesimi di ordine superiore in $\alpha = \beta$) *tutte le volte che in essa non compariscono altri infinitesimi se non quelli che risultano da differenziazioni*, purchè l'eguaglianza stessa (ridotta, s'intende, a forma intera) sia resa *omogenea*, vale a dire che vi si lascino i soli termini, infinitesimi dell'ordine minimo n. Infatti in ogni caso si

www.rcin.org.pl

potrebbe, per trovare un'eguaglianza esatta, dividere i due membri per dx^n, e passare al limite; ma, si noti, questo passaggio al limite è diventato inutile, *perchè i rapporti fra potenze di differenziali, infinitesime dello stesso ordine, sono uguali ai proprii limiti*, dimodochè l'eguaglianza esatta da trovare è appunto $\alpha' : dx^n = \beta' : dx^n$, ossia $\alpha' = \beta'$. Qui sta tutto il segreto del Calcolo differenziale. Inoltre l'*omogeneità* delle relazioni definitive tra differenziali ci offre un mezzo di controllo, utile nella pratica del Calcolo.

10. **Cambiamento della variabile indipendente**. Poichè la formola (3), per $n > 1$, implica l'ipotesi che la variabile x è *indipendente*, se si vuole assumere (come spesso se ne sente il bisogno) un'altra variabile indipendente, è innanzi tutto necessario restituire alla formola stessa tutta la sua generalità, e procedere poi al cambiamento di variabile. Per questo basta ripetere le successive derivazioni di dy, eseguite nel § 8, ma senza servirsi delle (2). In tal modo si ottiene

$$d^2y = d(y'dx) = dy'dx + y'ddx = y''dx^2 + y'd^2x \;;$$

poi

$$d^3y = y'''dx^3 + 3y''dx\,d^2x + y'd^3x \;,$$

$$d^4y = y^{\text{IV}}dx^4 + 6y'''dx^2d^2x + 3y''d^2x^2 + 4y''dx\,d^3x + y'd^4x \;;\; ecc.$$

Dalla prima eguaglianza si trae

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} - y'\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} \;. \tag{4}$$

Similmente

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} - 3y''\frac{d^2x}{dx^2} - y'\frac{d^3x}{dx^3} = \frac{dx^2d^3y - 3dx\,d^2x\,d^2y + 3dy\,d^2x^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5} \;; \tag{5}$$

ecc. Ai medesimi risultati si giunge più rapidamente differenziando una o più volte di seguito i due membri della (1).

11. **Esercizii**: *a)* Se in un'espressione, che racchiude le derivate di y, prese rispetto ad una variabile x, si vuole che compariscano invece le derivate relative ad un'altra variabile t, le formole trovate in ultimo luogo possono far subito conoscere le espressioni da sostituire ad $y', y'', \ldots$, quando sia data x in funzione di t, e per conseguenza sian note le derivate $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$ Infatti si ha

$$\frac{dx}{dt}y' = \frac{dy}{dt} \quad , \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 y'' = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \;,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^5 y''' = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3} \;;\; ecc.$$

Invece, quando è data la nuova variabile t in funzione di x, e si vuole che sia *indipendente*, si ha sempre

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}t' \;; \tag{6}$$

poi, per calcolare y'', si può fare uso della (4), dopo avere osservato che, do-

www.rcin.org.pl GABINET MATEMATYCZ Towarzystwa Naukowego Warszaws

vendo essere $d^2t=0$, si ha $t''dx^2+t'd^2x=0$, e però

$$dx=\frac{dt}{t'}\ ,\quad d^2x=-\frac{t''dt^2}{t'^3}\ . \tag{7}$$

Dopo ciò la (4) diventa

$$y''=\frac{d^2y}{dt^2}t'^2+\frac{dy}{dt}t''\ ; \tag{8}$$

ma più agevolmente si stabilisce questa relazione col derivare rispetto ad x i due membri di (6). Derivando analogamente la (8) si giunge subito al risultato

$$y'''=\frac{d^3y}{dt^3}t'^3+3\frac{d^2y}{dt^2}t't''+\frac{dy}{dt}t'''\ .$$

Con maggior fatica si deduce questo dalla (5), dopo avere aggregato alle (7) la formola

$$d^3x=\frac{3t''^2-t't'''}{t'^5}dt^3\ , \tag{9}$$

che si ottiene scrivendo $d^3t=0$, o pure differenziando la seconda formola (7); *ecc.*

b) Supponiamo che per variabile indipendente si voglia assumere la stessa funzione y, proponendosi di calcolare le derivate $x', x'', \ldots$ di x rispetto ad y. Le formole (7), (9), *ecc.*, danno

$$x'=\frac{1}{y'}\ ,\quad x''=-\frac{y''}{y'^3}\ ,\quad x'''=\frac{3y''^2-y'y'''}{y'^5}\ ,\ \ldots\ldots$$

Queste, del resto, dalla seconda in poi, si ottengono più rapidamente derivando successivamente la prima. Si può anche far uso delle formole (4), (5), *ecc.*, introducendovi l'ipotesi dell'indipendenza di y mercè le uguaglianze $d^2y=0$, $d^3y=0, \ldots$. Si giunge così alle formole

$$y'=\frac{1}{x'}\ ,\quad y''=-\frac{x''}{x'^3}\ ,\quad y'''=\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5}\ ,\ \ldots\ldots\ ,$$

che non differiscono dalle precedenti se non per lo scambio di x con y. È del resto evidente che queste relazioni debbono essere simmetriche rispetto alle due variabili; ed effettivamente si può dar loro la forma

$$x'y'=1\ ,\quad x''x'^{-\frac{3}{2}}+y''y'^{-\frac{3}{2}}=0\ ,\quad \frac{3x''^2-2x'x'''}{x'^3}+\frac{3y''^2-2y'y'''}{y'^3}=0\ ,\ \ldots\ldots$$

c) È facile constatare che $dx\,d^2y-dy\,d^2x$ si può esprimere mediante le derivate prime e seconde di x e di y, relative ad una variabile qualunque t, ed il solo differenziale *primo* di t; e però, per renderne più agevole il calcolo nei varii casi particolari, si può sempre supporre t variabile indipendente, ed essere sicuri *a priori* che il risultato rimarrà valido anche quando non è t la variabile indipendente. Infatti si ha

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt}dt & \frac{d^2x}{dt^2}dt^2+\frac{dx}{dt}d^2t \\ \frac{dy}{dt}dt & \frac{d^2y}{dt^2}dt^2+\frac{dy}{dt}d^2t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix}dt^3$$

ossia

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt^3\ .$$

www.rcin.org.pl

Questa osservazione è più generalmente applicabile a qualunque determinante, di ordine n, in cui la ν^{ima} colonna è costituita dai differenziali ν^{imi} di n funzioni. Per esempio

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} dt^6 .$$

Tornando a $dx d^2y - dy d^2x$, supponiamo che x ed y siano le coordinate cartesiane d'un punto, nel piano, e proponiamoci di trasformare in coordinate polari, r e θ, l'espressione considerata. Giovandosi dell'osservazione precedente si può, *per semplificare i calcoli*, prendere θ come variabile indipendente, nel qual caso, essendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, si ha

$$dx = \cos\theta . dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta . d\theta \quad , \quad d^2x = \cos\theta . d^2r - 2\,\mathrm{sen}\,\theta . dr d\theta - r\cos\theta . d\theta^2 ,$$

$$dy = \mathrm{sen}\,\theta . dr + r\cos\theta . d\theta \quad , \quad d^2y = \mathrm{sen}\,\theta . d^2r + 2\cos\theta . dr d\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta . d\theta^2 ;$$

quindi si vede che

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dr & d^2r - rd\theta^2 \\ rd\theta & 2dr d\theta \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix} ,$$

e finalmente

$$dx d^2y - dy d^2x = r^2 d\theta^3 + 2d\theta dr^2 - rd\theta d^2r = (r^2 + 2r'^2 - rr'') d\theta^3 . \quad (10)$$

Quantunque ottenuto supponendo $d^2\theta = 0$, questo risultato è già libero dall'ipotesi che θ sia la variabile indipendente, purchè per r'' s'intenda, non $\frac{d^2r}{d\theta^2}$, ma $\frac{d^2r}{d\theta^2} - r' \frac{d^2\theta}{d\theta^2}$.

d) Proponiamoci di trasformare l'espressione (III, 32, *e*) del *raggio di curvatura*:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} .$$

Questa formola non suppone necessariamente che la variabile indipendente sia x, purchè si abbia cura di prendere y'' sotto la forma generale (4). Così, adoperando anche la (1), si trova

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x} .$$

In coordinate polari, siccome

$$dx^2 + dy^2 = (\cos\theta . dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta . d\theta)^2 + (\mathrm{sen}\,\theta . dr + r\cos\theta . d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 ,$$

si ha, ricordando la (10), e dividendo per $d\theta^3$ numeratore e denominatore,

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} .$$

www.rcin.org.pl

A questa, poi, si può dare una forma più semplice, ed utile nelle applicazioni, supponendo data la curva mediante un'equazione della forma $\frac{1}{r}=f(\theta)$, e cercando di esprimere ρ in funzione di f, f', f''. Si ottiene subito

$$\frac{r'}{r}=-\frac{f'}{f} \quad , \quad r^2+r'^2=\frac{f^2+f'^2}{f^4} \quad , \quad r'^2-rr''=\frac{ff''-f'^2}{f^4} \; ;$$

quindi

$$\rho=\frac{(f^2+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{(f+f'')f^3} \, .$$

c) Ad un'altra notevole forma di ρ si giunge adoperando la variabile s, che soddisfa alla relazione $ds^2=dx^2+dy^2$, e che in seguito si vedrà rappresentare la *lunghezza dell'arco*, contato a partire da un punto fisso. Dall'identità

$$(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2+(dx\,d^2x+dy\,d^2y)^2=(dx^2+dy^2)(d^2x^2+d^2y^2) \; ,$$

dopo avere osservato che $ds\,d^2s=dx\,d^2x+dy\,d^2y$, si ricava

$$(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2=(d^2x^2+d^2y^2-d^2s^2)\,ds^2 \; ;$$

quindi

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2 .$$

Quando s è la variabile indipendente, il secondo membro si riduce alla forma semplicissima $x''^2+y''^2$, se si conviene di designare con apici le derivate prese rispetto ad s. Ora, per l'osservazione fatta nel precedente esercizio, si può esser sicuri che la formola

$$\frac{1}{\rho^2}=x''^2+y''^2$$

sussiste *qualunque sia la variabile indipendente.* Ed effettivamente dalle uguaglianze

$$\frac{d^2x}{ds^2}=x''+x'\frac{d^2s}{ds^2} \quad , \quad \frac{d^2y}{ds^2}=y''+y'\frac{d^2s}{ds^2} \; ,$$

quadrando, sommando, e tenendo conto delle relazioni

$$x'^2+y'^2=1 \quad , \quad x'x''+y'y''=0 \; ,$$

si deduce

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2=x''^2+y''^2 .$$

12. **Osservazioni**: *a)* L'ordinario Calcolo è tutto fondato, come si è visto, sull'ipotesi $\chi(x)=1$, fatta nel § 8; ma le infinite forme che potrebbe assumere il Calcolo differenziale, in corrispondenza delle infinite possibili funzioni $\chi(x)$, si riducono tutte ad una sola. Così, per esempio, si potrebbe sull'ipotesi $\chi(x)=e^x$ fondare un nuovo Calcolo, in cui bisognerebbe alle (2) sostituire $d^nx=(n-1)!\,dx^n$, ed in conseguenza, procedendo come nel § 10, si troverebbe

$$\frac{dy}{dx}=y' \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=y''+y' \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3}=y'''+3y''+2y' \; , \; \ldots\ldots \; .$$

www.rcin.org.pl

In generale il rapporto di $d^n y$ a dx^n rappresenterebbe, non $y^{(n)}$, ma l'espressione che si ottiene sostituendo $y', y'', y''', \ldots$ ad $y, y^2, y^3, \ldots$ nello sviluppo del prodotto $y(y+1)(y+2)\ldots(y+n-1)$. Ma questa e le altre possibili forme del Calcolo si riducono in sostanza ad una sola, perchè il passare da una funzione χ ad un'altra vale quanto cambiare la variabile indipendente nell'ordinario Calcolo. Per convincersi di ciò bisogna premettere che, essendo necessariamente continua la funzione $\chi(x)$, esiste sempre (come si vedrà in principio della terza parte del corso) una funzione t di x, che ha la derivata uguale ad $1:\chi(x)$. Nel Calcolo costruito in base alla funzione $\chi(x)$ i differenziali di t sono

$$dt = t'dx = \frac{1}{\chi(x)} \cdot \alpha\chi(x) = \alpha \quad , \quad d^2t = d^3t = \ldots = 0 \ ,$$

vale a dire che le proprietà (2) si trovano trasferite da x a t, e però il Calcolo ideato non differisce dal Calcolo fatto nel modo ordinario in base alla variabile indipendente t. È dunque ben naturale assegnare fin dal principio alla variabile indipendente la proprietà di avere il differenziale *costante*. Contro questa convenzione, senza nemmeno cercare d'intenderne prima il significato, si scaglia da tempo la turba dei metafisici. Alcuni credono che dx costante voglia dire che per dx *si fissa* un valore piccolissimo; altri che *si salta* da x successivamente ad $x+dx, x+2dx, x+3dx, \ldots$; altri soltanto che dx si conserva invariato da una differenziazione alla differenziazione successiva; altri, finalmente, mostrano *) di accettare (tutte in una volta!) queste assurde o grossolane o insulse interpretazioni. Invece, quando si afferma che dx è costante, non si vuol dire altro se non questo: dx non dipende da x. Così il far tendere dx a zero equivale ad immaginare che, dopo aver fatto scorrere su sè stesso l'asse delle x, *supposto rigido*, questo tenda a riprendere l'antica posizione.

b) Non è tuttavia esclusa la possibilità d'un Calcolo differenziale, in cui a nessuna variabile spetti un differenziale costante. Noi siamo infatti rimasti finora nell'ipotesi specialissima che $\chi(x)$ non dipende da α; ma se si prende, per esempio, $\chi(x) = e^{\alpha x}$, il differenziale n^{imo} di x, invece di essere infinitesimo dell'ordine n, ha l'ordine $2n-1$, e soltanto in generale $d^n y$ è dell'ordine n, giacchè invece di (3) si ha, per $n > 1$,

$$y^{(n)} = \lim \frac{d^n y}{dx^n} \ ,$$

senza poter togliere il segno *lim*. Similmente, per $\chi(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}}$, convenendo che l'infinitesimo α conservi il segno di x, ogni differenziale n^{imo} è *quasi* dell'ordine n (nel senso accennato in fine del § 1) rispetto a dx; ma non sussiste più l'eguaglianza (3), perchè il rapporto $d^n y : dx^n$ è infinitamente grande in valore assoluto, ed invece si ha

$$y' = \lim \frac{d^n y}{d^n x}$$

qualunque sia n. Il nuovo Calcolo potrebbe forse avere altri vantaggi, ma è certo che gli mancherebbero quelli che il Calcolo usuale attinge nella semplicità e nell'omogeneità delle sue formole, e nella precisione del computo dell'ordine degli in-

---

*) « *Nuove considerazioni sulla metafisica del Calcolo infinitesimale* » (Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1895, p. 309).

www.rcin.org.pl

finitesimi; ma sopratutto verrebbe meno quella che (per quanto si è detto nel § 9) si può considerare come la vera ragione di essere del Calcolo differenziale, giacchè i rapporti tra potenze di differenziali, infinitesime del medesimo ordine, non si manterrebbero più eguali ai proprii limiti, e però nel nuovo Calcolo non si troverebbe per così dire assorbito il Calcolo dei limiti.

Funzioni di più variabili.

13. **Differenziazione parziale.** Nella funzione $f(x,y,z,\ldots)$ si attribuiscano arbitrarii incrementi $\delta x, \delta y, \ldots$ alle variabili, supposte indipendenti. Considerata come funzione (*cfr.* IV, 2) della sola x, o della sola y, *ecc.*, la predetta funzione ammette i differenziali

$$d_x f = f'_x . \delta x \quad , \quad d_y f = f'_y . \delta y \quad , \quad d_z f = f'_z . \delta z \ , \ \ldots\ldots ,$$

che si chiamano *differenziali parziali.* La loro somma è il *differenziale totale,* che si rappresenta con df. Ciò premesso, facciamo le seguenti osservazioni:

a) i differenziali (parziali o totali) delle variabili indipendenti sono gli stessi incrementi arbitrarii $\delta x, \delta y, \ldots$. Infatti, se si prende $f = x$, si ha $f'_x = 1, f'_y = f'_z = \cdots = 0$, e conseguentemente $dx = \delta x$, ecc.;

b) ora le uguaglianze che definiscono i differenziali parziali diventano

$$f'_x = \frac{d_x f}{dx} \quad , \quad f'_y = \frac{d_y f}{dy} \quad , \quad f'_z = \frac{d_z f}{dz} \ , \ \ldots\ldots .$$

Per la semplicità della scrittura conviene sopprimere gli indici $x, y, z, \ldots$, in modo tuttavia che non sia possibile confondere i differenziali parziali col differenziale totale df. Perciò nelle differenziazioni parziali si suole adoperare il segno ∂ invece di d, e scrivere

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} \ , \ \ldots\ldots .$$

Sotto questa forma interverranno d'ora in poi nei calcoli le derivate parziali.

14. **Differenziazione totale.** Per definizione il differenziale totale è

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots\ldots , \tag{11}$$

quando le variabili indipendenti sono $x, y, z, \ldots$; ma importa osservare che *la relazione* (11) *sussiste quando le variabili non sono indipendenti.* Si consideri infatti la funzione $f(u, v, w, \ldots)$, in cui $u, v, w, \ldots$ sono funzioni di altre variabili $x, y, z, \ldots$, in numero qualunque, indipendenti fra loro. La definizione del differenziale totale permette solo di scrivere l'eguaglianza (11), e non

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \ldots\ldots . \tag{12}$$

www.rcin.org.pl

È chiaro che, derivando la funzione f nell'ipotesi che varii la sola x, o la sola y, *ecc.*, si ha, applicando la regola (IV, 4) per la derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\cdots\cdots,$$

. . . . . .

Sostituendo nella (11), ed osservando che

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots\cdots,$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\cdots\cdots,$$

. . . . . .

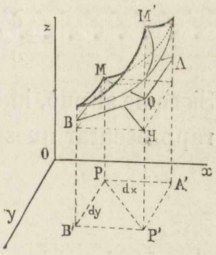
si ottiene precisamente la formola (12), che si deve considerare come fondamentale nei calcoli di differenziazione.

15. **Osservazioni**: *a)* La necessità di adoperare il segno ∂ invece di d si rende manifesta mercè la seguente osservazione. Sia f una funzione di x, data come funzione di x e di $y=\varphi(x)$. Il suo differenziale totale è dato dalla (11), limitata, nel secondo membro, ai primi due termini, e però la sua derivata è

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

cioè $\frac{df}{dx}$ differisce, in generale, da $\frac{\partial f}{\partial x}$.

b) Per interpretare geometricamente il differenziale totale, almeno nel caso di due variabili indipendenti, si consideri la funzione definita dall'uguaglianza $z=f(x,y)$, che nello spazio rappresenta, in coordinate cartesiane, una superficie. Un arco MM′ di questa superficie si projetti, parallelamente all'asse z, in MQ, sul piano che tocca la superficie in M, e si completi la costruzione del parallelepipedo, che ha per base, nel piano xy, il parallelogramma costruito sui lati dx e dy (incrementi arbitrarii delle coordinate di M), ed ha la faccia opposta nel piano tangente. Siccome questa è un parallelogramma MAQB, il punto medio di MQ coincide col punto medio di AB, e però si ha MP + QP′ = AA′ + BB′. D'altra parte, ricordando ciò che si è detto nel § 6,



$$\mathrm{MP}=z\quad,\quad \mathrm{AA}'=z+\frac{\partial z}{\partial x}dx\quad,\quad \mathrm{BB}'=z+\frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

Dunque $\mathrm{QP}'=z+\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=z+dz$. In altri termini dz rappresenta l'incremento HQ dell'ordinata del piano tangente, come δz rappresenta l'incremento analogo HM′ per la superficie. Adunque sostituire dz a δz è come sostituire alla superficie, nelle vicinanze di ciascun punto, il piano tangente nel punto stesso.

www.rcin.org.pl

16. **Differenziazioni successive.** Quando in $f(x,y,z,\ldots)$ si suppone variabile la sola x, sono applicabili le considerazioni fatte per le derivate successive delle funzioni d'una sola variabile indipendente, e però alle successive derivate parziali di f rispetto ad x si può dar la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \ldots\ldots,$$

se si conviene di non far dipendere da $x,y,z,\ldots$ gli incrementi arbitrarii $dx, dy, dz, \ldots$. Si è visto (IV, 3) che, sotto certe condizioni, generalmente soddisfatte nei calcoli usuali, il risultato di n *derivazioni* parziali successive, nelle quali si suppone i volte variabile la sola x, j volte la sola y, *ecc.* (essendo necessariamente $i+j+\cdots=n$), non dipende dall'ordine delle derivazioni, e però si può supporre che si eseguano in primo luogo le i derivazioni rispetto ad x, poi le j derivazioni rispetto ad y; *ecc.* Il risultato delle n derivazioni si conviene di rappresentarlo così:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \ldots\ldots}.$$

Per esempio, le derivate parziali di z, funzione delle variabili x ed y, sono

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \ldots\ldots.$$

Le prime cinque, frequentemente adoperate nella teoria delle superficie, si usa designarle per brevità con p, q, r, s, t. Ora, passando alle *differenziazioni*, partiamo dall'eguaglianza (11), e differenziamola supponendovi dx, $dy, dz, \ldots$ indipendenti da $x, y, z, \ldots$. Si ottiene

$$d^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots\right)dy + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \ldots\ldots.$$

Siccome si può, indipendentemente dalla funzione che subisce l'operazione d, rappresentar questa scrivendo

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz + \ldots\ldots,$$

si vede che si ha pure

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot dy^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\cdot dx\,dy + \ldots\ldots,$$

ovvero, *simbolicamente*,

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz + \cdots\right)^2.$$

Differenziando nuovamente, e proseguendo sempre nello stesso modo, è chiaro

www.rcin.org.pl

che si perviene alla relazione simbolica

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz + \cdots\right)^n ,$$

la quale suppone, se n supera 1, che $x, y, z, \ldots$ sono le variabili indipendenti. Invece se si ha, per esempio, $z = f(x, y)$ con x ed y funzioni di altre variabili indipendenti, si ottiene, con successive differenziazioni,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad , \quad d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y ,$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^3 f + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\,d^2x + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy\,d^2x$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}d^3x + \frac{\partial f}{\partial y}d^3y + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}dx\,d^2y ,$$

. . . . . .

17. **Formola di Taylor.** La segnatura differenziale permette di porre la formola di Taylor (III, 12) sotto una forma notevolmente semplice, che conviene ugualmente alle funzioni di una o di più variabili:

$$\delta f = df + {}^1/_2 d^2f + {}^1/_6 d^3f + {}^1/_{24} d^4f + \cdots\cdots \tag{13}$$

Limitandoci, per maggior chiarezza, al caso d'una sola variabile, osserviamo che la detta formola si può scrivere nel seguente modo:

$$\delta f(x) = f'(x)\delta x + {}^1/_2 f''(x)\delta x^2 + {}^1/_6 f'''(x)\delta x^3 + \cdots\cdots \tag{14}$$

Se x è la variabile indipendente, si ha $\delta x = dx$, $f^{(n)}(x)\delta x^n = d^n f(x)$, e si trova così la formola (13). Siccome poi il significato di ciascun termine di questa non è legato ad una speciale scelta della variabile, è chiaro che la formola stessa vale *qualunque sia la variabile indipendente.* Questa osservazione è necessaria, altrimenti non si potrebbe affermare che, nel secondo membro di (14), il termine n^{imo} è $\frac{1}{n!}d^n f$. Invece, elevando

$$\delta x = dx + {}^1/_2 d^2x + {}^1/_6 d^3x + {}^1/_{24} d^4x + \cdots\cdots$$

successivamente al quadrato, al cubo, *ecc.*, si dovrebbe scrivere

$$\delta f = (dx + {}^1/_2 d^2x + {}^1/_6 d^3x + \cdots)f' + {}^1/_2(dx^2 + dx\,d^2x + \cdots)f'' + {}^1/_6(dx^3 + \cdots)f''' + \cdots\cdots ,$$

e si ricadrebbe sulla (13) raccogliendo i termini infinitesimi del medesimo ordine:

$$f'dx = df \ , \ {}^1/_2(f'd^2x + f''dx^2) = {}^1/_2 d^2f ,$$

$${}^1/_6(f'd^3x + 3f''dx\,d^2x + f'''dx^3) = {}^1/_6 d^3f , \ \ldots\ldots$$

18. **Derivate in una data direzione.** Supponiamo, per fissare le idee, che si abbia una funzione $f(x, y, z)$ di tre variabili indipendenti, ossia

www.rcin.org.pl

una quantità, della quale sono dati i valori in ogni punto dello spazio. Il modo più naturale di estendere la nozione di derivata, quando si passa dalle funzioni d'una variabile unica a quelle di più variabili, consiste nel considerare l'incremento che subisce la funzione quando da un punto M si va in un altro punto M′, e nel cercare il limite del rapporto di tale incremento alla grandezza h del segmento MM′, nell'ipotesi che, fissato M, si faccia tendere M′ ad M in una data direzione, definita dai coseni α, β, γ dei suoi angoli con le direzioni degli assi. È questo limite che si chiama *derivata* della funzione nella direzione considerata. Esistono dunque intorno ad ogni punto M *infinite* derivate; ma esse sono tra loro vincolate in modo assai semplice e notevole. La derivata nella direzione (α, β, γ) è infatti

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+\alpha h, y+\beta h, z+\gamma h) - f(x, y, z)}{h}$$

$$= \lim_{h=0} (\alpha f'_x(x+\alpha h, \ldots) + \beta f'_y(x+\alpha h, \ldots) + \ldots) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z},$$

dove le derivate parziali prime di f, supposte continue, s'intendono calcolate nel punto M. Immaginando un segmento infinitesimo $d\sigma$, collocato, con un estremo in M, sulla retta uscente da M nella direzione (α, β, γ), la derivata in questa direzione si suole rappresentare con $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$. Adunque si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Fissiamo una direzione, i cui coseni direttori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ siano proporzionali alle derivate parziali prime di f, dimodochè

$$\frac{\alpha_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\beta_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\gamma_0}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}, \quad \text{dove} \quad \Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

Se θ rappresenta l'angolo della direzione (α, β, γ) con $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)\sqrt{\Delta f} = \cos\theta \,.\, \sqrt{\Delta f}.$$

Dunque, se portiamo nella direzione $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ un segmento $\sqrt{\Delta f}$, *la projezione di questo segmento sopra ogni altra direzione misura la derivata della funzione nella direzione stessa.* Ne segue, in particolare, che la direzione $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ è quella secondo cui *più rapidamente varia* la funzione. Nelle infinite direzioni perpendicolari ad essa la funzione *tende* invece *a rimanere costante.*

19. **Parametri differenziali.** Si chiamano così quelle espressioni, formate con le derivate parziali d'una funzione f, che son dotate di carattere *invariantivo*, hanno cioè un significato indipendente dalla scelta degli assi. Si capisce che siffatte espressioni sono destinate ad acquistare una grande importanza in Geometria, in Meccanica, in Fisica, dovunque si tratta di

www.rcin.org.pl

studiare fatti, che non hanno nulla da vedere con gli assi che si scelgono *). Così le derivate parziali prime di f sono evidentemente vincolate agli assi di riferimento, e cambiano con essi; ma resta sempre invariata la somma Δf dei loro quadrati, che per questa ragione si chiama *parametro differenziale* del *primo* ordine. Infatti si è visto nel paragrafo precedente che Δf è uguale al quadrato di $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ nella direzione della *più rapida* variazione di f, ed è ovvio che tale direzione dipende solo dai valori di f, e non dagli assi di riferimento. È anche invariante l'espressione

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

che si chiama *parametro differenziale* del *secondo* ordine. Infatti si ha, ripetendo la derivazione nella direzione (α, β, γ),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \beta \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \cdots\cdots;$$

e se si cerca il luogo delle rette, uscenti da M, secondo le quali è nulla la derivata seconda, si trova il cono quadrico

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cdots + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots = 0 . \qquad (15)$$

Evidentemente questo cono non dipende dalla scelta degli assi. È dunque invariante il discriminante (hessiano della funzione f) della forma quadratica (15), e godono **) della proprietà invariantiva anche le somme dei suoi minori principali del primo o del secondo ordine, ed in particolare $\Delta^2 f$. Le funzioni per le quali si ha sempre $\Delta^2 f = 0$ (equazione di Laplace) si dicono *armoniche*, ed hanno molta importanza nelle applicazioni del Calcolo. Armonica, per esempio, è la temperatura in un corpo termicamente equilibrato; è armonica la funzione potenziale fuori dei punti occupati dalle masse attive; *ecc.*

20. Le considerazioni precedenti gettano molta luce sulla discussione dei minimi e dei massimi delle funzioni di più variabili. Se per M si conduce una retta qualunque, e si considerano soltanto i valori che una funzione prende lungo questa retta, è chiaro che in M non si avrà nè minimo nè massimo, a meno che non sia $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$. Siccome ciò avviene nelle infinite direzioni perpendicolari ad $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, si vede che *per ogni punto* M *dello spazio passano infinite rette, situate in un piano, lungo le quali la funzione subisce, in* M, *un minimo o un massimo.* Possono tuttavia fare eccezione certe due rette, generatrici del cono (15), giacchè lungo tali rette la derivata se-

*) A questo concetto s'informa il « *Calcolo differenziale assoluto* », ideato da G. Ricci, dell'Università di Padova (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1892, p. 186).

**) « *Analisi algebrica* » p. 68.

www.rcin.org.pl

conda si annulla in M. Tutto ciò suppone che le derivate parziali prime non si annullino simultaneamente nel punto che si considera, altrimenti, essendo allora $\frac{\partial f}{\partial \sigma}=0$ in ogni direzione, è chiaro che *lungo tutte le rette uscenti da siffatti punti la funzione subisce, in essi, un minimo o un massimo,* fatta eccezione, forse, di quelle che son collocate sul cono (15). Se questo è immaginario, non si presenta l'eccezione, e $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$, funzione continua di α, β, γ, non potendo annullarsi per valori reali di α, β, γ, conserva un segno invariato per tutte le direzioni. Così si spiega perchè, avendosi in M sempre un minimo, o sempre un massimo, in qualunque direzione, la funzione ha effettivamente nello spazio, in M, un minimo o un massimo. Invece, se il cono (15) è reale, non si avrà nè minimo nè massimo, perchè lungo certe rette la funzione diventa minima in M, lungo certe altre diventa massima, e le due regioni costituite da tali rette sono separate appunto dal cono (15). Nel caso particolare delle funzioni armoniche, le tre derivate parziali seconde, la cui somma è $\Delta^2 f=0$, non possono aver tutte il medesimo segno, e però il cono (15) è sempre reale. Ne segue che le funzioni armoniche son prive di minimi e di massimi.

21. **Cambiamento di variabili.** Se della funzione $f(x, y, z, \ldots)$ si vogliono esprimere le derivate parziali supponendo che si assumano altre variabili $u, v, w, \ldots$, si ha subito, facendo prima variare la sola u, poi la sola v, e così via,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}+\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}+\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Da questo sistema di equazioni lineari si deducono i valori di $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$, purchè non sia nullo *) il determinante

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \ldots\ldots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \ldots\ldots \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}\right|,$$

*) Fra breve si vedrà che questa condizione è soddisfatta quando $x, y, z, \ldots$ sono indipendenti fra loro.

www.rcin.org.pl

che si chiama determinante funzionale o *jacobiano* delle funzioni $x, y, z, \ldots$, rispetto ad $u, v, w, \ldots$, e si rappresenta così:

$$\frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}.$$

Ciò premesso si ottiene, risolvendo il sistema considerato,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} : \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}.$$

Similmente

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x, f, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} : \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(x, y, f, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} : \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}, \ldots$$

Per calcolare poi le successive derivate basta operare analogamente sulle derivate già ottenute.

22. **Esercizio**: Proponiamoci di esprimere in coordinate polari i parametri differenziali d'una funzione di due variabili. Si ha $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, e

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta .$$

Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta . \quad (16)$$

Del resto queste ultime formole si possono stabilire direttamente, come le prime, dopo avere osservato che dalle relazioni $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$, si deduce

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\theta y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} .$$

Quadrando e sommando le (16) si ottiene

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 .$$

Ora, se applichiamo le (16) a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, invece che ad f, troviamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{sen}\,\theta\right)\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{sen}\,\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta\right)\cos\theta ,$$

cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta + 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \theta}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\mathrm{sen}^2\theta ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\mathrm{sen}^2\theta - 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \theta}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\cos^2\theta .$$

www.rcin.org.pl

Dunque

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Nel caso di n variabili, se f è funzione della sola $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{df}{dr}, \ \ldots\ldots;$$

poi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{x^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right), \ ecc.$$

Dunque

$$\Delta f = \left(\frac{df}{dr}\right)^2, \quad \Delta^2 f = \frac{n}{r}\frac{df}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{df}{dr}\right).$$

Dall'ultima formola risulta che, se si vuole una funzione armonica della sola r, bisogna che $r^{n-1}\frac{df}{dr}$ sia costante, e conseguentemente che si abbia, a meno di costanti, $f = \log r$ per $n = 2$, ed $f = r^{2-n}$ per $n \gtrless 2$.

Funzioni implicite.

23. Se nella relazione $f(x, y) = 0$ si pensa y come funzione della x, si può, applicando la regola (IV, 4) per la derivazione delle funzioni composte, immediatamente scrivere l'eguaglianza

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

dalla quale si deduce, quando $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$, il valore di y'; ma nel far ciò si viene tacitamente ad *ammettere l'esistenza* di y', mentre nulla ci autorizza ad asserire *a priori*, non solo che y' esista, ma neppure che y *possa riguardarsi come funzione* di x. Nondimeno queste affermazioni sono lecite. Sia infatti (x_0, y_0) una coppia qualunque di valori di x e di y, soddisfacenti ad $f = 0$, e supponiamo che, per x ed y variabili rispettivamente negli intervalli $(x_0 - h, x_0 + h)$ e $(y_0 - k, y_0 + k)$, siano continue le funzioni f'_x ed f'_y. Supponiamo ancora che h e k siano stati presi sufficientemente piccoli perchè f'_y conservi sempre il segno di $f'_y(x_0, y_0) \gtrless 0$. Ciò è possibile, per la continuità stessa di f'_y. È poi chiaro che, in forza delle ipotesi, il rapporto di f'_y ad f'_x non può diventare, in valore assoluto, arbitrariamente piccolo, e però esiste un numero positivo α, tale che, variando x ed y nei rispettivi intervalli, è costantemente $|f'_y| > \alpha |f'_x|$. Se h, che si può prendere piccolo quanto si vuole, è minore di $k\alpha$, si ha

$$h|f'_x| < k\alpha|f'_x| < k|f'_y|,$$

www.rcin.org.pl

e però nell'eguaglianza

$$f(x_0 \pm h, y_0 \pm k) = \pm h f'_x(x_0 \pm \theta h, y_0 \pm \theta k) \pm k f'_y(x_0 \pm \theta h, y_0 \pm \theta k), \quad (17)$$

che si deduce dalla formola di Taylor tenendo presente che $f(x_0, y_0) = 0$, il valore assoluto della prima parte del secondo membro è inferiore al valore assoluto della seconda parte. Dunque il segno di $f(x_0 \pm h, y_0 \pm k)$ è quello di $\pm k f'_y(x_0 \pm \theta h, y_0 \pm \theta k)$, e però, siccome il segno di f'_y non cambia, si vede che, fissato per x un valore $x_0 \pm h$, i valori di $f(x, y)$ corrispondenti ai valori $y_0 - k$ ed $y_0 + k$ di y hanno segni opposti. Qui si noti che, quando si assumono per h valori sempre più piccoli, k si può lasciare invariato. Ora la funzione $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y, è continua, perchè ammette la derivata f'_y. Essa è dunque (I, 25) nulla per qualche valore di y, appartenente all'intervallo $(y_0 - k, y_0 + k)$ giacchè negli estremi prende segni opposti. Del resto, essa non può annullarsi più d'una volta, perchè la derivata conserva invariato il segno, e però (II, 19) la funzione cresce sempre, o decresce nel detto intervallo. È dunque vero che, fissato arbitrariamente un valore di x, esiste uno ed un sol valore di y, per cui sussiste la relazione $f(x, y) = 0$ fra i limiti considerati. Fra i limiti stessi la relazione $f(x, y) = 0$ definisce dunque una funzione y di x, e questa funzione ammette la derivata, perchè dall'annullamento del secondo membro di (17) risulta, per h tendente a zero,

$$\lim \frac{\pm k}{\pm h} = -\lim \frac{f'_x(x_0 \pm \theta h, y_0 \pm \theta k)}{f'_y(x_0 \pm \theta h, y_0 \pm \theta k)} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

per ogni coppia di valori x_0 ed y_0, rispettivamente compresi negli intervalli, nei quali si avverano le condizioni dell'enunciato.

24. Più generalmente, se la relazione

$$f(x, y, z, \ldots, u) = 0 \quad (18)$$

è soddisfatta dai valori $x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0$ delle variabili, se intorno a questi valori esistono e sono continue le derivate parziali prime di f, e se, per i valori considerati, è $f'_u \gtrless 0$, si può affermare che u è una funzione delle variabili $x, y, z, \ldots$, che ammette le derivate parziali prime. Queste si ottengono derivando parzialmente la relazione (18), così:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ , \ \ldots\ldots$$

La dimostrazione è identica a quella del caso particolare già considerato.

25. Ulteriori differenziazioni porgeranno i valori delle successive derivate. Per esempio, nel caso della relazione $f(x, y) = 0$, basta differenziare

www.rcin.org.pl

$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$ per calcolare y'', giacchè si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0\ ,$$

e se ne ricava subito, mettendo per y' il suo valore,

$$-y''\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2,$$

ovvero

$$y''=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix};$$

ecc. Proponiamoci ancora di calcolare le derivate parziali p, q, r, s, t della funzione z, definita implicitamente dalla relazione $f(x,y,z)=0$. Le prime due derivate si deducono dalle uguaglianze

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0\ , \tag{19}$$

ottenute derivando parzialmente $f=0$ rispetto ad x e ad y. Ora, derivando la prima eguaglianza rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, si trovano le relazioni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}p+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}p^2+\frac{\partial f}{\partial z}r=0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}q+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}q^2+\frac{\partial f}{\partial z}t=0\ ,$$

dalle quali si ricavano i valori di r e di t:

$$r=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}\ ,\quad t=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Derivando la prima eguaglianza (19) rispetto ad y, o la seconda rispetto ad x, si ottiene

$$s=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Qui si noti che i tre determinanti precedenti si deducono dall' unico deter-

www.rcin.org.pl

minante

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

prendendo i complementi algebrici degli elementi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, rispettivamente. Ne segue, in virtù di note *) proprietà dei determinanti,

$$rt-s^2=-\frac{D}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^4}.$$

26. Più generalmente ancora, date le m relazioni

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z,\ldots,u,v,w,\ldots)=0\,, \\ \psi(x,y,z,\ldots,u,v,w,\ldots)=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases} \tag{20}$$

soddisfatte per $x=x_0, y=y_0, \ldots, u=u_0, v=v_0, \ldots$, si potranno considerare le m variabili $u, v, w, \ldots$ come funzioni, dotate di derivate parziali prime, delle n variabili $x, y, z, \ldots$, *purchè le derivate parziali prime di* $\varphi, \psi, \ldots$ *siano continue ed inoltre sia diverso da zero, per i valori considerati, il determinante jacobiano*

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(\varphi,\psi,\ldots)}{\partial(u,v,\ldots)}.$$

Per $m=1$ si ricade sul teorema del § 24. Per dimostrare il teorema generale basterà dunque far vedere che, se il teorema stesso è vero nel caso di $m-1$ relazioni, esso sussiste per m relazioni. Ora, poichè nel punto $(x_0, y_0, \ldots, u_0, \ldots)$ si suppone $\mathfrak{J} \gtrless 0$, si può essere sicuri che almeno una delle derivate $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial w}, \ldots$ è diversa da zero nello stesso punto. Supponiamo che sia $\frac{\partial\varphi}{\partial u} \gtrless 0$. Allora, rammentando le ipotesi fatte, ed invocando il teorema del § 24, si può dire che u è una funzione di $x, y, \ldots, v, w, \ldots$, dotata di derivate parziali prime. Se immaginiamo che se ne sostituisca l'espressione nelle rimanenti equazioni (20), troviamo

$$\begin{cases} \psi_1(x,y,z,\ldots,v,w,\ldots)=0\,, \\ \chi_1(x,y,z,\ldots,v,w,\ldots)=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{21}$$

*) « *Analisi algebrica* » p. 31.

www.rcin.org.pl

È questo un sistema di $m-1$ equazioni, che lega le $m-1$ variabili $v, w, \ldots$ alle rimanenti n. Le derivate parziali prime di $\varphi_1, \chi_1, \ldots$ esistono e sono continue, perchè si ha

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ ecc.$$

Ben presto vedremo che il nuovo jacobiano

$$\mathfrak{J}_1=\frac{\partial(\psi_1, \chi_1, \ldots)}{\partial(u, v, \ldots)}$$

è, come $\mathfrak{J}$, diverso da zero. Dunque il sistema (21) definisce $v, w, \ldots$ come funzioni di $x, y, z, \ldots$, dotate di derivate parziali prime, ed altrettanto si può dire di u, quando si immagina che nella sua espressione, dedotta dalla prima delle (20), si sostituiscano $v, w, \ldots$, in funzione di $x, y, z, \ldots\ldots$. Si ottiene così un sistema di funzioni $u, v, w, \ldots$, le quali prendono i valori $u_0, v_0, w_0, \ldots$ per $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \ldots$, ed ammettono, intorno a questo punto, le derivate parziali prime. Adunque tutto si riduce a dimostrare che $\mathfrak{J}_1 \gtrless 0$. Orbene supponiamo che, in $\mathfrak{J}$, gli elementi della prima colonna moltiplicati per $\frac{\partial u}{\partial v}$, si aggiungano ordinatamente a quelli della seconda; poi gli stessi elementi, moltiplicati per $\frac{\partial u}{\partial w}$, si aggiungano a quelli della terza colonna; *ecc.* Gli elementi del nuovo determinante sono

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial\varphi}{\partial u}\ , & \frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=0\ , & \frac{\partial\varphi}{\partial w}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=0\ , & \ldots\ldots \\
\frac{\partial\psi}{\partial u}\ , & \frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial\psi_1}{\partial v}\ , & \frac{\partial\psi}{\partial w}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{\partial\psi_1}{\partial w}\ , & \ldots\ldots \\
\frac{\partial\chi}{\partial u}\ , & \frac{\partial\chi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial\chi_1}{\partial v}\ , & \frac{\partial\chi}{\partial w}+\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{\partial\chi_1}{\partial w}\ , & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Dunque $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}$; e siccome $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ ha un valore finito, e $\mathfrak{J}$ si suppone diverso da zero, è pure $\mathfrak{J}_1 \gtrless 0$.

27. Constatata così l'esistenza delle derivate parziali prime delle funzioni definite dal sistema (20), si possono rapidamente calcolare le derivate stesse derivando parzialmente le uguaglianze (20) rispetto a ciascuna delle variabili $x, y, z, \ldots$, che si assumono come indipendenti. Così, per esempio, derivando rispetto ad x, si ottiene il sistema di equazioni lineari

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0\ , \\
\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,
\end{array}\right.$$

www.rcin.org.pl

il cui determinante è appunto $\mathfrak{J} \gtrless 0$. Ne segue, per la regola di Cramer,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(\varphi, \psi, \ldots)}{\partial(x, v, \ldots)} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(\varphi, \psi, \ldots)}{\partial(u, x, \ldots)} \quad , \quad ecc.$$

28. **Esercizii**: *a)* Se ad una linea piana, rappresentata dall'equazione

$$f(x, y, u, v, \ldots\ldots) = 0 \ ,$$

in cui $u, v, \ldots$ sono implicitamente definite in funzione delle coordinate x ed y mercè le n relazioni

$$\varphi(x, y, u, v, \ldots) = 0 \quad , \quad \psi(x, y, u, v, \ldots) = 0 \ , \ \ldots \ ,$$

si vuole costruire la tangente in un punto qualunque, non è necessario eliminare $u, v, \ldots$ fra le $n+1$ uguaglianze per ottenere prima l'equazione della linea in x ed y; ma, considerando invece le predette uguaglianze come quelle che definiscono $y, u, v, \ldots$ in funzione dell'unica variabile indipendente x, basterà derivarle ed eliminare le derivate di $u, v, \ldots$ dalle equazioni in tal modo ottenute:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0 \ , \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Uno dei grandi vantaggi del Calcolo differenziale consiste appunto nell'evitare eliminazioni quasi sempre impossibili praticamente, conducendo invece, mercè la derivazione o la differenziazione, a sistemi di equazioni *lineari*, che si sanno risolvere. Così, nel caso attuale, si giunge alla formola

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(x, u, v, \ldots)} : \frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(y, u, v, \ldots)} \ ,$$

estensione manifesta di quella ottenuta in principio del § 23.

b) Similmente una superficie sia data mediante due equazioni, vale a dire che la relazione fra le coordinate dei suoi punti si debba considerare come risultante dall'eliminazione di u fra le equazioni

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \quad , \quad \psi(x, y, z, u) = 0 \ ;$$

e supponiamo che si vogliano calcolare p, q, r, s, t, cioè le derivate parziali prime e seconde di z, funzione delle variabili indipendenti x ed y. Derivando le due equazioni una volta rispetto ad x, l'altra rispetto ad y, si ottengono i sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \ , \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \ , \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \ , \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \ , \end{cases}$$

dai quali si deduce

$$p = -\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, u)} : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, u)} \quad , \quad q = -\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, u)} : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, u)} \ .$$

www.rcin.org.pl

Le altre derivate si possono ricavare, con derivazione diretta, da p e q, o anche risolvendo le equazioni che si ottengono col derivare parzialmente i sistemi precedenti. In particolare, se l'equazione della superficie è $z=f(x,y,u)$, dove u è implicitamente definita in funzione di x e di y mediante l'equazione $\varphi(x,y,u)=0$, si ha subito

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \ ,$$

e quindi

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}=\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,u)}:\frac{\partial \varphi}{\partial u} \ .$$

Poi

$$r=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,$$

dove per $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bisogna porre i valori che si ricavano dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \ ; \ ecc.$$

29. Date m funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_m$ delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, è importante saper riconoscere se esse sono fra loro *indipendenti*, cioè se nessuna di esse è funzione delle altre. Per questo basta esaminare la matrice jacobiana del sistema, ossia

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \frac{\partial y_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} ,$$

i cui elementi si suppongono funzioni continue. *Se μ è la caratteristica della jacobiana, il sistema considerato racchiude μ funzioni indipendenti*, e le altre $m-\mu$ sono funzioni delle prime. Dimostriamo questo importante teorema:

a) È lecito ammettere che il determinante

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)}$$

è diverso da zero, perchè la jacobiana racchiude, per ipotesi, almeno un determinante, non nullo, dell'ordine μ, e si può sempre supporre che tale determinante sia proprio $\mathfrak{J}$, perchè basta immaginare che si numerino con indici non maggiori di μ appunto le funzioni e le variabili che compariscono

www.rcin.org.pl

nel suddetto determinante. Intanto siano

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad , \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ , \ \ldots\ldots$$

le espressioni delle funzioni considerate, si ponga

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y_i \ ,$$

e si consideri il sistema

$$\varphi_1 = 0 \ , \ \varphi_2 = 0 \ , \ \ldots \ , \ \varphi_m = 0 \ , \tag{22}$$

come atto a definire implicitamente, secondo quello che si è detto nel § 26, le variabili

$$x_1, x_2, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m \tag{23}$$

in funzione delle rimanenti

$$y_1, y_2, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n \ . \tag{24}$$

Per questo occorre che non sia nullo il determinante funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \varphi_{\mu+2}, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m)} \ ,$$

e ciò effettivamente ha luogo, perchè, essendo

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad , \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = -1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = 0 \ ,$$

è chiaro che il detto determinante si riduce a $(-1)^{m-\mu}.\mathfrak{J}$. Dunque, se b_i è il valore di y_i nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, intorno al quale si ammette l'esistenza (e la continuità) delle derivate parziali prime delle f, si può affermare che il sistema (22) definisce le (23) come funzioni implicite delle rimanenti variabili intorno al punto $(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n)$. In altri termini, per ogni sistema di valori, arbitrariamente attribuiti alle (24), purchè questi valori differiscano da $b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n$, rispettivamente, per meno d'una certa quantità, si hanno valori ben determinati per le (23); e però, immaginando che alle prime μ variabili x si attribuiscano appunto questi valori, e che le rimanenti $n-\mu$ prendano i valori già loro dati in principio, si vede che $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ assumono i valori prescritti, i quali, fra certi limiti, sono stati presi ad arbitrio. È dunque vero che le prime μ funzioni y sono tra loro indipendenti.

b) Bisogna ancora far vedere che le altre $m-\mu$ funzioni y sono funzioni delle prime μ. Da quanto precede risulta solo che ciascuna di esse è funzione delle (24). Pertanto ci basterà provare che, se i e j sono maggiori di μ, la funzione y_j è indipendente da x_i. Ora, se deriviamo le (22) rispetto

www.rcin.org.pl

ad x_i, continuando sempre a considerare le (23) come funzioni delle (24), si ottiene

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=0\ ,\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial x_i}=0\ ,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}=0\ ,\\
\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_j}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0\ ,
\end{array}\right.$$

e però, eliminando le derivate delle x,

$$\left|\begin{array}{cccc}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\ \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\\
\frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \frac{\partial f_j}{\partial x_2} & \cdots\ \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial y_j}{\partial x_i}
\end{array}\right|=0\ ,$$

cioè $\mathfrak{J}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0$, e finalmente $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0$.

30. **Corollario.** *Perchè* n *funzioni* u, v, w,... *di* n *variabili* x, y, z,... *siano fra loro indipendenti, è necessario e sufficiente che sia*

$$\frac{\partial(u,v,w,\ldots)}{\partial(x,y,z,\ldots)}\gtrless 0\ .$$

Qui, come precedentemente, le funzioni si suppongono dotate di derivate prime continue.

31. Segnaliamo, per finire, una notevole proprietà dei determinanti funzionali, la quale si può considerare come un'estensione della regola (II, 4) per la derivazione delle funzioni di funzioni. Supponiamo che le y dipendano dalle x mediante altre funzioni u delle stesse x. Siccome si ha

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\frac{\partial y_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial y_j}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial y_j}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\ ,$$

si vede subito che la moltiplicazione dei determinanti

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}\ ,\quad \frac{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

www.rcin.org.pl

produce appunto il determinante funzionale delle y rispetto alle x. In altri termini

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} . \tag{25}$$

In particolare

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1 . \tag{26}$$

32. **Esercizii**: *a)* La formola (25) ne include altre, ottenute precedentemente. Per esempio, quando si vuol fare un cambiamento di variabili in una funzione f, si può subito scrivere

$$\frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} = \frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} \cdot \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} ,$$

e poichè il primo fattore del secondo membro si riduce a $\frac{\partial f}{\partial x}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} : \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} .$$

b) Per mostrare l'utilità dell'ultima formola, ci limitiamo al caso di tre variabili x, y, z, *date esplicitamente* in funzione di u, v, w, proponendoci di calcolare le derivate di u, v, w, rispetto ad x, y, z, *senza cercare di conoscere prima le espressioni di* u, v, w *in funzione di* x, y, z. Le due terne si suppongono costituite da variabili indipendenti, dimodochè

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \gtrless 0 .$$

La formola trovata nell'esercizio precedente permette subito di scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)} , \ \ldots\ldots , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)} , \ \ldots\ldots , \tag{27}$$

e la questione è risoluta. Si noti che non è necessario conoscere queste derivate per calcolare il determinante funzionale di u, v, w rispetto ad x, y, z, ed i suoi minori del secondo ordine, perchè, in virtù di (26) e delle stesse (27), si ha

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}} , \quad \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial x}{\partial u} , \quad \frac{\partial(v, w)}{\partial(z, x)} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial y}{\partial u} , \ \ldots\ldots .$$

Similmente, se si tratta di calcolare i differenziali totali di u, v, w, si comincia dall'eseguire la differenziazione totale su x, y, z; poi le relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{aligned} \right. \tag{28}$$

www.rcin.org.pl

porgono i valori

$$du = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}dx + \frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}dy + \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)}dz\right), \text{ ecc.},$$

dai quali si posson dedurre nuovamente le formole (27).

c) In molte applicazioni si ha bisogno delle (28) per calcolare la somma $dx^2 + dy^2 + dz^2$, che si cambia subito in un'espressione della forma

$$a\,du^2 + b\,dv^2 + c\,dw^2 + 2f\,dv\,dw + 2g\,dw\,du + 2h\,du\,dv\,,$$

dove per brevità si è posto

$$a = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\ b = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\ \ldots,\ f = \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},\ \ldots\ldots.$$

È importante osservare che, quando sono note le sei funzioni a, b, c, f, g, h, è anche noto il determinante funzionale $\mathfrak{J}$, perchè si ha

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \mathfrak{J}^2\,;$$

ed analogamente si possono esprimere le somme

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\ \sum\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\ \ldots,\ \sum\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x},\ \ldots\ldots,$$

i cui valori sono dati dai minori $bc - f^2, ca - g^2, \ldots, gh - af, \ldots$, divisi per $\mathfrak{J}^2$.

d) Quando x, y, z dipendono anche da un'altra variabile t, indipendente da u, v, w, anche $\mathfrak{J}$ dipende, in generale, da t, e si può aver bisogno di calcolarne la derivata $\mathfrak{J}'$. Se si designa con un apice ogni derivata, presa rispetto a t, la regola (IV, 8) per la derivazione dei determinanti dà

$$\mathfrak{J}' = \frac{\partial(x',y,z)}{\partial(u,v,w)} + \frac{\partial(x,y',z)}{\partial(u,v,w)} + \frac{\partial(x,y,z')}{\partial(u,v,w)}\,;$$

quindi, dividendo per $\mathfrak{J}$, si ottiene la formola

$$(\log\mathfrak{J})' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}\,,$$

che si utilizza in idrodinamica.

www.rcin.org.pl

VI. APPLICAZIONI ALLE CURVE PIANE.

Differenziale dell'arco.

1. Cura costante di colui che adopera il Calcolo differenziale dev'essere la ricerca degli infinitesimi *differenziali*, ottenuti col toglier via parti infinitesime d'un ordine superiore dagli infinitesimi che gli si presentano nei calcoli. Per ogni infinitesimo α ve ne sono innumerevoli, che da α differiscono per un infinitesimo superiore; ma, si noti, *un solo* fra essi è il differenziale di qualche funzione u. Infatti, se per un'altra funzione v potesse $\alpha - dv$ risultare, come $\alpha - du$, infinitesima d'un ordine superiore, basterebbe sopprimere questi infinitesimi in

$$du = dv + (\alpha - dv) - (\alpha - du)$$

per trovare l'eguaglianza $du = dv$, necessariamente (V, 9) esatta. Questi due infinitesimi differenziali coincidono dunque in valore; ed è facile vedere che coincidono anche nel significato, giacchè si ha $d(u - v) = 0$, e però $u - v = costante$, vale a dire che v non differisce sostanzialmente da u. Nella pratica del Calcolo si cerca sempre di porre α sotto forma di variazione infinitesima d'una funzione u, ed allora (V, 5) l'infinitesimo differenziale unico, sostituibile ad α, è appunto du. Così, mediante l'operazione d, il Calcolo differenziale raggiunge una precisione estrema, in quanto che permette *in un sol modo* di sostituire agli infinitesimi, che si presentano in una ricerca qualsiasi, altrettanti infinitesimi, risultanti tutti per differenziazione da ben determinate funzioni, e *vincolati da quelle medesime relazioni* che intercedono fra gli infinitesimi, dei quali prendono il posto nei calcoli.

2. La definizione rigorosa della *lunghezza* d'un segmento curvilineo suscita questioni assai ardue *), che noi qui vogliamo evitare. Supponiamo pure che si abbia la nozione intuitiva della lunghezza, almeno per le poche curve piane che si considerano nelle applicazioni. Per queste curve, rappresentabili tutte geometricamente, è anche lecito ammettere che ogni arco MM′ è tale che, tendendo un estremo M′ verso l'estremo fisso M, l'arco finisce per essere tutto convesso da una stessa parte, in guisa che la sua lunghezza resti compresa fra quella della corda MM′ e la somma dei segmenti

*) Vedi, per esempio, il « *Cours d'Analyse* » di Jordan (2ème éd., 1er vol., p. 90 à 107).

www.rcin.org.pl

delle tangenti in M ed M′, limitati fra i punti di contatto ed il punto comune Q. Se la derivata y' si suppone continua, la retta QM′ tende, come MM′, a confondersi con QM, e però gli angoli QMM′ e QM′M sono infinitesimi insieme ad MM′. Ne segue che i rapporti di QM e di QM′ alle loro projezioni su MM′ tendono all'unità, e quindi (V, 2) che le predette lunghezze differiscono dalle loro projezioni per infinitesimi superiori. Anche QM + QM′ differisce dunque da MM′ per un infinitesimo superiore, ed altrettanto si può dire *a fortiori* dell'*arco* MM′. Per conseguenza

$$\lim \frac{\text{arco MM}'}{\text{corda MM}'} = 1 \ .$$

3. Rappresenti s la lunghezza dell'arco di curva, che ha un estremo in un punto fisso, arbitrariamente scelto sulla curva, e l'altro nel punto M. Evidentemente s varia insieme alle coordinate x ed y del punto M, e quando questo va in M′, le cui coordinate sono $x + \delta x$ ed $y + \delta y$, l'arco s diventa $s + \delta s$, rappresentando così δs la lunghezza dell'arco MM′. Sia l la lunghezza della corda MM′, che differisce da δs, e per conseguenza (*cfr.* § 1) anche da ds, per un infinitesimo superiore. Se ad $l, \delta x, \delta y$, nella relazione $l^2 = \delta x^2 + \delta y^2$, si sostituiscono rispettivamente ds, dx, dy, si trascurano, in ciascun membro, infinitesimi d'un ordine superiore; ma, poichè nell'eguaglianza cui si perviene

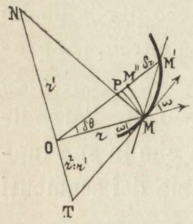
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (1)$$

non compariscono più infinitesimi, che non siano differenziali, si può esser sicuri che l'eguaglianza stessa è esatta. Questa importante formola serve a calcolare s. Essa ci dice che la derivata di s rispetto ad x è $\sqrt{1+y'^2}$, e nella terza parte del Corso si apprenderà a determinare una funzione quando se ne conosce la derivata. Se la variabile indipendente è x, ds rappresenta la lunghezza del *segmento di tangente* in M, limitato fra M e l'ordinata di M′; e non si ha $ds = \text{arco MM}'$ se non quando la variabile indipendente è s. In tutti i casi ds rappresenta la lunghezza di quel segmento di tangente, che va dal punto di contatto (x, y) al punto $(x + dx, y + dy)$.

4. Trasformando la (1) in coordinate polari si ottiene (V, 11, *d*)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \ ; \qquad (2)$$

ma a questa formola si perviene anche, come alla prima, mediante considerazioni geometriche dirette. Sul raggio vettore OM′ si porti OM″ = OM = r, e sia P la projezione di M su OM′. Si ha $l^2 = \text{MP}^2 + \text{PM}'^2$, ed in questa uguaglianza si può ad l sostituire ds; ad $\text{MP} = r \operatorname{sen} \delta\theta$ si possono successivamente sostituire $r\delta\theta$ ed $rd\theta$; e finalmente a PM′, trascurando l'infinitesimo del secondo ordine $\text{PM}'' = r(1 - \cos\delta\theta)$, si può sostituire $\text{M}''\text{M}' = \delta r$, poi dr. Si ottiene così la relazione (2), necessariamente esatta poichè ha luogo fra soli infinitesimi differen-



www.rcin.org.pl

ziali. Si può anche partire dalla relazione

$$l^2 = r^2 + (r + \delta r)^2 - 2r(r + \delta r)\cos\delta\theta = \delta r^2 + 4r(r + \delta r)\,\mathrm{sen}^2\frac{\delta\theta}{2},$$

ed esser sicuri *a priori* che dal secondo membro debbono scomparire i termini non infinitesimi, o infinitesimi del primo ordine, e che ds^2 resterà esattamente rappresentato dall'insieme dei soli termini infinitesimi del secondo ordine, qualora in essi rimangano soltanto infinitesimi differenziali. Ed effettivamente, sostituendo dr a δr, e $\frac{d\theta}{2}$ a $\mathrm{sen}\frac{\delta\theta}{2}$, si ritrova la formola (2). Di questa si fa uso, per calcolare s, osservando che la derivata di s rispetto a θ è $\sqrt{r^2 + r'^2}$.

5. Ora vogliamo dimostrare che *la differenza fra un arco infinitesimo e la corrispondente corda è generalmente infinitesima del terzo ordine* rispetto all'arco stesso. Infatti (V, 17) si ha, per la formola di Taylor,

$$\delta x = dx + {}^1/_2 d^2x + {}^1/_6 d^3x + \cdots, \quad \delta y = dy + {}^1/_2 d^2y + {}^1/_6 d^3y + \cdots, \qquad (3)$$

qualunque sia la variabile indipendente. Se questa è s, siccome (V, 11, *e*)

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \quad , \quad d^2x^2 + d^2y^2 = \frac{ds^4}{\rho^2},$$

si ottiene, differenziando due volte di seguito la prima eguaglianza,

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0 \quad , \quad dx\,d^3x + dy\,d^3y = -\frac{ds^4}{\rho^2};$$

quindi

$$l^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = ds^2 - \frac{ds^4}{12\rho^2} + \cdots\cdots.$$

Ora, trascurando infinitesimi superiori, ed in particolare scrivendo $2ds$ per $\delta s + l$ in

$$\delta s^2 - l^2 = \frac{ds^4}{12\rho^2} + \cdots \quad , \text{ si trova } \quad \delta s - l = \frac{ds^3}{24\rho^2} + \cdots\cdots.$$

In forma precisa

$$\lim \frac{\text{arco}\,\mathrm{MM}' - \text{corda}\,\mathrm{MM}'}{(\text{arco}\,\mathrm{MM}')^3} = \frac{1}{24\rho^2}.$$

Per verificare questo risultato in un caso particolare, si consideri, sopra una circonferenza di raggio ρ, un arco $\mathrm{MM}' = 2\rho\alpha$. La lunghezza della corda è $\mathrm{MM}' = 2\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha$, ed il primo membro dell'ultima eguaglianza diventa

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha}{4\rho^2\alpha^3} = \frac{1}{24\rho^2}.$$

Dunque, rispetto alla questione trattata, si può dire che la curva si comporta, intorno ad M, come il suo circolo osculatore (III, 32, *e*).

www.rcin.org.pl

Tangente e normale.

6. Sulla curva rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dall'equazione $Y=f(X)$ si prenda un punto M, le cui coordinate siano x ed y. L'equazione d'una retta qualunque, che passa per M, è $Y-y=m(X-x)$, ed è noto (II, 13) che si ha $m=y'$ per la *tangente*, e conseguentemente $m=-1:y'$ per la *normale*. Le equazioni della tangente e della normale in M sono dunque

$$Y-y=y'(X-x) \quad , \quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \ , \tag{4}$$

dove y' sta per $f'(x)$, cioè rappresenta il valore di $f'(X)$ nel punto M. In Calcolo differenziale la tangente ci si presenta sotto un aspetto anche più semplice, cioè (V, 6) come quella retta che congiunge il punto (x,y) al punto $(x+dx, y+dy)$. Questa osservazione conduce a scrivere immediatamente le equazioni della tangente e della normale sotto la forma

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy} \quad , \quad (X-x)dx+(Y-y)dy=0 \ , \tag{5}$$

che si riduce subito alla (4) scrivendo $y'dx$ per dy, e sopprimendo il comune fattore dx. Riesce comoda la forma (5) specialmente nel caso che la curva sia rappresentata dalle equazioni $X=\varphi(t), Y=\psi(t)$. Se poi la curva è data mediante l'equazione $f(X,Y)=0$, siccome si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \ ,$$

le equazioni (5) diventano

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} \ . \tag{6}$$

Anche a queste si può pervenire direttamente. Infatti la direzione secondo la quale la funzione $f(X,Y)$ tende a conservare il valore 0, che ha nel punto (x,y), è quella della tangente, e però (V, 18) i coseni direttori della normale sono proporzionali alle derivate parziali prime di f, calcolate nel detto punto, e supposte non entrambe nulle. Del resto la prima equazione (6) si può anche considerare come quella a cui si riduce l'equazione stessa della curva, quando, per punti (X,Y) infinitamente vicini ad (x,y), si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore, e si osserva che in

$$f(X,Y)=f(x,y)+(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots\cdots$$

è $f(x,y)=0$. Nelle applicazioni conviene tener presenti le forme (4), (5), (6) delle equazioni della tangente e della normale, per adoperarle secondo l'opportunità.

www.rcin.org.pl

7. È anche utile sapere scrivere sotto forma *omogenea* l'equazione della tangente ad una *curva algebrica*. Sia $f(X, Y) = 0$ l'equazione della curva in forma razionale ed intera. È noto che, per renderla omogenea, si lasciano intatti i termini di più alto grado n, mentre quelli dei gradi $n-1, n-2, \ldots$ si moltiplicano rispettivamente per $Z, Z^2, \ldots$ Si riesce così a mettere l'equazione sotto la forma omogenea $f(X, Y, Z) = 0$, e basterà porre $Z = 1$ per ritrovare la primitiva forma. Per un punto (x, y, z) situato sulla curva si ha $f(x, y, z) = 0$; e si ha pure, identicamente, in virtù del *teorema di Eulero* (IV, 7),

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z) = 0 .$$

Intanto si è visto che l'equazione della tangente, in coordinate cartesiane non omogenee, è

$$(X - x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + (Y - y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 0 ,$$

dove $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1$ stanno a rappresentare ciò che diventano $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ quando vi si pone $z = 1$. Ora si ha

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0 ,$$

e però l'ultima equazione diventa

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + Y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0 ;$$

poi, rendendola omogenea, si ottiene finalmente

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$

8. Delle equazioni della tangente e della normale si fa uso quando queste rette intervengono in questioni di Geometria analitica; ma se si tratta soltanto di *costruire* la tangente o la normale ad una curva, in un dato punto, basta trovare un altro punto per ottenere, congiungendolo al punto dato, la retta che si desidera. È con questo scopo che si calcolano le lunghezze di certi segmenti, detti *sottotangente* e *sottonormale*. Se P è la projezione di M sull'asse delle ascisse, se T ed N sono i punti nei quali la tangente e la normale in M incontrano il detto asse, si chiama sottotangente il segmento TP, e sottonormale il segmento PN. Dalla figura risulta immediatamente

$$TP = y \cot\varphi = y : y' \quad , \quad PN = y \operatorname{tg}\varphi = yy' .$$

9. Quando si fa uso di coordinate polari, giova conoscere, per la determinazione della tangente, l'angolo ω che questa retta fa col raggio vettore. Nel triangolo MPM', già considerato (§ 4), si ha

$$\operatorname{tg}\omega = \lim \operatorname{tg}\widehat{OM'M} = \lim \frac{MP}{PM'} = \lim \frac{MM''}{M''M'} = \lim \frac{r\delta\theta}{\delta r} = \frac{r}{r'} .$$

www.rcin.org.pl

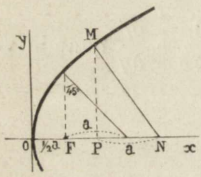
Elevata dal polo la perpendicolare al raggio vettore, essa incontra in T la tangente, in N la normale; e si chiama *sottotangente polare* il segmento OT, *sottonormale polare* il segmento ON. Evidentemente

$$OT = r \operatorname{tg} \omega = r^2 : r' \quad , \quad ON = r \cot \omega = r' .$$

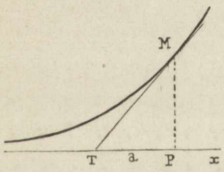
Quando si parla della lunghezza della normale in M si vuole intendere la lunghezza del segmento intercetto sulla normale, a partire da M, dall'asse delle ascisse o dalla perpendicolare elevata nel polo al raggio vettore, secondo che si fa uso di coordinate cartesiane o di coordinate polari. Le misure delle due lunghezze menzionate sono evidentemente

$$y\sqrt{1+y'^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{r^2+r'^2} .$$

10. **Esercizii**: *a)* Nella *parabola* del secondo ordine è molto semplice la costruzione (*cfr.* II, 14, *a*) della normale, perchè, se si prende come asse delle x l'asse della curva, si trova che *la sottonormale è costante*; ed è questa una proprietà caratteristica della parabola, perchè da $yy' = a$ si deduce $^1/_2 y^2 = ax + costante$, poi (prendendo l'origine sulla curva) $y^2 = 2ax$.



b) Quale curva *ha la sottotangente costante?* Si deve avere $y : y' = a$, cioè la derivata di $\log y$ dev'essere costantemente uguale ad $\frac{1}{a}$, e però, ricordando che due funzioni con derivate uguali non possono differire se non per una costante, si ha



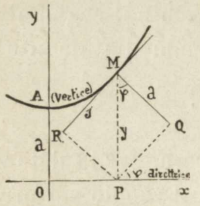
$$\log y = \frac{x}{a} + costante.$$

La costante si può prendere uguale a $\log a$ spostando convenientemente l'origine sull'asse delle x, e si perviene così all'equazione d'una *logaritmica*: $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

c) Una delle più interessanti curve è rappresentata dall'equazione

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) ,$$

e si chiama *catenaria*, perchè in Meccanica si dimostra che un filo flessibile ed inestendibile, pesante ed omogeneo, sospeso per gli estremi, assume appunto la forma d'un arco di tale curva; ed inoltre, col vertice in alto, questa curva dà il profilo delle *volte senza attrito*. Si ha



$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) , \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2} .$$

Ne segue

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2} ,$$

cioè $y \cos\varphi = a$. Dunque *la projezione dell'ordinata sulla normale è costante.* Inoltre da

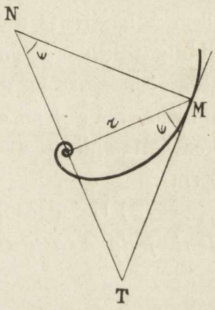
$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{y}{a} = ay''$$

www.rcin.org.pl

si deduce $ds = ady'$, poi $s = a \operatorname{tg} \varphi$, contando gli archi a partire dal vertice A. Dunque *si rettifica l'arco* AM *projettando l'ordinata sulla tangente.*

d) Si dimostra inoltre, in Meccanica, che si può far variare la densità da un capo all'altro del filo in modo che questo opponga, su tutta la sua lunghezza, egual resistenza alla rottura; ma in tal caso la forma che il filo assume è quella di un'altra curva, che si chiama appunto *catenaria di eguale resistenza*, ed è rappresentata dall'equazione $y = -a \log \cos \frac{x}{a}$. Questa curva è costituita da infiniti rami, che si ottengono spostando successivamente di $2\pi a$, parallelamente all'asse delle ascisse, in un senso o nell'altro, il ramo compreso fra gli assintoti $x = \pm {}^1/_2 \pi a$, il quale tocca l'asse nell'origine, dove tende a comportarsi come la parabola $x^2 = 2ay$. Questo ramo centrale, col vertice in alto, dà il profilo delle *volte senza sovracarico.*

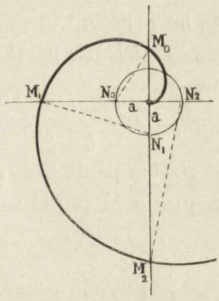
e) Molto notevole è la *spirale logaritmica*, ossia la curva che *incontra sotto un angolo costante le rette uscenti da un punto.* Se ω è costante, posto $m = \cot \omega$, da $\operatorname{tg} \omega = r : r'$ si ricava $r' : r = m$, poi $\log r = m\theta + \log a$, e finalmente $r = ae^{m\theta}$. Questa è l'equazione della spirale logaritmica. La sottonormale polare è $r' = mr$, la sottotangente è $r^2 : r' = r : m$. Dunque sottotangente e sottonormale (polari) sono proporzionali al raggio vettore. Si ha pure, successivamente,



$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r' \quad , \quad s = \frac{r}{\cos \omega} = \mathrm{MT} \ ,$$

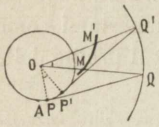
e così, mentre M percorre la curva, l'arco di spirale, contato a partire dal polo, si trova ad ogni istante rettificato in MT. Da questa proprietà ne segue immediatamente un'altra, per la quale la spirale logaritmica viene utilizzata in pratica: *se la spirale rotola, senza strisciare, sopra una retta, il suo polo descrive una retta.* Finalmente qui ci si presenta l'occasione di far notare come il rapporto d'un arco infinitesimo alla sua corda possa (*cfr.* § 2) non tendere ad 1. Infatti, quando M tende, lungo una spirale logaritmica, a confondersi col polo O di questa curva, il rapporto della corda OM all'arco OM non cessa di mantenersi uguale a $\cos \omega$.

f) Se si vuole una curva che abbia la *sottonormale polare costante*, bisogna porre $r' = a$. Ne segue, orientando convenientemente l'asse polare, $r = a\theta$. La curva rappresentata da questa equazione si chiama *spirale di Archimede*. Mentre θ cresce da 0 all'infinito, ω va da 0 ad ${}^1/_2 \pi$, perchè $\operatorname{tg} \omega = \theta$, e però la curva esce dal polo tangenzialmente all'asse polare, per tendere poi a diventar normale ai suoi raggi vettori. Evidentemente i punti N, estremi delle sottonormali polari, stanno sopra una circonferenza di raggio a, col centro nel polo. Da ogni punto di questa circonferenza si possono abbassare alla curva infinite normali, i cui punti d'incidenza stanno sopra una retta, che contiene il polo. Ma questa proprietà è ben lungi dal caratterizzare la spirale di Archimede. Così, per esempio, godono di tale proprietà anche le curve rappresentate dall'equazione $\theta = \frac{r}{a} + k \log \frac{r}{a}$, fra le quali, per



www.rcin.org.pl

$k=0$, è la spirale di Archimede. Un'altra proprietà di questa curva si può dedurre direttamente dall'equazione $r=a\theta$, dopo aver tracciato un circolo di raggio arbitrario, maggiore di a, e concentrico al circolo di raggio a, e dopo avere dai punti Q e Q', nei quali i raggi vettori OM ed OM' incontrano la circonferenza del suddetto circolo, condotte le tangenti QP e Q'P' all'altra circonferenza. Si osservi infatti che, per l'eguaglianza evidente fra i triangoli rettangoli OPQ ed OP'Q', l'angolo POP' è uguale a QOQ', ossia a $\delta\theta$, e però la lunghezza dell'arco PP' è $a\delta\theta=\delta r$. Intanto, se si fissa in A l'origine degli archi della circonferenza interna, si ha



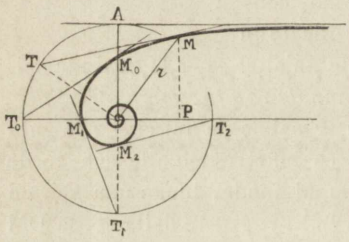
$$\text{arc}\,PP'=\text{arc}\,AP'-\text{arc}\,AP\ ,\quad \delta r=OM'-OM=QM-Q'M'\ ,$$

d'onde, aggiungendo anche $PQ=P'Q'$, segue

$$\text{arc}\,AP+PQ+QM=\text{arc}\,AP'+P'Q'+Q'M'\ ,$$

vale a dire che il punto M, mobile lungo la curva, può essere collegato al punto fisso A mediante un filo flessibile ed inestendibile APQM, costantemente teso, ma obbligato a poggiare sulla circonferenza ed a passare per Q. Su questa osservazione è fondato un apparecchio assai semplice *), che può servire a descrivere la spirale di Archimede; ed alla medesima proprietà si deve l'uso che si fa in pratica della spirale stessa come profilo di eccentrico, atto a produrre un moto uniforme.

g) Un'altra curva è caratterizzata dalla proprietà di avere la *sottotangente polare costante*. Essa si chiama *spirale iperbolica*, ed è rappresentata dall'equazione $r\theta=a$. Per θ infinitesimo, r è infinitamente grande, e però la curva si estende all'infinito; ma ciò avviene assintoticamente ad una retta, che dista per a dall'asse polare, perchè $\lim\limits_{\theta=0} r\,\text{sen}\,\theta=a$. Invece, quando θ cresce all'infinito, r tende a zero, decrescendo sempre, cioè la curva si avvolge indefinitamente intorno al polo, senza raggiungerlo mai. I punti T, estremi delle sottotangenti, stanno evidentemente sopra una circonferenza di raggio a, col centro nel polo. Da ogni punto di questa circonferenza si possono condurre infinite tangenti alla curva, ed i punti di contatto stanno sopra una retta, che contiene il polo. Ciò spiega la completa indeterminazione della tangente nel polo.



h) L'ultima proprietà della spirale iperbolica appartiene anche ad altre curve, ed in particolare alla *cocleoide*, linea rappresentata dall'equazione $r=a\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$. Infatti $\cot\omega=\dfrac{r'}{r}=\cot\theta-\dfrac{1}{\theta}$, ossia $\dfrac{\text{sen}(\omega-\theta)}{\text{sen}\,\omega}=\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}=\dfrac{r}{a}$, e d'altra parte nel triangolo OMS, il cui vertice S sta alla intersezione della tangente in M con la retta simmetrica dell'asse polare rispetto al raggio vettore, si ha

$$OS=\frac{r\,\text{sen}\,\omega}{\text{sen}(\omega-\theta)}=a\ ,$$

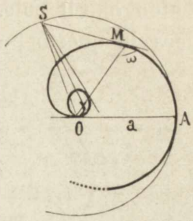
vale a dire che S appartiene alla circonferenza di raggio a, col centro nel polo.

---

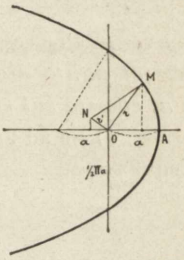
*) Clifford « *Il senso comune nelle scienze esatte* » p. 198.

www.rcin.org.pl

Dunque le tangenti negli infiniti punti, che appartengono ad uno stesso raggio vettore, concorrono in un punto della predetta circonferenza, proprio come avviene per la spirale iperbolica, tranne che il punto di concorso S è il simmetrico del punto fisso A rispetto al raggio vettore nel caso della cocleoide, mentre per l'altra curva il punto S appartiene alla perpendicolare elevata dal polo al raggio vettore.



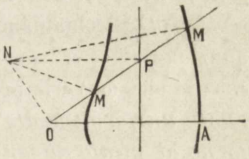
i) La curva rappresentata dall'equazione $r = \frac{a\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ si chiama *quadratrice*, e consta d'una infinità di rami, fra i quali uno, compreso fra gli assintoti $y = \pm \pi a$, ha qualche rassomiglianza con un ramo di catenaria di eguale resistenza, ed è particolarmente notevole per l'applicazione fattane dagli antichi *) al problema della *quadratura* del circolo. Si costruisce la normale in un punto qualunque osservando che *la projezione della normale polare sull'asse polare è costante.* Infatti da $r \operatorname{sen}\theta = a\theta$ si ricava, derivando,



$$r \cos\theta + r' \operatorname{sen}\theta = a \ .$$

Dall'equazione in coordinate cartesiane $\left(y = x \cot \frac{x}{a}\right)$ si deduce, ponendo per $x \cot \frac{x}{a}$ il suo sviluppo $a - \frac{x^2}{3a} + \cdots$, che la curva, intorno al vertice, tende a comportarsi come la parabola $x^2 = 3ay$.

j) Se a tutti i raggi vettori d'una curva si aggiunge o si sottrae una lunghezza costante, si ottiene un' altra curva, che si chiama *concoide* della prima. Siccome la funzione r' resta invariata quando ad r si aggiunge una costante, si vede subito che *le normali a tutte le concoidi d'una curva, nei punti situati sopra uno stesso raggio vettore, concorrono in un punto della perpendicolare elevata dal polo al raggio vettore.* Con ciò si ha il mezzo di costruire le normali ad una curva quando si conoscono le normali ad una delle sue concoidi. È interessante osservare che le concoidi d'una spirale di Archimede rispetto al polo son tutte uguali alla spirale stessa, e ne rappresentano le infinite posizioni possibili intorno al polo. Notevole è la *concoide* propriamente detta, ossia la concoide della retta, che ha due forme differenti secondo che il segmento da aggiungere o sottrarre ai raggi vettori è minore o maggiore della distanza fra la retta ed il polo. Questa curva fu ideata, come la quadratrice ed altre curve, per *trisecare* **) gli angoli.



k) Più importante ancora è la concoide del circolo rispetto ad uno dei suoi punti: $r = a \cos\theta + b$. Essa si chiama *lumaca*, ed ha tre forme differenti secondo che la lunghezza b (che si può sempre supporre positiva) è minore di a, o compresa fra a e $2a$, o maggiore di $2a$. Per $b = a$ si ha una speciale lumaca, detta *cardioide*, che separa, per così dire, il tipo delle lumache che contengono

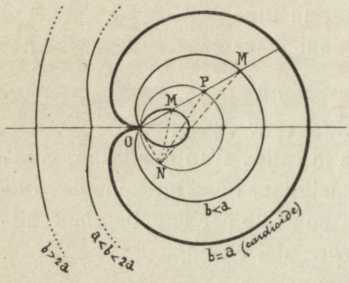
---

*) Vedi le « *conferenze* » di Klein « *sopra alcune questioni di Geometria elementare* » (trad. F. Giudice, p. 48).

**) Klein: « *Conferenze*, ecc. » p. 38.

www.rcin.org.pl

il polo, e son provviste d'un cappio interno ($b < a$), dalle altre ($b > a$) che non contengono il polo. Per sapere, intanto, se la curva passa nel polo, e quali rette tocca in questo punto, basta porre $r = 0$, per ricavarne $\cos\theta = -b:a$, equazione che fornisce valori reali di θ solo per $b \leqq a$. Per sapere se la curva incontra in altri punti l'asse polare bisogna porre $\theta = n\pi$, e portare la lunghezza $r = (-1)^n a + b$ nel senso positivo dell'asse polare, o nel senso negativo, secondo che n è pari o dispari. Si ottengono così due punti, situati alle distanze $a + b$ ed $a - b$ dal polo, e si vede che per $b > a$ la curva circonda il polo in tutte le direzioni. Più oltre si vedrà che solo per $b \geqq 2a$ essa è tutta convessa. Per costruire la normale in un punto qualunque M basta *congiungere* M *col punto diametralmente opposto, sulla circonferenza, al punto di questa, che sta sul raggio vettore* OM.

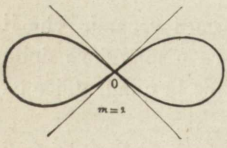


l) Se ad una curva $r = f(\theta)$ se ne fa corrispondere un'altra, definita dall'equazione

$$r = \frac{af(\theta)}{a + f(\theta)}$$

basta osservare che $r^2 : r' = f^2 : f'$ per convincersi che *le tangenti nei punti delle due curve, che appartengono ad uno stesso raggio vettore, concorrono sulla perpendicolare elevata dal polo al raggio vettore.* In particolare, fra le curve che corrispondono alla retta $r = p : e\cos\theta$, si trova la conica $r = p : (1 + e\cos\theta)$, e si ottiene così una costruzione delle tangenti ad una conica, che in fondo equivale alla nota proprietà: *se due rette si tagliano ortogonalmente in uno dei fuochi d'una conica, ciascuna di esse incontra la direttrice, corrispondente al fuoco che si considera, nel polo dell'altra.*

m) Si chiamano *spirali sinusoidi* *) le curve rappresentate dall'equazione $r^m = a^m \operatorname{sen} m\theta$. Siccome si ha $r^{m-1} r' = a^m \cos m\theta$, $\operatorname{tg}\omega = r : r' = \operatorname{tg} m\theta$, si vede che ω varia proporzionalmente a θ, vale a dire che, *se il raggio vettore ruota uniformemente intorno al polo, la tangente ruota uniformemente intorno al punto di contatto.* Per questa ragione le spirali sinusoidi si chiamano anche *linee ad inflessione proporzionale.* Esse comprendono parecchie curve notevoli, come la *parabola* (col polo nel fuoco) per $m = -{}^1/_2$, e l'*iperbole equilatera* (col polo nel centro) per $m = -2$. Per $m = {}^1/_2$ si ritrova la *cardioide*, e per $m = 2$ si ottiene un'altra notevole curva, detta *lemniscata.* Questa, come ogni altra spirale sinusoide corrispondente ad un valore positivo di m, passa nel polo, ed è tutta raccolta a distanza finita, mentre le spirali corrispondenti a valori negativi di m si estendono all'infinito, e non contengono il polo.



11. La proposizione fondamentale del Calcolo (V, 2) si può anche uti-

*) Per le proprietà di questa e di altre curve vedi Cesàro: « *Lezioni di Geometria intrinseca* » p. 45.

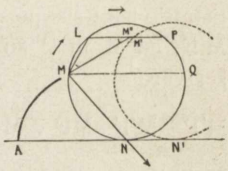
www.rcin.org.pl

lizzare in forma geometrica. Se, per esempio, si tratta di costruire la tangente ad una curva, in un punto M, si può al punto M′, infinitamente vicino ad M sulla curva, sostituire un punto M″ infinitamente vicino ad M′, purchè la distanza M′M″ sia infinitamente piccola rispetto ad MM′, vale a dire che si abbia $\lim(M'M'':MM')=0$. Infatti, ammessa l'esistenza della tangente, a cui tende MM′, anche MM″ deve tendere alla medesima retta, perchè nel triangolo MM′M″, qualunque sia l'angolo in M″, si ha

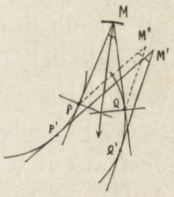
$$\lim \operatorname{sen} \widehat{M'MM''} = \lim \frac{M'M''}{MM'} \operatorname{sen} \widehat{MM''M'} = 0 \ .$$

Diamo qui appresso alcuni *) esempii:

a) Quando un circolo rotola, senza strisciare, sopra una retta, ciascun punto della sua circonferenza descrive una curva, che si chiama *cicloide*. Siano N ed N′ i punti nei quali il circolo, considerato in due posizioni infinitamente vicine, tocca la retta, e siano M ed M′ le corrispondenti posizioni di quel punto che descrive la cicloide. Per passare da M ad M′ si può evidentemente immaginare che il circolo prima ruoti intorno al suo centro in modo da portare in L il punto M, allontanandolo così da N per un arco ML uguale ad NN′; e poi che il circolo stesso si trasferisca, parallelamente alla retta, nella sua seconda posizione, in modo che il punto M, già venuto in L, vada poi in M′, descrivendo il segmento LM′ = NN′. Orbene su questo segmento si può ad M′ sostituire un punto M″, tale che LM″ = LM, trascurando così la differenza LM′ — LM″ = arco LM — corda LM, infinitesima del terzo ordine; e la normale in M alla cicloide si potrà considerare come limite della perpendicolare abbassata da L su MM″. Intanto, se le parallele condotte per L ed M alla retta fissa incontrano la circonferenza in P e Q, è chiaro che, essendo isoscele il triangolo LMM″, la suddetta perpendicolare divide per metà l'arco MNP, e però *la normale in* M divide per metà l'arco MNQ, cioè *passa per* N. Questa proprietà sarà più innanzi confermata dal calcolo.



b) Consideriamo la curva descritta dal vertice M d'un angolo *costante*, i cui lati si spostano nel piano tangenzialmente a due curve date. Siano P e Q i punti di contatto per una data posizione dell'angolo; siano P′ e Q′ gli analoghi punti quando il vertice si trova nella posizione M′, infinitamente prossima ad M; sia M″ il punto comune alle parallele condotte per P e Q ai lati dell'angolo nella seconda posizione, e si noti che le distanze di M″ a questi lati sono generalmente infinitesime del secondo ordine, perchè ciascuna di esse è uguale alla distanza fra la tangente ad una curva ed un punto infinitamente vicino al punto di contatto. È facile dedurne che anche M′M″ è infinitesimo d'un ordine superiore, e però la tangente cercata è il limite della retta MM″; ma, per l'eguaglianza fra gli angoli M ed M″, il punto M″ appartiene alla circonferenza fissa MPQ, e però MM″ tende a toccare, in M,

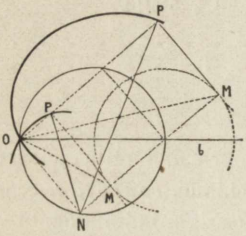


*) Il lettore troverà più estese applicazioni di questo principio nei vecchi ma sempre interessanti « *Éléments de Calcul infinitésimal* » di Duhamel (t. I, livre I).

www.rcin.org.pl

questa circonferenza. Dunque la normale, in M, al luogo dei vertici, *si ottiene congiungendo* M *col punto d'incontro delle normali in* P *e* Q *alle curve date.*

c) Si chiama *pedale* d'una curva, rispetto ad un punto qualunque O, il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate da O sulle tangenti alla curva. Se M è un punto di questa curva, e P la projezione di O sulla tangente in M, la normale in P alla pedale *si costruisce congiungendo* P *al punto medio di* OM.



Questa costruzione si deduce subito dalla precedente, dopo avere osservato che, nel caso attuale, l'angolo è retto, ed una delle curve si riduce ad un punto. Così, per esempio, si ritrova la costruzione già ottenuta (§ 10, *k*) per le normali ad una lumaca, giacchè si constata facilmente che la curva $r = a\cos\theta + b$ si può anche considerare come pedale d'un circolo di raggio *b* rispetto ad un punto, situato alla distanza *a* dal centro. In particolare, se si hanno due circoli tangenti, uno dei quali doppio dell'altro, la pedale del circolo esterno, rispetto al punto di contatto, è concoide del circolo interno: essa è una cardioide.

d) Per finire si consideri un'ellisse. Siano M ed M′ due punti infinitamente vicini su questa curva, siano F ed F′ i fuochi, e si projetti M in P su M′F, ed M′ in P′ su MF′. A prescindere da infinitesimi del secondo ordine si può scrivere

$$M'P = M'F - MF\ ,\quad MP' = MF' - M'F'\ ,\quad M'P - MP' = (M'F + M'F') - (MF + MF') = 0\ .$$

Dunque $M'P = MP'$; poi, dividendo per MM′, si ottiene $\cos\widehat{MM'F} = \cos\widehat{M'MF'}$, e finalmente, passando al limite, $\widehat{TMF} = \widehat{TMF'}$, cioè *la tangente è ugualmente inclinata sui raggi vettori.* È questa una proprietà caratteristica dell'ellisse, giacchè dall'ultima eguaglianza si trae, seguendo il cammino inverso, $M'P = MP'$; quindi, scrivendo dMF per M′P, e $-dMF'$ per MP′, si ottiene l'eguaglianza *esatta* $dMF + dMF' = 0$, e finalmente $MF + MF' =$ *costante.* In modo analogo si conduce la dimostrazione nel caso dell'iperbole.

Curvatura.

12. Si chiama *angolo di contingenza* il differenziale sostituibile (*cfr.* § 1) all'angolo di due tangenti infinitamente vicine, ed il suo rapporto al differenziale dell'arco si chiama *curvatura* della linea nel punto che si considera. Evidentemente, se φ è l'inclinazione della tangente sopra una retta fissa, l'angolo di contingenza è $d\varphi$, e però la curvatura è misurata dalla derivata di φ rispetto all'arco *s*. Per giustificare la precedente definizione della curvatura si osservi che, se fuori del punto M si prende, sulla curva, un punto M′, abbastanza (*cfr.* § 2) vicino ad M perchè l'arco MM′ sia tutto convesso da una parte, è naturale dire che questo arco è, per un dato valore δs della sua lunghezza, tanto più *curvo* quanto più grande è l'angolo $\delta\varphi$ delle tangenti estreme, ed è per conseguenza naturale assumere come misura della curvatura del detto arco il rapporto $\delta\varphi : \delta s$, che tende appunto a $d\varphi : ds$ quando, fissato M, si fa tendere M′ ad M. Ciò premesso, se la

www.rcin.org.pl

retta fissa è l'asse delle ascisse, i coseni direttori della tangente sono

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\varphi \ ,$$

e da queste uguaglianze si deduce, derivando,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\operatorname{sen}\varphi \frac{d\varphi}{ds} \quad , \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} \ ;$$

poi (V, 11, *d*)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = \frac{d\varphi}{ds} \ .$$

Nel caso d'una circonferenza di raggio ρ questa formola ci dice che la curvatura è costantemente espressa, in tutti i punti, da $\frac{1}{\rho}$; e però si può asserire che *la curvatura d'una linea piana qualunque è misurata, in ogni punto, dalla curvatura della circonferenza del suo circolo osculatore* (III, 32, *e*). È per questo che il raggio ed il centro del circolo osculatore si chiamano anche *raggio di curvatura* e *centro di curvatura.*

13. La definizione della curvatura si può anche giustificare per altra via, assumendo prima come misura della curvatura d'una circonferenza il numero inverso di quello che ne misura il raggio, come evidentemente si può fare dopo avere osservato che le piccole circonferenze sono, nel senso volgare della parola, più curve delle grandi. Dopo ciò, per misurare la curvatura d'una linea qualunque nel punto M, si considerino tutte le circonferenze che toccano in M la linea stessa, e che insieme a questa rivolgono la loro concavità tutte in un senso. È chiaro che, sempre secondo il concetto intuitivo che si ha della curvatura, si può dire che la linea data è più curva delle circonferenze *esterne*, meno curva delle *interne*, e si è in tal modo condotti ad asserire che la linea è tanto curva quanto la circonferenza del circolo osculatore, purchè prima si dimostri che questa appunto è la linea che separa le circonferenze esterne dalle interne. Ed infatti, se r è il raggio di una circonferenza tangente alla curva in M, ed h la distanza di M′ alla circonferenza stessa, si ha

$$(2r + h)h = (\delta x + r\operatorname{sen}\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2 - r^2 \ ;$$

poi, trascurando gli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo,

$$2rh = l^2 - 2r\frac{dx\,\delta y - dy\,\delta x}{ds} + \ldots\ldots$$

ovvero, ricordando ciò che si è detto nel § 5,

$$h = \frac{ds^2}{2r} - \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{2ds} - \frac{dx\,d^3y - dy\,d^3x}{6ds} - \ldots \ .$$

Intanto, se si prende s per variabile indipendente,

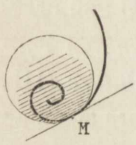
$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{ds^3}{\rho} \quad , \quad dx\,d^3y - dy\,d^3x = ds^3 d\frac{1}{\rho} \ .$$

www.rcin.org.pl

Dunque

$$h = \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{ds^2 d\rho}{6\rho^2} + \ldots\ldots .$$

In generale h è un infinitesimo del secondo ordine, positivo o negativo, *intorno ad* M, secondo che $r < \rho$ o $r > \rho$, vale a dire che i punti M′ sufficientemente vicini ad M sono *tutti esterni* o *tutti interni* al circolo, secondo che questo è più piccolo o più grande del circolo osculatore; ma per $r = \rho$ la distanza h diventa infinitesima d'un ordine superiore al secondo, ed ha il segno di $d\rho$. Ne segue, se la derivata di ρ rispetto ad s si suppone continua e diversa da zero in M, e se la curva s'immagina percorsa nel senso in cui l'arco s va crescendo, che i punti M′ sufficientemente vicini ad M sono, *prima* di M, interni al circolo osculatore, ed esterni *dopo*, se la curvatura va decrescendo; ed invece, quando la curvatura cresce con s, i punti M′ sono esterni prima di M, ed interni dopo. Dunque, in generale, *il circolo osculatore attraversa la curva nel punto stesso in cui la tocca.* Tuttavia può darsi che ciò non avvenga nei punti in cui si annulla $d\rho$, e nei quali, per conseguenza, h diventa infinitesima almeno del quarto ordine; ma, in tutti i casi, *il circolo osculatore in un punto* M *è caratterizzato dalla proprietà di avere, dai punti* M′ *infinitamente vicini ad* M, *distanze infinitesime d'un ordine superiore al secondo.*



14. Se H è il punto d'incontro delle normali in M ed M′, è facile dimostrare che il centro di curvatura, in M, è la posizione limite del punto H, quando, fissato M, si fa tendere M′ ad M. Infatti, se si rappresenta con n la lunghezza del segmento MH, la distanza di M alla normale in M′, evidentemente uguale ad $n \operatorname{sen} \delta\varphi$, si può d'altra parte esprimere come somma delle projezioni di δx e δy sulla tangente in M′, dimodochè

$$n \operatorname{sen} \delta\varphi = \cos(\varphi + \delta\varphi) . \delta x + \operatorname{sen}(\varphi + \delta\varphi) . \delta y \ ;$$

quindi, se si chiama ρ il limite di n, si ha $\rho d\varphi = \cos\varphi . dx + \operatorname{sen}\varphi . dy = ds$, vale a dire che ρ è proprio il raggio di curvatura. Si può dunque affermare che *le normali in punti infinitamente vicini ad* M *passano a distanze infinitesime dal centro di curvatura in* M; ed è poi facile apprezzare queste distanze osservando che si ha, a prescindere da infinitesimi superiori, nell'ipotesi che la variabile indipendente sia φ,

$$n = (\cos\varphi . \delta x + \operatorname{sen}\varphi . \delta y) \cot \delta\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{ds\,d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} + \frac{d^2 s}{2 d\varphi} ,$$

e finalmente $n = \rho + {}^1/_2 d\rho$.

15. **Esercizii**: *a)* Proponiamoci di costruire i centri di curvatura delle linee che più frequentemente si adoperano nella pratica, e cominciamo dalla più semplice di tutte, dopo il circolo, ossia dalla *spirale logaritmica* ($r = ae^{m\theta}$), che del resto si riduce ad un circolo per $m = 0$. Siccome $r' = mr$, $r'' = mr' = m^2 r$, si ha

www.rcin.org.pl

$r'^2 = rr''$, e ρ diventa uguale a $\sqrt{r^2 + r'^2} = n$. Dunque (*cfr.* § 10, *e*) il centro di curvatura è N, vale a dire che *nella spirale logaritmica il raggio di curvatura è uguale alla normale polare.* Questa proprietà apparisce evidente se, ricordando le cose dette nel precedente paragrafo, si osserva che il punto H, comune alle normali in M ed M′, appartiene alla circonferenza OMM′, giacchè $\widehat{OMH} = \widehat{OM'H}$. Quando M′ tende ad M, la circonferenza tende a diventare tangente alla curva, in M, e però H tende a confondersi con N, punto diametralmente opposto ad M sulla circonferenza limite. Precedentemente si è visto che la tangente polare, cioè MT, rappresenta la lunghezza dell' arco, contato a partire dal polo; ed ora si noti la relazione $\rho = ms$, che si legge, per così dire, nel triangolo NMT. Per ogni curva piana si può considerare l'analoga relazione fra s e ρ, che si chiama *equazione intrinseca* della curva, ed è sufficiente *) per definirne la forma.

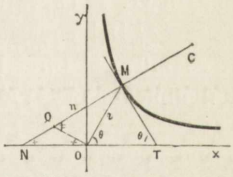
b) Per la *logaritmica* $\left(y = ae^{\frac{x}{a}}\right)$ si ha $y' = \frac{y}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, $y'' = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}$; quindi

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{y''\cos^3\varphi} = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi} = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{y}{\cos\varphi}\,.$$

Siano T ed N i punti nei quali la tangente e la normale incontrano l'assintoto. Se la perpendicolare elevata da T all'assintoto incontra in H la normale, *il raggio di curvatura è lungo quanto il segmento* NH, e però il centro C si può costruire prendendo HC = NM.

c) Per l'*iperbole equilatera*, riferita agli assintoti, si ha

$$y = \frac{a^2}{x},\ y' = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{y}{x}\,,$$



e però $\widehat{MTO} = \theta$; poi

$$y'' = \frac{2a^2}{x^3} = \frac{2y}{x^2}\,,\quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}\,,\quad \rho = \frac{r^3}{2a^2}\,.$$

Dunque *il raggio di curvatura varia proporzionalmente al cubo del diametro.* Per costruire il centro di curvatura si osservi che si ha

$$\rho = \frac{r^3}{2a^2} = \frac{r^3}{2xy} = \frac{r}{\operatorname{sen}2\theta} = \mathrm{MQ}\,.$$

Dunque MC = MQ, cioè *il centro di curvatura è simmetrico di* Q *rispetto ad* M. Qui notiamo che, se si prendono altri due punti M′ ed M″ sulla curva, il segmento rettilineo, che va dal centro del circolo MM′M″ all' ortocentro del triangolo MM′M″, è diviso nel rapporto di 1 a 2 dal baricentro dello stesso triangolo, e che, d'altra parte, per una nota proprietà dell' iperbole equilatera, l'ortocentro appartiene alla curva. Dunque, se M′ ed M″ tendono ad M, siccome il baricentro ed il centro del circolo circoscritto tendono a confondersi rispettivamente con M e con C, è chiaro che l'ortocentro tende al punto H d'incontro della normale con l'altro ramo dell'iperbole, e che si ha MH = 2ρ. In altri termini *il diametro del circolo osculatore in un punto qualunque di un'iperbole equilatera è uguale al segmento che la curva stessa determina sulla normale.*

---

*) « *Geometria intrinseca* » p. 7.

www.rcin.org.pl

d) Notevole è la *cardioide*, anche per la facilità con cui si lascia rettificare. Da $r = a(1 + \cos\theta)$ si deduce, successivamente,

$$r' = -a \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = 2a\cos\frac{\theta}{2} \quad , \quad s = 4a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} ,$$

ponendo nel vertice A l'origine degli archi. Se il raggio vettore OM incontra in L la circonferenza che passa per A, col centro nel polo, si vede che l'*arco* AM *è lungo quanto il segmento rettilineo* AL. Ne segue, in particolare, che la lunghezza dell'intera cardioide è $8a$. Inoltre

$$r'' = -a\cos\theta \ , \ r'^2 - rr'' = a^2(1 + \cos\theta) = {}^1/_2 n^2 \ , \ \rho = \frac{n^3}{n^2 + {}^1/_2 n^2} = {}^2/_3 n \ .$$

Dunque *il centro di curvatura, in* M, *divide la normale polare* MN *nel rapporto di* 2 *ad* 1. Finalmente si noti che l'equazione intrinseca della cardioide è $s^2 + 9\rho^2 = costante$. Se poi si computano gli archi a partire dal polo, si trova che la *lunghezza dell'arco* OM è $s = 4a\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$, e d'altra parte la *lunghezza della corda* OM è $r = a(1 + \cos\theta) = s - \frac{s^2}{8a}$. A questa relazione si può anche giungere per via geometrica, dopo avere osservato che, in virtù dell'equazione stessa della cardioide, la perpendicolare condotta per A ad OM passa nel simmetrico di L rispetto ad M; quindi $AL^2 = 4a.2ML$, ossia $(4a - s)^2 = 8a(2a - r)$, *ecc.* Ne segue che, quando M tende ad O, la differenza fra l'arco e la corda è infinitesima, non del *terzo* ordine (*cfr.* § 5), ma del *secondo*: ciò si deve al fatto che, in O, la curvatura è infinita.

e) Dall'equazione delle *spirali sinusoidi* $r^m = a^m \operatorname{sen} m\theta$ si deduce $r^{m-1}r' = a^m \cos m\theta$, poi $(m-1)r^{m-2}r'^2 + r^{m-1}r'' = -mr^m$, cioè $(m-1)r'^2 + rr'' = -mr^2$, e finalmente $r'^2 - rr'' = m(r^2 + r'^2)$. Dunque

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+m)(r^2 + r'^2)} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{1+m} = \frac{n}{1+m} ,$$

vale a dire che *il raggio di curvatura è proporzionale alla normale polare.* Per $m = -2$ e per $m = {}^1/_2$ si ritrovano le precedenti costruzioni del centro di curvatura dell'iperbole equilatera e della cardioide; per $m = 2$ si ottiene l'analoga costruzione per la *lemniscata*; per $m = -{}^1/_2$ si trova che, nella *parabola*, la perpendicolare condotta per il fuoco al raggio vettore divide per metà il raggio di curvatura; *ecc.* Finalmente facendo $m = 0$ si ricade sulla costruzione trovata per la spirale logaritmica. Per questa ragione, siccome d'altra parte l'equazione $r^m = a^m \operatorname{sen} m\theta$ diventa illusoria per $m = 0$, si suole considerare anche la spirale logaritmica come una spirale sinusoide, corrispondente al valore 0 dell'indice m. Essa è come la linea di separazione fra la classe (*cfr.* § 10, m) delle spirali sinusoidi finite, e quella delle spirali sinusoidi che si estendono all'infinito.

f) Le due classi di spirali sinusoidi si deducono l'una dall'altra per *inversione.* Si chiama così quella trasformazione geometrica, che fa corrispondere a ciascun punto del piano il suo reciproco rispetto ad un circolo fisso. Se $r = f(\theta)$ è l'equazione d'una curva qualunque, $r = a^2 : f(\theta)$ è l'equazione della sua inversa rispetto ad un circolo, che ha il raggio a ed il centro nel polo. Così la spirale di Archimede e la spirale iperbolica, la cocleoide e la quadratrice, l'iperbole equi-

www.rcin.org.pl

latera e la lemniscata, la parabola e la cardioide, e più generalmente due spirali sinusoidi con indici m uguali, ma opposti nel segno, ci offrono altrettanti esempii di curve inverse. È dunque utile sapere come si costruiscono i centri di curvatura d'una linea quando si sanno costruire quelli d'una sua inversa. Lasciamo al lettore la cura di far vedere che, in due punti che si corrispondono su due curve inverse, le tangenti sono antiparallele rispetto al raggio vettore ed *i centri di curvatura sono in linea retta col centro d'inversione.*

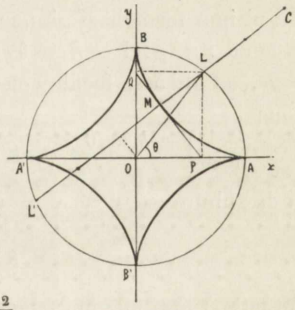
g) Si chiama *asteroide* la curva rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Simmetrica rispetto agli assi, la curva è costituita da quattro archi uguali, tangenti agli assi negli estremi. Sia AB uno dei quadranti, e si fissi nel suo punto di mezzo $(x=y=a:2\sqrt{2})$ l'origine degli archi. Evidentemente

$$y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{1+y'^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad s={}^3/_2(ax^2)^{\frac{1}{3}}-{}^3/_4a\ .$$

Ne segue, in particolare, che la lunghezza dell'intera curva è $6a$. Inoltre

$$y''=\frac{1}{3x}\left(\frac{a^2}{xy}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \rho=3(axy)^{\frac{1}{3}}\ ;$$

poi un calcolo facile mostra che $4s^2+\rho^2=costante$ è l'equazione intrinseca dell'asteroide. Ma più agevolmente si riesce a scoprire le proprietà di questa curva, considerandola come un luogo geometrico, definito nel modo che segue. Dall'origine, col raggio a, si descriva la circonferenza, e ciascun punto di questa, L, si projetti prima sugli assi, in P e Q, poi su PQ, in M. Il luogo di M è un'asteroide, perchè, se si rappresenta con θ l'angolo AOL, si ha $MP=a\,\mathrm{sen}^2\theta$, $MQ=a\cos^2\theta$, e però le coordinate di M sono



$$x=MQ.\cos\theta=a\cos^3\theta\ , \quad y=MP.\mathrm{sen}\theta=a\,\mathrm{sen}^3\theta\ ,$$

e soddisfano, come si vede, all'equazione $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Ciò premesso, si ha

$$dx=-3a\,\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta\,d\theta\ , \quad dy=3a\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta\ , \quad ds=3a\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\ .$$

Dunque, in primo luogo, l'inclinazione della tangente sull'asse delle x è $\pi-\theta$, vale a dire che la tangente in M è la stessa retta PQ. Ne segue subito che *il segmento determinato dagli assi sulla tangente è costantemente uguale ad* a. Inoltre, se l'origine degli archi si pone nel punto medio dell'arco AB, si ha $s=-{}^3/_4a\cos2\theta$, e però

$$\text{arco}\,MA={}^3/_4a(1-\cos2\theta)={}^3/_2a\,\mathrm{sen}^2\theta={}^3/_2MP\ .$$

Dunque gli archi MA ed MB si possono subito rettificare, sulla tangente, prolungando per una metà i segmenti MP ed MQ. Finalmente il raggio di curvatura, a prescindere dal segno, è

$$\rho=\frac{ds}{d\theta}={}^3/_2a\,\mathrm{sen}2\theta\ ,$$

e si vede nuovamente che $4s^2+\rho^2={}^9/_4a^2$; poi, se si osserva che $ML=a\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta$,

www.rcin.org.pl

si ottiene $\rho = 3ML$. Dunque *il raggio di curvatura è triplo di* ML. Se poi si designa con L′ l'altro punto d'incontro della normale con la circonferenza, si può anche dire che *il centro di curvatura è il simmetrico di* L′ *rispetto ad* M.

h) Nelle coniche la curvatura varia come il cubo della distanza fra la tangente ed il centro. Se, per fissare le idee, si prende un'ellisse, riferita ai suoi assi, si può dall'equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ successivamente dedurre

$$b^2x + a^2yy' = 0 \quad , \quad b^2 + a^2y'^2 + a^2yy'' = 0 \quad , \quad a^2y^3y'' = -b^4 \; ;$$

poi, introducendo la distanza del centro alla tangente

$$h = \frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{b^2}{y\sqrt{1 + y'^2}} \, ,$$

e scegliendo convenientemente il segno di ρ,

$$\rho = \frac{a^2b^2}{h^3} \, .$$

Altre forme di ρ si ottengono cercando di far comparire, invece di h, la lunghezza l del semi-diametro conjugato ad OM, o la lunghezza n del segmento MN di normale, compreso fra il punto d'incidenza e l'asse focale. Basta infatti osservare che $lh = ab, nh = b^2$, per trovare

$$\rho = \frac{l^3}{ab} \quad , \quad \rho = \frac{n^3}{p^2} \, .$$

All'ultima formola si giunge rapidamente se si fa uso di coordinate polari. Infatti, essendo $r = p:(1 - k\cos\theta)$ l'equazione della conica, riferita ad un fuoco F come polo, ed all'asse focale come asse polare, una nota formola (V, 11, d), in cui si pone

$$f = \frac{1 - k\cos\theta}{p} \quad , \quad f' = \frac{k}{p}\operatorname{sen}\theta \quad , \quad f'' = \frac{k}{p}\cos\theta \quad , \quad f + f'' = \frac{1}{p} \, ,$$

ci dà subito

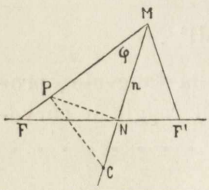
$$\rho = \frac{(r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \, .$$

Intanto si noti che nel triangolo FMF′, poichè MN è bisettrice dell'angolo M, si ha (ricordando che $MF + MF' = 2a, NF + NF' = 2ka$)

$$\frac{FN}{2ka} = \frac{FM}{2a} \quad , \quad FN = kr \quad , \quad n^2 = r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2 \, .$$

Si ricade così sulla formola ottenuta precedentemente.

i) Ed ora, interpretando geometricamente l'ultima forma di ρ, cerchiamo di costruire il centro di curvatura in un punto d'una conica. Prima osserviamo che, se si projetta FNM su FM, si trova



$$n\cos\varphi = r - kr\cos\theta = p \, ,$$

vale a dire che *la projezione della normale sul raggio vettore è costantemente uguale a* p. Ciò premesso, si ha

$$\rho = \frac{n^3}{p^2} = \frac{n}{\cos^2\varphi} \, .$$

Dunque *per* N *si elevi la perpendicolare alla normale fino all'incontro con un*

www.rcin.org.pl

raggio vettore, in P; *poi da* P *si elevi la perpendicolare al raggio vettore: questa incontra la normale nel centro cercato.* Alcune semplici considerazioni di geometria infinitesimale conducono per altra via alla medesima costruzione. Posto $MF = r$, $MF' = r'$, se M′ è infinitamente vicino ad M si ha, confondendo la retta MM′ con la tangente in M, e valutando in due modi le distanze di questa ai fuochi,

$$r\cos\varphi = (r + dr)\cos\left(\varphi + d\varphi - \frac{ds}{\rho}\right), \quad r'\cos\varphi = (r' + dr')\cos\left(\varphi + d\varphi + \frac{ds}{\rho}\right),$$

dopo avere osservato che i complementi degli angoli FM′T, F′M′T hanno i valori $\mp(\varphi + d\varphi)$, aumentati dell'angolo di contingenza. Se inoltre si osserva che $dr' = -dr = \operatorname{sen}\varphi . ds$, le precedenti uguaglianze si riducono a

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{r} = 0, \quad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{\rho} - \frac{\cos\varphi}{r'} = 0,$$

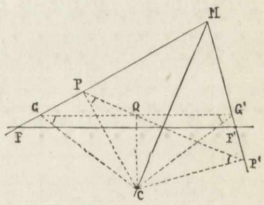
e se ne deduce, sottraendo,

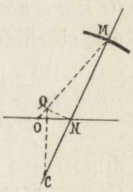
$$\frac{2}{\rho\cos\varphi} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

A questa formola si giunge anche più rapidamente osservando *) che l'angolo delle normali in M ed M′ è medio aritmetico fra gli angoli, sotto i quali dai fuochi si vede MM′. Ed ora si noti, per l'interpretazione geometrica dell'ultima formola, che, essendo i fuochi separati armonicamente dalla normale e dalla tangente, le loro projezioni sulla normale dividono armonicamente il segmento n, diguisachè si ha

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{r\cos\varphi} + \frac{1}{r'\cos\varphi},$$

e finalmente $\rho\cos^2\varphi = n$; ecc. Mediante semplicissime considerazioni geometriche si trasforma poi la costruzione precedente in un'altra parimenti utile, dovuta a Mannheim **). La perpendicolare condotta per C ad FF′ incontri PP′ in Q, e siano G e G′ i punti d'incontro con MF ed MF′ della parallela condotta per Q ad FF′. Siccome gli angoli CPG e CQG sono retti, i punti C, P, Q, G stanno sopra una circonferenza, e però $\widehat{CGQ} = \widehat{CPQ}$. Analogamente si dimostra che $\widehat{CG'Q} = \widehat{CP'Q}$; e siccome, evidentemente, si ha $\widehat{CPQ} = \widehat{CP'Q}$, si ha pure $\widehat{CGQ} = \widehat{CG'Q}$, cioè il triangolo CGG′ è isoscele, e però Q divide GG′ per metà. Ne risulta che la retta MQ incontra FF′ nel punto di mezzo, cioè nel centro della conica. Si perviene così a quest'altra costruzione: *per* N *si elevi la perpendicolare alla normale fino all'incontro col diametro, in* Q; *poi da* Q *si conduca la perpendicolare all'asse focale: questa incontra la normale nel centro di curvatura.*





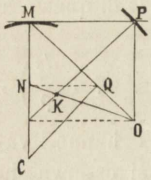
j) La prima costruzione del centro di curvatura d'una conica ci mette in grado di *costruire, in un punto, il centro di curvatura della pedale d'una curva qualunque, rispetto ad un punto dato,*

*) Duhamel « *Éléments de Calcul* » (t. I, p. 178).

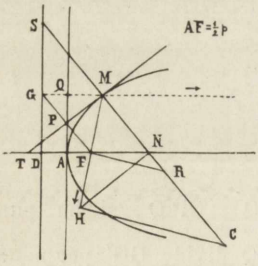
**) « *Cours de Géométrie descriptive* » p. 175.

www.rcin.org.pl

quando si conosce il corrispondente centro di curvatura della curva stessa. Al punto M della curva data corrisponda, sulla pedale, il punto P, sia cioè P la projezione d'un punto fisso O sulla tangente alla curva, in M. Il centro di curvatura di questa linea si projetti su OM, in Q, poi si projetti Q sulla normale MC, ed il punto N così ottenuto si congiunga ad O. *Il centro di curvatura della pedale, in* P, *sta all'intersezione* K *di* ON *con la normale, in* P, *alla pedale.* Infatti, quando si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore al secondo, alla curva data si può, intorno ad M, sostituire la circonferenza del circolo osculatore, o qualunque altra curva che in M ammetta il medesimo centro di curvatura C; ed è chiaro che alla pedale della curva data, rispetto ad O, verrà a sostituirsi, intorno a P, la pedale della nuova curva, senza che ne rimanga alterata la posizione del centro di curvatura K. Intanto si sa dalla Geometria analitica che la pedale d'una conica rispetto ad un fuoco è la circonferenza descritta sull'asse maggiore come diametro. Dunque possiamo affermare che K è il centro d'una conica, che ha un fuoco in O, passa per M, ed ha in C il corrispondente centro di curvatura. Ora dalla costruzione apparisce evidente che tale conica è appunto quella che ha l'asse focale ON. Dunque K appartiene ad ON. Il lettore potrà esercitarsi ad applicare questa costruzione alla lemniscata, considerata come pedale d'una iperbole equilatera, rispetto al centro, ed alla cardioide, pedale d'una circonferenza rispetto ad uno dei suoi punti, ed in tal modo ritroverà, con l'ajuto di considerazioni geometriche elementarissime, le costruzioni particolari già segnalate.



k) Quando si applica alla parabola la prima costruzione del centro di curvatura d'una conica, si riconosce facilmente, per mezzo di eguaglianze di angoli, che i triangoli MFN, HFN sono isosceli, e se ne deduce che MH è diviso per metà da F. Si ricade così sulla costruzione già trovata, in virtù della quale si può dire che *la parabola è una spirale sinusoide*, col polo nel fuoco. Ma se invece del *fuoco* è data la *direttrice*, conviene sostituire alla costruzione precedente quella che ora ne dedurremo per mezzo di semplicissime osservazioni. Si projetti M in G, sulla direttrice, e sia S il punto d'incontro della normale con la direttrice. I triangoli rettangoli MFR, MGS sono uguali, perchè hanno uguali gli angoli in M, ed inoltre, per una notissima proprietà della parabola, è MF = MG. Sono dunque uguali fra loro le ipotenuse MR, MS. Ne segue che *il raggio di curvatura è doppio del segmento di normale, staccato dalla direttrice a partire dal punto d'incidenza.* E siccome si chiamano *linee di Ribaucour* tutte quelle linee che hanno il raggio di curvatura proporzionale alla normale cartesiana, si può dire che *la parabola è una linea di Ribaucour.*



l) Anche la *catenaria* è una linea di Ribaucour. Infatti, siccome si è dimostrato che, nel triangolo rettangolo MPN, la projezione di MP $= y$ sull'ipotenusa MN $= n$ è MQ $= a$, dimodochè si ha $y^2 = an$, dall'equazione della curva

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ si deduce } y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2},\ \rho = \frac{n^3}{y^3 y''} = \frac{a^2 n^3}{y^4} = n\ .$$

www.rcin.org.pl

Dunque *il centro di curvatura è simmetrico di* N *rispetto ad* M. Si è anche visto precedentemente che l'arco s, contato a partire dal vertice A, è uguale a PQ. Ne segue che nel triangolo MPN si ha $s^2 = \mathrm{MQ.QN}$; quindi, essendo $n = \mathrm{MQ} + \mathrm{QN}$, si vede che l'equazione intrinseca della catenaria è $\rho = a + \frac{s^2}{a}$.

m) Per la *catenaria di eguale resistenza* $\left(y = -a \log \cos \frac{x}{a}\right)$ si ha

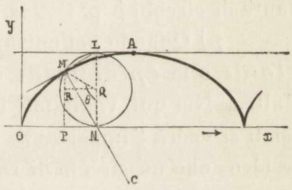
$$y' = \operatorname{tg} \frac{x}{a} \quad , \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{\cos \frac{x}{a}} \quad , \quad y'' = \frac{1}{a \cos^2 \frac{x}{a}} \quad , \quad \rho = \frac{a}{\cos \frac{x}{a}} \, ,$$

cioè $\rho \cos \varphi = a$. Dunque *la projezione del raggio di curvatura sull'asse di simmetria della curva è costantemente uguale ad* a. Meno facile è il calcolo di s, che potremo eseguire nella terza parte del corso; ed allora saremo in grado di vedere che l'equazione intrinseca della catenaria di eguale resistenza è

$$\rho = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right) .$$

n) Altra importante linea di Ribaucour è la cicloide (*cfr.* § 11, *a*). Riferiamoci alla figura, ed osserviamo che, essendo (per definizione) ON=arcMN=$a\theta$, le coordinate di M sono

$$x = \mathrm{ON} - \mathrm{PN} = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \, ,$$
$$y = \mathrm{PR} + \mathrm{RM} = a(1 - \cos\theta) \, .$$



Ne segue

$$dx = a(1 - \cos\theta) d\theta \, , \quad dy = a \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, ;$$

quindi $dy : dx = \cot \frac{\theta}{2}$. D'altra parte $\widehat{\mathrm{MLN}} = {}^1/_2 \widehat{\mathrm{MQN}} = {}^1/_2 \theta$. Dunque ML è la tangente, e per conseguenza MN è la normale alla curva, in M. Quadrando e sommando le ultime uguaglianze si ottiene ds^2, poi successivamente

$$ds = 2a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta \quad , \quad s = 4a\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right) = 8a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{4} \, ,$$

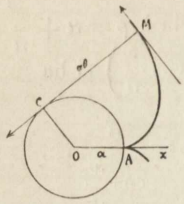
convenendo di contare gli archi a partire dal punto O. La *lunghezza d'un arco completo di cicloide*, ossia d'un arco generato in un giro completo del circolo, si ottiene facendo $\theta = 2\pi$: essa è dunque $8a$, cioè *quattro volte il diametro del circolo generatore.* Siccome poi, a prescindere dal segno, l'angolo di contingenza è ${}^1/_2 d\theta$, si ha subito $\rho = 4a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$, ossia $\rho = 2n$. Dunque *il centro di curvatura è simmetrico di* M *rispetto ad* N. È questa una proprietà quasi evidente *), in virtù di ciò che si è detto in precedenti paragrafi (§§ 14; 10, *a*). Finalmente, se l'origine degli archi si pone nel vertice A (punto medio d'un arco completo), si ha $s = 4a \cos \frac{\theta}{2}$, e si vede subito che l'equazione intrinseca della cicloide è $s^2 + \rho^2 = costante$.

o) Più generalmente chiamansi *rullette* le curve descritte da un punto di

*) Duhamel, *loc. cit.*, p. 177.

www.rcin.org.pl

una linea che rotola, senza strisciare, sopra un'altra linea, fissa nel piano. Per tutte le rullette si ha la proprietà, osservata nella cicloide, che *la normale passa per il punto istantaneo di contatto della linea mobile con la linea fissa.* Quando la linea fissa è una retta, mentre la linea mobile è un circolo, si ha la cicloide. Nel caso inverso, cioè quando una retta rotola, senza strisciare, sopra un circolo, ogni suo punto descrive una curva chiamata *sviluppante di circolo.* Se θ è l'angolo di cui la retta ha ruotato intorno al centro del circolo, nel senso opposto a quello degli indici d'un orologio, a partire dal momento in cui il punto mobile M si trovava in A, sulla circonferenza, e se si dirige l'asse delle x secondo OA, le coordinate di M sono



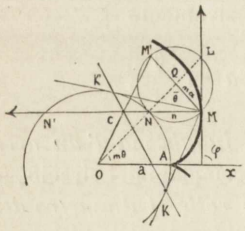
$$x = a(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \quad , \quad y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) \ ,$$

dimodochè si ha

$$dx = a\theta\cos\theta\, d\theta \ , \ dy = a\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \ , \ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \ , \ ds = a\theta\, d\theta \ , \ \rho = \frac{ds}{d\theta} = a\theta \ .$$

Dunque la curva si mantiene costantemente normale alla retta mobile, ed ha il centro di curvatura nel punto di contatto della retta con la circonferenza fissa. La lunghezza dell'arco AM è $s = {}^1/_2 a\theta^2$, e però l'equazione intrinseca della sviluppante di circolo è $\rho^2 = 2as$.

p) Quando poi entrambe le linee sono circonferenze, si hanno le *ipocicloidi* o le *epicicloidi* secondo che una circonferenza è interna o esterna all'altra. Noi qui vogliamo limitarci a studiare queste particolari rullette, delle quali si vedrà l'importanza nella teoria dei meccanismi; e supporremo, per fissare le idee, che un circolo di raggio ma rotoli esternamente, senza strisciare, sopra un circolo di raggio a, dimodochè i risultati ai quali perverremo saranno applicabili tanto alle epicicloidi quanto alle ipocicloidi, secondo che m si supporrà positivo o negativo. Immaginiamo che il punto mobile M si trovi prima in A, sulla circonferenza fissa, che ha il centro in O, e dirigiamo secondo OA l'asse delle ascisse. Rotolando la circonferenza di raggio ma, col centro Q, nel senso inverso di quello degli indici d'un orologio, consideriamola in un'altra posizione qualunque, dopo una rotazione $m\theta$ della linea dei centri intorno ad O. Sia N il punto di contatto delle due circonferenze, ed osserviamo che, dovendo essere uguali fra loro, in virtù, della definizione, gli archi AN ed MN, l'angolo NQM è necessariamente uguale a θ. Ne segue che le coordinate di M sono



$$x = a\left\{(1+m)\cos m\theta - m\cos(\theta + m\theta)\right\} \ , \ y = a\left\{(1+m)\operatorname{sen} m\theta - m\operatorname{sen}(\theta + m\theta)\right\};$$

quindi

$$dx = 2m(1+m)a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta \ , \ dy = 2m(1+m)a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta,$$

e finalmente

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right) \ , \ \frac{ds}{d\theta} = 2m(1+m)a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \ .$$

www.rcin.org.pl

L'inclinazione della tangente sull'asse delle x è dunque $\varphi = \frac{\theta}{2} + m\theta$. Ora, se si congiunge M col punto L, diametralmente opposto ad N sulla circonferenza mobile, l'inclinazione di ML su Ox è appunto uguale alla somma degli angoli $QLM = {}^1/_2\theta$, $AON = m\theta$. Dunque ML *è la tangente*, e per conseguenza MN *è la normale*. Inoltre, se si contano gli archi a partire dal punto $A(\theta = 0)$, è chiaro che dev'essere

$$s = 4m(1+m)a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8m(1+m)a\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{4},$$

e però *la lunghezza d'un arco completo è* $8m(1+m)a$. Se invece si computa s a partire dal punto di mezzo $(\theta = \pi)$ d'un arco completo, si ha

$$s = -4m(1+m)a\cos\frac{\theta}{2};$$

e siccome, d'altra parte,

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2}{1+2m}\cdot\frac{ds}{d\theta} = \frac{4m(1+m)}{1+2m}a\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2},$$

si vede che $s^2 + (1+2m)^2\rho^2 = costante$ è l'equazione intrinseca delle epicicloidi o ipocicloidi. Per costruire il centro di curvatura si osservi che il segmento di normale MN ha la lunghezza $n = 2ma\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$: l'altro segmento MN′, determinato sulla normale dalla circonferenza fissa, ha la lunghezza n', che si calcola osservando la proporzione $(n' - n) : n = a : ma$, da cui si ricava $mn' = (1+m)n$. Ciò premesso, si ha

$$\rho = \frac{2(1+m)}{1+2m}n \quad , \quad \text{ovvero} \quad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}.$$

Dunque C è il conjugato armonico di M rispetto ad NN′, vale a dire che *il centro di curvatura, in ogni punto* M, *appartiene alla polare di* M *rispetto al circolo fisso.* Questa proprietà si trasforma subito in un'altra osservando che, essendo il raggio ON′ manifestamente parallelo a QM, se la quaterna armonica MNCN′ si projetta da O sulla retta QM, siccome la projezione di N′ è all'infinito, quella di N, cioè Q, divide per metà la projezione di MC, vale a dire che C si projetta nel simmetrico di M rispetto a Q. In altri termini: *il centro di curvatura, in ciascun punto* M, *si trova su quel diametro del circolo fisso, che passa per il punto diametralmente opposto ad* M *sulla circonferenza mobile.*

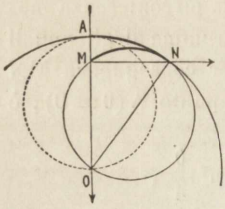
q) In particolare per $m = 0$ (purchè si mantenga costante ma, immaginando che a vada crescendo all'infinito mentre m tende a zero) si ottiene la *cicloide* $(\rho = 2n)$. Invece per $m = \infty$ (cioè se si fa crescere m indefinitamente, in modo che $m\theta$ conservi un valore t) si ritrovano le proprietà della *sviluppante di circolo* $(\rho = n)$:

$$\rho = 2a\lim m\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} = at \quad , \quad s = 8a\lim m(1+m)\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{4} = {}^1/_2 at^2.$$

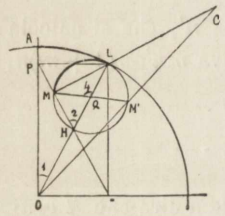
Del resto è chiaro che, in questo caso, confondendosi in uno i punti N ed N′, con essi deve confondersi anche C. Per $m = -{}^1/_2$ si ottiene $\rho = \infty$, e però l'ipocicloide è una *retta*, come si riconosce anche eseguendo la costruzione della normale o quella del centro di curvatura. In altri termini, *se una circonferenza rotola internamente, senza strisciare, sopra una circonferenza due volte più*

www.rcin.org.pl

grande, ciascuno dei suoi punti si sposta lungo un diametro del circolo fisso.



Questa proprietà, evidente sulla figura, viene utilizzata in taluni ingranaggi. Anche la *cardioide* è un' epicicloide, come si vede subito facendo $m=1$ nelle formole generali. Ciò risulta, del resto, anche dalla figura, giacchè, essendo isoscele, per costruzione, il triangolo MLN, il piede H della perpendicolare condotta per L ad MN divide MN per metà, e però la retta PH è parallela ad OM, d'onde segue che, se si prende il simmetrico Q di P rispetto ad H, completando così il parallelogramma MLPQ, la circonferenza di centro Q, che passa per M, tocca in H la circonferenza data. Intanto dall'eguaglianza degli angoli LOP ed LMQ = OLP segue quella degli angoli OPH ed MQH, poi quella degli archi OH, MH sulle due circonferenze. Dunque *la cardioide si può considerare come generata da un punto d' una circonferenza che rotola, senza strisciare, sopra una circonferenza uguale.* Se si applica la costruzione generale del centro di curvatura, si ricade sulla costruzione particolare già trovata per la cardioide, perchè il punto C, intersezione di MN con PM', si può considerare come il punto d' incontro delle mediane del triangolo NLM', d' onde segue $HC = {}^1/_3 MH$, $MC = {}^4/_3 MH = {}^2/_3 MN$. Finalmente per $m = -{}^1/_4$ si ottiene l' *asteroide.* La figura mostra subito che la circonferenza descritta sulla metà HL del raggio OL come diametro passa nel punto M dell'asteroide, e siccome l'angolo MQL è manifestamente quadruplo di AOL, l'arco LM della circonferenza interna è sempre uguale all'arco AL della circonferenza esterna. Dunque *l'asteroide si può considerare come generata da un punto di una circonferenza che rotola internamente, senza strisciare, sopra una circonferenza quadrupla.* La costruzione generale del centro di curvatura conduce alla costruzione ottenuta precedentemente, giacchè per la nota relazione, che deve aver luogo fra i segmenti determinati dalla trasversale OC sui lati del triangolo MQL, si ha



$$LC = \frac{QM'}{MM'} \cdot \frac{OL}{OQ} \cdot MC = {}^2/_3 MC \quad , \quad \rho = {}^3/_2 LC = 3ML \ .$$

r) La prima forma della costruzione del centro di curvatura delle epicicloidi o ipocicloidi suggerisce lo *studio* (che noi qui vogliamo soltanto proporre come esercizio ai nostri lettori) *delle curve che hanno il raggio di curvatura, in ciascun punto* M, *proporzionale al segmento di normale, compreso fra* M *e la polare di* M *rispetto ad un circolo fisso.* Oltre le precedenti godono di questa proprietà infinite altre curve, ed in particolare *tutte le coniche.* Per queste il circolo fisso è il circolo concentrico di raggio $\sqrt{a^2+b^2}$. Quando, nel caso generale, il circolo fisso si riduce ad un *punto*, si ritrovano le *spirali sinusoidi*; quando, invece, diventa una *retta*, si hanno le *linee di Ribaucour.* La famiglia delle coniche comprende dunque una spirale sinusoide, col polo nel centro, ed una linea di Ribaucour: la prima si ottiene facendo $a^2+b^2=0$, ed è, per conseguenza, l'*iperbole equilatera*; all'altra si giunge facendo crescere indefinitamente a^2+b^2, ovvero immaginando che il centro si allontani all'infinito. Essa è dunque la *parabola.*

www.rcin.org.pl

Assintoti.

16. Immaginiamo che due punti tendano a confondersi percorrendo due linee, mentre la retta che li congiunge si allontana all'infinito, o gira indefinitamente intorno ad un punto fisso. Se ciò accade (senza escludere che possa non aver luogo quando vi è fra i due punti qualche particolare corrispondenza) si dice che le due linee sono fra loro *assintotiche*. Così, per esempio, supponiamo che un punto M si allontani all'infinito lungo una linea $y=f(x)$, vale a dire che la sua distanza dall'origine tenda ad oltrepassare ogni limite, e che per conseguenza almeno una delle sue coordinate vada crescendo all'infinito. Quando ciò avviene per una sola coordinata, potremo sempre supporre che questa sia la x, scambiando, se occorre, x con y. Ciò premesso si consideri sopra un'altra linea $y=g(x)$, per ciascuna posizione di M, il punto che ha la medesima ascissa di M, e si supponga che, per x tendente all'infinito (positivo o negativo), la differenza delle ordinate $f(x)-g(x)$ tenda a zero. Allora si potrà affermare che le due linee sono fra loro assintotiche; ed altrettanto si potrà dire delle linee rappresentate in coordinate polari dalle equazioni $r=f(\theta)$ ed $r=g(\theta)$. Siccome poi anche la differenza $f'(x)-g'(x)$ tende a zero (II, 27, c), a meno che non oscilli indefinitamente, si vede che le due linee, oltrechè ad avere un punto comune, tendono in generale a toccarsi; ma questo fatto va studiato con maggiori cautele.

17. Se, chiamate x ed y le coordinate del punto M, che si allontana all'infinito lungo una data curva, si riesce a determinare le costanti m ed h in modo che $y-mx-h$ abbia per limite zero quando x tende all'infinito (positivo o negativo), si potrà dire che la retta $y=mx+h$ è un *assintoto* della curva data. È della ricerca di questi assintoti rettilinei che noi vogliamo più specialmente occuparci. Dalla stessa eguaglianza

$$\lim_{x=\pm\infty}(y-mx-h)=0$$

risulta subito che $y-mx$, ossia $x\left(\frac{y}{x}-m\right)$, tende al limite finito h, e siccome il fattore x cresce indefinitamente in valore assoluto, è necessario che l'altro fattore tenda a zero. Dunque

$$\lim_{x=\pm\infty}\frac{y}{x}=m \quad , \quad \lim_{x=\pm\infty}(y-mx)=h\,.$$

In queste due uguaglianze, applicate successivamente, risiede la regola per la ricerca degli assintoti quando si fa uso di coordinate cartesiane. Invece in coordinate polari l'assintoto potrà essere determinato mediante la sua inclinazione α sull'asse polare, e la distanza q dal polo. Prima si osservi che, se $\frac{1}{r}=f(\theta)$ è l'equazione della curva, $f(\theta)$ tende a zero quando M si allontana indefinitamente, e però, se la detta funzione è continua, gli angoli

www.rcin.org.pl

che l'asse polare fa con gli assintoti sono le radici dell'equazione $f(\theta)=0$. Per completare la determinazione dell'assintoto, corrispondente ad una data radice α, basta osservare che la distanza di M all'assintoto deve tendere a zero, e che per conseguenza si ha

$$q=\lim_{r=\infty} r\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)=\lim_{\theta=\alpha}\frac{\theta-\alpha}{f(\theta)}=\lim_{\theta=\alpha}\frac{1}{f'(\theta)}\,,$$

e finalmente $q=1:f'(\alpha)$ quando è continua anche $f'(\theta)$.

18. Ora vogliamo dimostrare che, allontanandosi M all'infinito, *se la tangente in* M *tende ad una posizione limite, questa è necessariamente un assintoto*. È per questa proprietà che si suole, in Geometria analitica, considerare gli assintoti come le tangenti nei punti d'incontro della curva con la retta all'infinito. Paragonando infatti l'equazione della tangente $Y=Xy'+(y-xy')$ con quella della posizione limite $Y=m_1X+h_1$, si vede che, ammettere l'esistenza di questa posizione limite vale quanto ammettere l'esistenza dei limiti di y' e di $y-xy'$ per x infinito, dimodochè sia

$$\lim y'=m_1\quad,\quad \lim(y-xy')=h_1\,.$$

Intanto si ha, applicando il teorema di l'Hospital,

$$m=\lim\frac{y}{x}=\lim y'=m_1\;;$$

poi

$$h=\lim(y-mx)=\lim\frac{\dfrac{y}{x}-m}{\dfrac{1}{x}}=\lim(y-xy')=h_1\,.$$

Al medesimo risultato si giunge con altrettanta facilità adoperando coordinate polari. Infatti la distanza della tangente al polo, computata come nel paragrafo precedente, è $-r\,\mathrm{sen}\,\omega$, e non può tendere ad un limite q_1, per r infinito, senza che ω tenda ad un multiplo di π. Ne segue che, se α_1 è la inclinazione, sull'asse polare, della retta, con cui si suppone che tenda a confondersi la tangente, vale a dire se $\theta+\omega$ tende ad un limite α_1, esiste anche $\alpha=\lim\theta=\alpha_1-n\pi$; ed inoltre

$$q=\lim\frac{1}{f'(\theta)}=-\lim\frac{r^2}{r'}=-\lim r\,\mathrm{tg}\,\omega=-\lim r\,\mathrm{sen}\,\omega=q_1\,.$$

19. **Esempii**: *a)* La curva $y=\dfrac{\cos x}{x}$ è manifestamente assintotica ad entrambi gli assi; ma, mentre l'asse delle y si può considerare come limite della tangente in M, quando cresce indefinitamente l'ordinata y di questo punto, altrettanto non si può dire per l'asse delle x, perchè $y-xy'$ non tende ad alcun limite quando x cresce all'infinito. In altri termini la tangente non cessa di oscillare, come si riconosce anche osservando che le tangenti negli infiniti punti d'incontro della curva con l'asse delle x concorrono tutte sull'asse delle y, nei punti ± 1. Adunque *un assintoto può non essere la posizione limite della tangente*, vale a dire che non sussiste la proposizione reciproca di quella che abbiamo dimostrata nel precedente paragrafo.

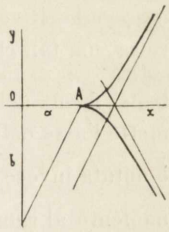
www.rcin.org.pl

b) Nell'esempio precedente la tangente, pur non ammettendo una posizione limite, tende a diventar parallela all'assintoto; ma nella curva

$$y = 2^{-[x]}\left(1 - {}^1/_2\sqrt{x - [x]}\right),$$

già considerata (II, 14, *e*), la tangente oscilla indefinitamente anche in orientazione, in modo da diventare infinite volte perpendicolare all'assintoto. Invece per la curva $xy = [x]$ si ha $\lim y = 1$, per x infinito, mentre $\lim y' = 0$, $\lim(y - xy') = 2\lim([x]:x) = 2$, vale a dire che *la tangente tende ad una posizione limite* ($y = 2$), *ma questa non coincide con l'assintoto* ($y = 1$). Ciò non contraddice al teorema dimostrato nel § 18, perchè nella dimostrazione di quel teorema, invocando il teorema di l'Hospital, tacitamente si suppone che la derivata di y sia unica, mentre nel caso da noi considerato manca la derivata a sinistra di tutti i punti ad ascissa intiera. Valga questo esempio a mostrare come si debba stare attenti, quando si applica un teorema, a curare che le condizioni restrittive dello enunciato siano soddisfatte.

c) Per trovare gli assintoti della curva (profilo verticale dell'elicoide sviluppabile) rappresentata dalle equazioni $x\cos\theta = a$, $y = b(\operatorname{tg}\theta - \theta)$, o, meglio, di quel ramo della curva, che corrisponde ai valori di θ, compresi fra $-{}^1/_2\pi$ ed ${}^1/_2\pi$, si deve prima osservare che, per far crescere all'infinito una coordinata, bisogna far tendere θ a $\pm{}^1/_2\pi$, nelle quali ipotesi si ha



$$m = \lim\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\lim(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) = \pm\frac{b}{a},$$

$$h = \lim\left(y \mp \frac{b}{a}x\right) = b\lim\frac{\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta \mp 1}{\cos\theta} = -b\lim\theta = \mp{}^1/_2\pi b.$$

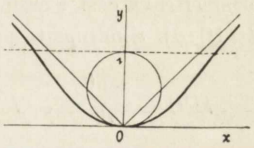
Gli assintoti cercati sono dunque le rette rappresentate dalle equazioni

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = \frac{\pi}{2}.$$

d) Nella ricerca degli assintoti non bisogna trascurare di far tendere x a $-\infty$ come a $+\infty$, giacchè si possono avere assintoti differenti nei due casi. Così, per esempio, per la curva $y = x\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, si ha, quando x tende a $\mp\infty$,

$$m = \lim\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1,$$

$$h = \lim(y \mp x) = \mp\lim\frac{2x}{e^{2x} + 1} = 0,$$

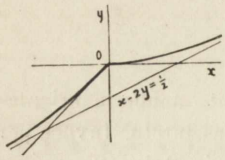


e però la curva è assintotica alle bisettrici degli assi. Un esempio più semplice ci è dato dalla curva $y = \operatorname{arc\,tg} x$. La considerazione dei due casi è necessaria anche per sapere se la curva si accosta indefinitamente all'assintoto nei due sensi, o in un senso solo.

e) La curva $y = x:(1 + e^{\frac{1}{x}})$ ha, nell'origine, due tangenti, perchè (II, 2, *b*) si ha $y' = 1$ a sinistra, $y' = 0$ a destra dell'origine. Quando x tende a $\pm\infty$, anche y va crescendo sempre in valore assoluto; ma i due rami infiniti, che in

www.rcin.org.pl

tal modo si ottengono, sono assintotici ad una stessa retta, perchè si ha $\lim e^{\frac{1}{x}}=1$,



$\lim x(e^{\frac{1}{x}}-1)=1$, e conseguentemente $m=\lim \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$,

$$h=\lim\left(y-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\lim x\,\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{4}\,.$$

Dunque l'equazione dell'assintoto è $x-2y=\dfrac{1}{2}$. A questo risultato si giunge anche sviluppando y in serie: $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{48x^2}+\cdots$.

f) Gli sviluppi in serie sono molto utili per lo studio del modo di comportarsi delle curve nei rami che si estendono all'infinito. Così, data la curva $y=xe^{\frac{1}{x}}$, basta osservare che si ha $y=x+1+\dfrac{1}{2x}+\cdots$ per accorgersi che la curva è assintotica alla retta $y=x+1$. Inoltre, siccome y cresce all'infinito anche quando x tende a zero decrescendo, mentre invece ha per limite zero quando x tende a zero crescendo, si vede che la curva consta di due rami, entrambi assintotici a quella retta, ma tali che un solo di essi è assintotico anche all'asse delle y, mentre l'altro si ferma nell'origine. Similmente si vede subito che la curva $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$ ammette l'asse delle y come unico assintoto rettilineo (del solo ramo di destra), ma è dotata invece dell'assintoto parabolico $y=x^2+x+\dfrac{1}{2}$, che si estende internamente al ramo di sinistra ed esternamente a quello di destra. È poi notevole la curva $y=x^2:(1+e^{\frac{1}{x}})$ perchè rassomiglia molto ad una parabola, e tende, all'infinito, a comportarsi appunto come la parabola $y={}^1/_4(2x^2-x)$. Se a questa si fa subire una traslazione nel piano, in modo che il vertice vada nell'origine, in questo punto le due curve *si attraversano* nel tempo stesso che si toccano, perchè $y<{}^1/_2x^2$ a destra dell'origine, $y>{}^1/_2x^2$ a sinistra.

g) Quando si applicano alla spirale iperbolica le formole date in fine del § 17 si ottiene

$$f(\theta)=\frac{\theta}{a}\quad,\quad f'(\theta)=\frac{1}{a}\quad,\quad \alpha=0\quad,\quad q=a\,,$$

e si ritrova così l'assintoto parallelo all'asse polare, segnalato precedentemente (§ 10, *g*). Similmente per la quadratrice (§ 10, *i*) si ha

$$f(\theta)=\frac{\operatorname{sen}\theta}{a\theta}\quad,\quad f'(\theta)=\frac{\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{a\theta^2}\quad,\quad \alpha=n\pi\quad,\quad q=(-1)^n n\pi a\,.$$

In modo analogo si dimostra che le spirali sinusoidi (§ 10, *m*) ammettono assintoti a distanza finita soltanto per $m<-1$; ed in questo caso gli assintoti escono tutti dal polo, e fanno con l'asse polare gli angoli $0\,,\dfrac{\pi}{m},\dfrac{2\pi}{m},\dfrac{3\pi}{m},\cdots$.

h) Per la conica rappresentata dall'equazione $r=p:(1-k\cos\theta)$ si ha

$$f(\theta)=\frac{1-k\cos\theta}{p}\quad,\quad f'(\theta)=\frac{k}{p}\operatorname{sen}\theta\quad,\quad \cos\alpha=\frac{1}{k}\quad,\quad q=\frac{\pm p}{\sqrt{k^2-1}}\,.$$

www.rcin.org.pl

Solo nel caso dell'iperbole, cioè per $k>1$, α è reale; ma gli infiniti archi α, che hanno il coseno $\frac{1}{k}$, determinano due sole direzioni, antiparallele rispetto all'asse focale. In questo caso $p=-\frac{b^2}{a}$, $k^2-1=\frac{b^2}{a^2}$, e però $q=\pm b$, ed anche $q=\pm ka\,\mathrm{sen}\alpha$. Dunque i due assintoti passano per il centro e distano di b dal polo, ossia dai fuochi.

i) Tutte le volte che, nel discutere curve date in coordinate polari, si trova che r tende ad un limite a quando θ tende all'infinito (positivo o negativo), si può affermare che la curva ammette un *circolo assintotico* di raggio a, col centro nel polo. Ed è utile notare che, col tendere di r ad a, avviene ordinariamente (II, 27, *c*) che r' tende a zero, e conseguentemente ω ad $^1/_2\pi$, cioè la curva tende a toccare il circolo. In particolare, se $a=0$, il polo è un *punto assintotico*: ciò accade per varie curve studiate precedentemente (§ 10, *e*, *g*, *h*), come la spirale logaritmica, la spirale iperbolica, la cocleoide. Basta prendere le concoidi (§ 10, *j*) di queste curve rispetto al polo per ottenere altre curve, dotate di circoli assintotici.

20. Occupiamoci ora più particolarmente degli assintoti delle curve algebriche; e prima, per cercare quelli che son paralleli all'asse delle y, ordiniamo l'equazione della curva, già ridotta a forma razionale ed intera, rispetto ad y:

$$y^n\psi(x)+y^{n-1}\psi_1(x)+y^{n-2}\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)=0\ .$$

Per y infinito x deve tendere ad un limite l, che si tratta appunto di calcolare, e però $\psi(x)$, $\psi_1(x)$,..., funzioni continue, tendono ai limiti finiti $\psi(l)$, $\psi_1(l)$,... Ne segue, dividendo l'equazione per y^n, e facendo poi tendere y all'infinito, $\psi(l)=0$. Questa è l'equazione che fornisce i valori di l, a ciascuno dei quali corrisponde un assintoto $X=l$. Ora, messi da parte gli assintoti paralleli all'asse delle y, ordiniamo l'equazione della curva per gruppi omogenei. Posto $y=tx$, si potrà scrivere

$$x^n\varphi(t)+x^{n-1}\varphi_1(t)+x^{n-2}\varphi_2(t)+\cdots+\varphi_n(t)=0\ . \qquad (7)$$

Intanto si ha $m=\lim t$, ed m è finito; quindi, se si divide per x^n l'equazione precedente, si ottiene, per x infinito, $\varphi(m)=0$. Basta risolvere questa equazione per determinare le direzioni degli assintoti. Prima supponiamo che m sia una radice semplice di φ, dimodochè $\varphi'(m)\gtrless 0$, e cerchiamo di calcolare h. Se si divide per x^{n-1} l'equazione (7) si ha

$$x\varphi(t)+\varphi_1(t)+\frac{\varphi_2(t)}{x}+\cdots=0\ ; \qquad (8)$$

poi, per x infinito, dopo avere osservato che

$$\lim x(t-m)=\lim(y-mx)=h\ ,$$

si ottiene, applicando il teorema di l'Hospital,

$$\lim x\varphi(t)=\lim x(t-m).\lim\frac{\varphi(t)}{t-m}=h\varphi'(m)\ .$$

www.rcin.org.pl

Dunque la (8) diventa

$$h\varphi'(m)+\varphi_1(m)=0 \quad , \quad \text{e dà} \quad h=-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)} .$$

Se m è radice multipla di φ, si ha $\varphi'(m)=0$, e se non è $\varphi_1(m)=0$ si può dire che l'assintoto è infinitamente lontano; ma, se anche $\varphi_1(m)=0$, l'ultima formola è illusoria, e bisogna risalire alla (7). Dividendo questa per x^{n-2} si ottiene

$$x^2\varphi(t)+x\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\frac{\varphi_3(t)}{x}+\cdots=0 . \tag{9}$$

Intanto

$$\lim x^2\varphi(t)=\lim x^2(t-m)^2 . \lim \frac{\varphi(t)}{(t-m)^2}=\frac{h^2}{2}\varphi''(m) ;$$

quindi, per x infinito, l'equazione (9) diventa

$$^1/_2 h^2\varphi''(m)+h\varphi_1'(m)+\varphi_2(m)=0 , \tag{10}$$

e fornisce due valori di h, corrispondenti a due assintoti (reali o immaginarii) paralleli. Se poi m è radice tripla di φ, uno degli assintoti corrispondenti è generalmente a distanza infinita; ve ne son due infinitamente lontani se anche $\varphi_1'(m)=0$, e finalmente, se sono nulli tutti i coefficienti dell'equazione (10), bisogna riprendere l'equazione (7), dividerla per x^{n-3}, e passare al limite per x infinito, in modo da ottenere

$$^1/_6 h^3\varphi'''(m)+{}^1/_2 h^2\varphi_1''(m)+h\varphi_2'(m)+\varphi_3(m)=0 ;$$

e così via.

21. Mercè le coordinate omogenee la ricerca degli assintoti delle curve algebriche si può condurre con maggiore semplicità, purchè si faccia uso del teorema dimostrato nel § 18. Prima si noti che il risultato $\varphi(m)=0$ si può enunciare dicendo che, quando si sopprimono nell'equazione d'una curva di ordine n tutti i termini di grado inferiore ad n, l'equazione che si ottiene rappresenta l'insieme delle parallele condotte per l'origine agli n assintoti, reali o immaginarii, distinti o coincidenti. Ciò riesce quasi evidente se, dopo aver posto

$$\Phi(x,y,z)=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+zx^{n-1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+z^2x^{n-2}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots\cdots$$

per rendere omogenea l'equazione della curva, si osserva che scrivere l'equazione $\varphi=0$ equivale a porre $z=0$ in $\Phi=0$, è lo stesso cioè che considerare gli n punti d'incontro della curva con la retta all'infinito. Ora si scriva l'equazione (§ 7) della tangente

$$X\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+Z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 , \tag{11}$$

e, per esprimere che il punto di contatto sta all'infinito, si ponga $z=0$ nei coefficienti. Si ottiene così un'equazione omogenea in x ed y; poi, eliminando il rapporto $\frac{y}{x}$ fra questa equazione e ciò che diventa $\Phi=0$ per $z=0$,

www.rcin.org.pl

si giunge all'equazione complessiva degli assintoti. In sostanza questo metodo non differisce dal precedente. Infatti per $z=0$ si ha $\Phi = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, cioè $\Phi=0$ quando si pone per $\frac{y}{x}$ un valore m soddisfacente a $\varphi=0$. Inoltre

$$x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+y\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x^{n-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=x^{n-1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-mx^{n-1}\varphi'(m) \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x^{n-1}\varphi'(m) \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=x^{n-1}\varphi_1(m) \ .$$

Quindi l'equazione (11) diventa, in coordinate non omogenee,

$$Y=mX-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)} \ .$$

22. **Esercizii:** *a)* Data la curva $x^3+y^3=3axy$, che si chiama *folium* di Cartesio, si ha, per la determinazione dei coefficienti angolari degli assintoti, l'equazione $1+m^3=0$, che ammette l'unica radice reale $m=-1$; poi

$$h=-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}=\frac{3ma}{3m^2}=-a \ .$$

Dunque la curva ha un solo assintoto reale, rappresentato da $x+y+a=0$. Per le applicazioni bisogna ricordare, non le formole ottenute nel § 20, ma il solo procedimento adoperato per giungere alle formole stesse. Così, nel caso del folium, dopo avere osservato che $x+y$ è l'unico fattore reale dell'insieme x^3+y^3 dei termini di più alto grado, si può immediatamente scrivere l'equazione dell'assintoto:

$$x+y=\left(\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}\right)_{y=-x}=-a \ .$$

Al medesimo risultato si giunge sviluppando y in serie:

$$y=-x-a+\frac{a^3}{3x^2}-\frac{a^4}{3x^3}+\cdots\cdots \ .$$

b) Un po' più generalmente, si consideri l'equazione

$$(x+y)(x^2-2kxy+y^2)=2(1+k)axy \ ,$$

che per $k=\frac{1}{2}$ rappresenta il folium, e per $k=0$ un'altra importante curva, detta *logociclica*. Fintantochè $k^2<1$, non si ha che un solo assintoto reale, la cui equazione è

$$x+y=\left(\frac{2(1+k)axy}{x^2-2kxy+y^2}\right)_{y=-x}=-a \ ,$$

dimodochè le curve considerate son tutte assintotiche ad una stessa retta; ma quelle per le quali è $k^2>1$ ammettono altri due assintoti reali, paralleli alle rette $x^2-2kxy+y^2=(y-mx)(y-m'x)=0$, dove $m=k\pm\sqrt{k^2-1}$. L'equazione d'un assintoto è

$$y-mx=\left(\frac{2(1+k)axy}{(x+y)(y-m'x)}\right)_{y=mx}=\frac{2(1+k)ma}{(1+m)(m-m')}=\frac{ma}{m-1} \ ;$$

www.rcin.org.pl

quindi si trova $y = kx + \frac{a}{2} \pm \left(x + \frac{a}{2(k-1)}\right)\sqrt{k^2-1}$ per rappresentare i due assintoti. Questi s'incontrano nel punto $x = y = -a:2(k-1)$ sotto un angolo, il cui coseno è $\frac{1}{k}$. Solo per $k=2$ i tre assintoti concorrono in un punto, ed allora son paralleli ai lati d'un triangolo equilatero.

c) Per mostrare in qual modo si adoperano le coordinate omogenee riprendiamo il folium, e poniamo

$$\Phi(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3axyz$$

per applicare le cose dette nel § 21. Per $z=0$ si ha

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2 \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -3axy \, ,$$

e però l'equazione complessiva degli assintoti risulta dall'eliminazione del rapporto $y:x$ fra le equazioni

$$x^3 + y^3 = 0 \quad , \quad \mathrm{X}x^2 + \mathrm{Y}y^2 - axy = 0 \, ,$$

ossia (scrivendo x ed y per le coordinate correnti) dall'eliminazione di m fra $1 + m^3 = 0$ ed $x + m^2 y = ma$. Eseguendo l'eliminazione si ottiene

$$x^3 + y^3 + a^3 = 3axy \, ,$$

e questa equazione si decompone nelle tre seguenti

$$x + y + a = 0 \quad , \quad x + \omega y + \omega^2 a = 0 \quad , \quad x + \omega^2 y + \omega a = 0 \, ,$$

dove ω rappresenta una radice cubica immaginaria dell'unità. Il folium ha dunque, oltre l'assintoto reale $x + y + a = 0$, due assintoti immaginarii, che s'intersecano nel punto (a, a). L'equazione ottenuta si può anche stabilire immediatamente lasciandosi guidare dall'osservazione che l'equazione complessiva d'una curva dell'ordine n si deve poter dedurre dall'equazione stessa della curva, alterando i coefficienti dei termini di grado inferiore ad $n-1$ in modo che l'equazione si spezzi in n equazioni lineari. Nel caso del folium questa osservazione conduce subito al risultato, perchè si sa dall'algebra che basta aggiungere a^3 ad $x^3 + y^3 - 3axy$ per trovare il valore del circolante (x, y, a), scomponibile *) in tre fattori lineari.

d) Sia ancora

$$\Phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \, .$$

L'equazione della tangente è

$$(ax + hy + gz)\mathrm{X} + (hx + by + fz)\mathrm{Y} + (gx + fy + cz)\mathrm{Z} = 0 \, ;$$

quindi, facendovi $z = 0, \mathrm{Z} = 1$, si ottiene

$$(a\mathrm{X} + h\mathrm{Y} + g)x + (h\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + f)y = 0 \, ,$$

---

*) « *Analisi algebrica* » p. 366.

www.rcin.org.pl

e bisogna eliminare $\frac{y}{x}$ fra questa equazione e l'altra

$$ax^2+by^2+2hxy=-\begin{vmatrix} b & -h & x \\ -h & a & y \\ x & y & 0 \end{vmatrix}=0\,.$$

Il risultato dell'eliminazione è, ponendo x ed y per X ed Y,

$$\begin{vmatrix} a & h & ax+hy+g \\ h & b & hx+by+f \\ ax+hy+g & hx+by+f & 0 \end{vmatrix}=0\,.$$

Sottraendo dall'ultima colonna la prima moltiplicata per x, e la seconda moltiplicata per y, poi operando analogamente sulle linee, si trova

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c-\Phi \end{vmatrix}=0\,.$$

Dunque l'equazione complessiva degli assintoti della conica

$$ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0$$

si ottiene ponendo nel secondo membro, invece di 0, il discriminante D, diviso per $ab-h^2$. A questo risultato si perviene assai più rapidamente mercè l'osservazione fatta nel precedente esercizio, cioè sostituendo a c un numero c', tale che l'equazione si spezzi in due equazioni lineari, per la qual cosa occorre che sia nullo il nuovo discriminante

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ g & f & c'-c \end{vmatrix}=\mathrm{D}+(ab-h^2)(c'-c)\,,$$

ossia che si abbia $c'=c-\frac{\mathrm{D}}{ab-h^2}$.

Singolarità.

23. **Flessi.** Talune particolarità, che possono presentarsi in certi punti d'una curva, e che sono inerenti alla sua forma, fanno dare ai punti stessi il nome di *punti singolari*. Così, per esempio, quantunque nei punti per i quali è $y'=0$ si presenti la particolarità che l'ordinata diventa, generalmente, minima o massima, pure essi non sono punti singolari, perchè basta un cambiamento nell'orientazione degli assi per trasportare altrove l'osservata particolarità. Non così avviene dei punti nei quali è $y''=0$: questi si chiamano *flessi* o punti d'inflessione, e sono punti singolari, perchè in essi *è nulla la curvatura*, si verifica cioè un fatto, che nessun cambiamento di assi vale a

www.rcin.org.pl

distruggere. Del resto è facile constatare che, intorno ad un tal punto M, la curva si comporta, rispetto alla tangente in M, in modo eccezionale, perchè, trasportata in M l'origine, se si dirigono gli assi secondo la tangente e la normale, si ha, per la definizione di y'' come derivata di y', $\lim(y':x)=0$; poi, in virtù del teorema di l'Hospital, $\lim(y:x^2)=0$, vale a dire che la distanza della tangente in M dai punti infinitamente vicini ad M *è infinitesima d'un ordine superiore al secondo*, diguisachè si potrebbe quasi dire che nei punti d'inflessione una curva *tocca maggiormente* le sue tangenti. Per giustificare poi la denominazione di *punti d'inflessione* bisogna osservare che y'', annullandosi, generalmente cambia segno, e però (III, 32, *d*) avviene che nel passare da una parte all'altra d'un flesso, lungo la curva, la convessità di questa si muta in concavità, o viceversa. Si ha dunque una vera e propria inflessione, nel senso volgare della parola, vale a dire che la curva attraversa la tangente; ma ciò non accade quando y'' conserva, intorno ad M, un segno determinato, nel qual caso il valore *zero* rappresenta un minimo o un massimo di y'', d'onde segue (III, 25) che le ascisse dei punti, nei quali una curva attraversa le sue tangenti, sono le radici semplici di y'', o quelle multiple d'un ordine dispari. Ciò si spiega facilmente osservando che son questi, appunto, i valori di x che rendono minima o massima la funzione y', cioè le ascisse di quei punti, intorno ai quali avviene che la tangente cessa di progredire in un senso e prende a spostarsi nel senso opposto.

24. Per determinare i flessi della curva $y=f(x)$ bisogna dunque risolvere l'equazione $f''(x)=0$, o qualunque altra equivalente, ossia atta ad esprimere che la curvatura è nulla. Così, per esempio, quando la curva è data mediante una coppia di equazioni $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, invece di $y''=0$ conviene (*cfr.* V, 11, *d*) scrivere $dx\,d^2y-dy\,d^2x=0$. In altri termini i flessi corrispondono a quei valori di t, che annullano $\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)$. Invece, se la curva è data in coordinate polari, l'equazione che si adopera è $r^2+2r'^2-rr''=0$, escluse le radici (multiple) di r; o pure, se l'equazione della curva è data sotto la forma $\frac{1}{r}=f(\theta)$, si scrive $f+f''=0$. Se poi, pur facendo uso di coordinate cartesiane, si considera la curva rappresentata dall'equazione $f(x,y)=0$, l'equazione dei flessi è (V, 25)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=0\,.$$

A questa si può dare una forma notevole, nel caso delle curve algebriche, quando l'equazione della curva sia stata già resa omogenea. Sia n il suo grado, e nel determinante che precede si sottraggano dall'ultima colonna,

www.rcin.org.pl

moltiplicata per $n-1$, la prima moltiplicata per x, e la seconda moltiplicata per y; poi si faccia altrettanto per le linee. I primi due elementi dell'ultima colonna o dell'ultima linea si cambiano in

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=z\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\ ,\quad (n-1)\frac{\partial f}{\partial y}-\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=z\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\ ,$$

e l'ultimo in

$$-(n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)-z\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)=(n-1)z\frac{\partial f}{\partial z}-z\left((n-1)\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right),$$

che si riduce a $z^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Così l'equazione considerata diventa

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}=0\ .$$

Adunque *i flessi della curva algebrica* $f=0$ *si determinano ponendo uguale a zero l'hessiano* H *della funzione* f, *resa omogenea* (cfr. IV, 12; V, 19). La curva $H=0$ si chiama la *hessiana* della curva $f=0$. I flessi d'una curva algebrica sono dunque i punti nei quali essa incontra la propria hessiana; e siccome questa ha l'ordine $3(n-2)$, si hanno, in generale, $3n(n-2)$ flessi lungo una curva dell'ordine n. Per esempio una conica non ha flessi, una cubica ne ha nove (sei dei quali son sempre immaginarii); *ecc.*

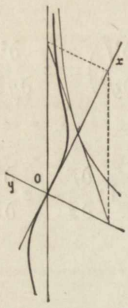
25. **Esercizii:** *a)* Per la quadratrice $\left(y=x\cot\dfrac{x}{a}\right)$ l'equazione dei flessi si riduce ad $y=a$, purchè $x\gtrless 0$. Dunque il ramo centrale non s'inflette, ma la tangente nel vertice taglia tutti gli altri rami nei rispettivi flessi.

b) La forma della curva (§ 19, *d*) rappresentata dall'equazione $y=x\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ lascia subito indovinare l'esistenza di due flessi, simmetrici rispetto all'asse delle y; ed effettivamente l'equazione $y''=0$ conduce ad $y=1$, equazione d'una retta che incontra la curva data nei suoi punti d'inflessione.

c) Per la curva $y=x^2\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ l'equazione dei flessi è troppo complicata perchè se ne possa trarre profitto; ma è facile rendersi conto della forma generale della curva osservando che questa passa per l'origine (*cfr.* II, 14, *b*) tangenzialmente all'asse delle x, e si estende all'infinito assintoticamente alla retta $y={}^1/_2x$. Anzi lo sviluppo $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8x}+\cdots\cdots$ ci dice che la curva è assintotica all'iperbole $x^2-2xy=\dfrac{1}{4}$, e ciò ne rende più agevole la costruzione approssimata. In tal modo si riesce a prevedere che la curva s'inflette in tre punti, fra i quali è l'origine O. Nondimeno bisogna notare che O non è un flesso, e si ha così un

www.rcin.org.pl

esempio di curva che *attraversa la tangente in un punto, che non è un punto d'inflessione.* Infatti si sa (III, 26, h) che y'', considerata come derivata destra o sinistra di y', ha il valore 2 o il valore -2. Del resto basta osservare che $\lim(y:x^2)=\pm 1$ per accorgersi che nel punto O viene a mancare una proprietà essenziale dei punti d'inflessione, giacchè la distanza della tangente in O dai punti vicini ad O non è *infinitesima d'un ordine superiore al secondo*, ma è proprio del secondo ordine, come nei punti ordinarii.



d) Per convincersi dell' utilità di possedere un criterio analitico sicuro ($y''=0$) per la ricerca dei punti d'inflessione, basta costruire la curva $y=e^x+\operatorname{sen}x$ aggiungendo $\operatorname{sen}x$ alle ordinate della logaritmica $y=e^x$. Una costruzione grossolana condurrebbe a credere che la curva s' inflette, anche per $x>0$, infinite volte; ma ciò non avviene, perchè la funzione $y''=e^x-\operatorname{sen}x$ non ammette radici positive, essendo $e^x>1\geqq\operatorname{sen}x$ per $x>0$. Si hanno invece, per $x<0$, infiniti flessi, le cui ascisse son quelle dei punti d'incontro della logaritmica con la sinusoide $y=\operatorname{sen}x$.

e) Data una lumaca qualunque ($r=a\cos\theta+b$), si trova facilmente

$$r^2+2r'^2-rr''=2a^2+b^2+3ab\cos\theta\ .$$

Ora, perchè questa funzione di θ si annulli per valori reali di θ, bisogna che $2a^2+b^2$ non superi $3ab$, e quindi che b cada nell'intervallo $(a,2a)$; ma l'estremo inferiore va escluso, perchè per $b=a$ è $\theta=\pi$, radice doppia di r. Dunque (*cfr.* § 10, k) le sole lumache dotate di flessi son quelle per le quali b è maggiore di a, ma non di $2a$.

f) Fra le concoidi (§ 10, j) della retta si consideri quella che contiene il polo. Dalla sua equazione $(r-a)\cos\theta=a$ si deduce, per determinare i flessi, l'equazione $\cos^3\theta+3\cos^2\theta-2=0$, dalla quale si traggono per $\cos\theta$ i valori

$$-1\ ,\quad -1+\sqrt{3}\ ,\quad -1-\sqrt{3}\ .$$

Del primo non si deve tener conto, perchè annulla r (ed insieme r'); l'ultimo non corrisponde a valori reali di θ; resta il secondo, che dà $r=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}a$; è questo il raggio d'una circonferenza, col centro nel polo, che taglia la curva nei due punti d'inflessione.

g) Finalmente domandiamoci se le concoidi d'una spirale logaritmica possono inflettersi, quantunque *a priori* sembri che ciò non debba accadere. Da

$$r=ae^{m\theta}+b \quad \text{si deduce} \quad r^2+2r'^2-rr''=(1+m^2)r^2-3m^2br+2m^2b^2\ ,$$

e si vede che, se $m^2<8$, questo trinomio non può annullarsi per valori reali di r. Ne segue che le spirali cercate sono soltanto quelle che incontrano i loro raggi vettori sotto un angolo sufficientemente piccolo, cioè tale che la sua tangente trigonometrica non superi $1:2\sqrt{2}$. Ciascuna di esse ha tutte le concoidi dotate di due punti d'inflessione, corrispondenti a valori di r che son sempre compresi fra b e $2b$. Gli archi delle infinite concoidi d'una stessa spirale, che hanno gli estremi nei punti d'inflessione, son visti dal polo sotto un angolo costante, nullo per $m=2\sqrt{2}$ e piccolissimo per m grandissimo.

www.rcin.org.pl

26. **Punti multipli.** È noto che, per la determinazione della tangente in un punto della curva $f(x,y)=0$, si fa uso dell'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0\ , \tag{12}$$

che fornisce il valore di y', nell'ipotesi che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ siano continue, ed inoltre si abbia $\frac{\partial f}{\partial y}\gtrless 0$. Se in un punto M è $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, non si può più asserire (V, 23) che, intorno ad M, y è funzione di x, cioè che ad ogni valore di x corrisponde uno ed un sol valore di y; ma ciò rimane vero, per la supposta continuità, intorno ad M, vale a dire che in punti M′, infinitamente vicini ad M, la derivata y' esiste, ed ha il valore che si ricava dalla (12). Quando M′ tende ad M, $\frac{\partial f}{\partial y}$ tende ad annullarsi, mentre $\frac{\partial f}{\partial x}$ tende ad un limite generalmente diverso da zero, e però y' cresce indefinitamente. Ne segue che, in M, la tangente è parallela all'asse delle y, e ciò non costituisce singolarità. Ma se tendesse a zero anche $\frac{\partial f}{\partial x}$, nulla si potrebbe asserire, senza un ulteriore esame, circa il limite di y'. L'equazione (12) tende allora a divenire illusoria, e per evitar ciò si ricorre ad una nuova differenziazione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y''\frac{\partial f}{\partial y}=0\ . \tag{13}$$

Ammettiamo che, nel tendere di M′ ad M, y' tenda ad un limite finito, e cerchiamo di determinarlo, avvertendo che, se y' crescesse indefinitamente, basterebbe considerare $dx:dy$ (che tende a zero) invece di $dy:dx$, per convincersi che sussistono i risultati che siamo per ottenere. Ora, per dimostrare che $y''\frac{\partial f}{\partial y}$ non può tendere ad un limite diverso da zero, adoperiamo il teorema di l'Hospital, e scriviamo

$$\lim y'=\lim\frac{y'\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\lim\left(y'+\frac{y''\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}}\right).$$

Siccome la funzione

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

resta finita, per ipotesi, si ha $\lim y''\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Dunque l'equazione (13) diventa, al limite,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\ , \tag{14}$$

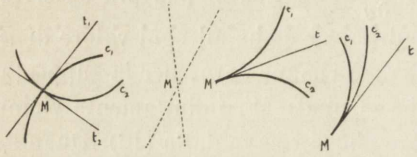
intendendo che alle derivate seconde di f si attribuiscano i valori che assumono in M, e lasciando y' a rappresentare il limite di y' per M′ tendente ad M. Adunque si hanno per y', in M, due valori, vale a dire che la curva ammette, nel detto punto, due tangenti, le quali possono essere reali e di-

www.rcin.org.pl

stinte, o coincidenti, o immaginarie: ciò dipende dal segno di

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} .$$

Nel primo caso il punto M si chiama *punto doppio*, nel secondo caso *punto di regresso* o *cuspide*, e nel terzo esso è un *punto isolato*, perchè intorno ad M non può esistere alcun altro punto reale della curva. Veramente la discussione che precede è poco rigorosa, e per condurla accuratamente bisognerebbe lasciarsi guidare *) da considerazioni analoghe a quelle, che sono state svolte nel § 23 del quinto capitolo.



27. Riassumendo vediamo che, per cercare lungo una data curva $f=0$ le singolarità ultimamente descritte, bisogna porre uguali a zero le derivate parziali prime di f, e cercare tutte le soluzioni $x=a, y=b$ del sistema così formato, ritenendo soltanto quelle che soddisfano anche all'equazione della curva. Sostituiti i valori a, b ad x, y nelle derivate parziali seconde, se essi non annullano $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, si ha un punto doppio, una cuspide, o un punto isolato, secondo che la funzione $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ assume un valore negativo, nullo, o positivo. Se poi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, ma $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \lessgtr 0$, l'equazione (14) ammette una sola radice finita, e si ha un punto doppio, con una tangente parallela all'asse delle y. Se anche $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, ma $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \gtrless 0$ nel punto (a, b), si può dire che le radici della equazione (14) sono entrambe infinite, e però si ha una cuspide, con la tangente parallela all'asse delle y. Finalmente può accadere che tutte le derivate parziali seconde siano nulle nel punto (a, b), ed allora, diventando illusoria l'equazione (14), bisogna ricorrere all'altra

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3y'\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}+3y'^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}+y'^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0 ,$$

che fornisce, in generale, tre valori per y'. Così continuando si perviene alla nozione di *punto multiplo* dell'ordine m, o punto m^{-uplo}, geometricamente caratterizzato dall'appartenere ad m rami della curva, reali o immaginarii, ed analiticamente dal fatto che in esso si annullano tutte le derivate parziali, il cui ordine è inferiore ad m, mentre almeno una, fra quelle dell'ordine m, è diversa da zero. Quando l'equazione si rende omogenea si può anche dire, più semplicemente, che il punto m^{-uplo} è caratterizzato dall'annullamento di tutte le derivate parziali $(m-1)^{esime}$. Osserviamo, per fi-

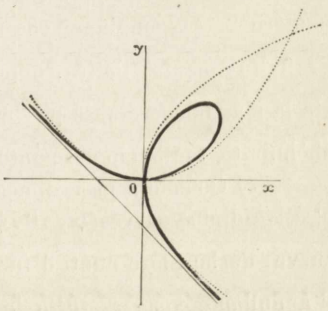
*) D'Arcais « *Corso di calcolo infinitesimale* » vol. I, pp. 509-515.

www.rcin.org.pl

nire, che *i punti multipli d'una curva*, come i punti d'inflessione, *appartengono all'hessiana della curva*; e si può inoltre dimostrare che sono multipli anche per l'hessiana.

28. **Cuspidi.** Fra i punti doppii hanno speciale importanza le cuspidi, perchè intorno a siffatti punti, come intorno ai flessi, la curva si comporta in modo eccezionale rispetto alla tangente. Infatti, se si prende come origine il punto che si vuol considerare, e come assi la tangente e la normale alla curva, è chiaro che debbono con x ed y annullarsi f e le sue derivate parziali prime e seconde, tranne $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, giacchè l'equazione (14) deve fornire $y'=0$ come radice doppia. Siccome poi, in generale, anche $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ ha, nell'origine, un valore diverso da zero, l'equazione della curva si riduce alla forma $y^2=kx^3$ quando si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo. Dunque la curva si comporta, in vicinanza dell'origine, come una parabola semi-cubica, e però tende a svolgersi da un lato solo della normale, in due rami separati fra loro per mezzo della tangente. Questo avviene generalmente, e si suole esprimere dicendo che la cuspide è di *prima specie*, riservando il nome di cuspide di *seconda specie* al caso eccezionale dei rami non separati per mezzo della tangente, che può presentarsi solo quando è $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0$ nel punto che si considera. Nel caso generale, essendo $\lim(y:x^2)=\infty$, si vede che la curva *si distacca maggiormente* dalla tangente, e se ne deduce che *nelle cuspidi la curvatura è generalmente infinita*. In altri termini il raggio di curvatura si annulla; e siccome, nell'annullarsi, in generale avviene che il suo segno cambia, si vede così, in altro modo, che solo eccezionalmente può darsi il caso d'una cuspide di seconda specie.

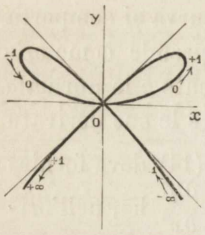
29. **Esercizii**: *a)* Nel folium, rappresentato dall'equazione $x^3+y^3=3axy$, l'origine è un punto doppio, perchè le funzioni $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}=x^2-ay$, $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y}=y^2-ax$ si annullano simultaneamente per $x=0, y=0$ (ed anche per $x=a, y=a$, che non soddisfano all'equazione della curva); poi si ha $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2x$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-a$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2y$; quindi l'equazione (14), che diventa $0+y'+0.y'^2=0$, ammette una radice nulla e l'altra infinita, e però la curva tocca, nell'origine, entrambi gli assi. Del resto, senza ricorrere al procedimento generale, se si ammette che, per x tendente a zero, y' ha un limite finito, basta dare all'equazione della curva la forma $x+y\left(\frac{y}{x}\right)^2=3a\frac{y}{x}$ per convincersi che il detto limite è necessariamente nullo. Dunque la curva tocca, nell'origine, l'asse delle x, e (per ragione di simmetria) anche l'asse delle y. Se poi, per costruirla, se ne vuole conoscere l'andamento intorno all'origine, basta far tendere x a zero in modo che $y:x$ tenda a zero, e trascurare nell'equazione gli infinitesimi d'un ordine supe-



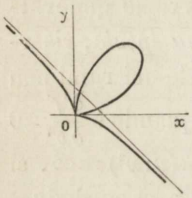
www.rcin.org.pl

riore al terzo. Allora si vede che il ramo tangente all'asse delle x si comporta come la parabola $x^2=3ay$, e per conseguenza l'altro come la parabola $y^2=3ax$. A conseguenze simili conduce lo studio della logociclica e delle curve più generali considerate nel § 22.

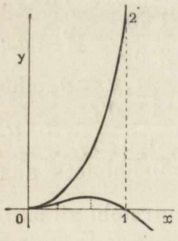
b) La curva $x^4=(x^2-y^2)y$ ha un punto triplo nell'origine, come si può constatare col metodo esposto nel § 27, o riconoscere in modo più semplice e rapido scrivendo l'equazione della curva sotto la forma $x=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^3$. Col tendere di x a zero si ottiene $y'-y'^3=0$, e però y' ha, nell'origine, i valori $0, 1, -1$. Per costruire la curva è utile assumere come variabile indipendente il rapporto $t=y:x$, sostituendo così all'equazione data la coppia di equazioni $x=t-t^3$, $y=t^2-t^4$. Sulla figura sono segnati gli estremi degli intervalli nei quali varia t quando un punto, proveniente dall'infinito, percorre la curva per tornare all'infinito, dopo esser passato tre volte $(t=-1, 0, 1)$ per l'origine.



c) Per la curva $x^5+y^5=5ax^2y^2$ si arriva ad un punto quadruplo, risultante dalla riunione di due cuspidi nell'origine. Più generalmente l'equazione $x^{2n+1}+y^{2n+1}=(2n+1)ax^ny^n$ rappresenta una curva di questo tipo, o del tipo del folium, secondo che n è pari o dispari: ciò si deve alla diversa posizione dell'unico assintoto reale $x+y=(-1)^na$.



d) Esempii di cuspidi ne abbiamo già parecchi nelle curve studiate precedentemente (cardioide, sviluppante di circolo, asteroide, cicloide, *ecc.*), ed il lettore potrà esercitarsi a verificare che intorno a tali punti le dette curve si comportano come una parabola semi-cubica in vicinanza della propria cuspide, e constaterà facilmente che in essi il raggio di curvatura è sempre nullo. Così, per esempio, nel profilo verticale (§ 19, *c*) dell'elicoide sviluppabile, trasportata l'origine nella cuspide, si ha $\lim(x:\theta^2)={}^1/_2a$, $\lim(y:\theta^3)={}^1/_3b$, e però l'equazione $9a^3y^2=8b^2x^3$ tende ad esser vera per θ infinitesimo. Invece sulla curva $(y-x^2)^2=x^5$ si riscontra una cuspide di seconda specie. Evidentemente, perchè sia reale y, occorre che sia positivo x. Scrivendo $y=x^2(1\pm\sqrt{x})$ si vede subito che la curva consta di due rami tangenti, nell'origine, all'asse delle x; ma i due rami si comportano, rispetto alla tangente, come in un punto ordinario, giacchè si ha $\lim\frac{y}{x^2}=1$, d'onde segue che la curvatura è misurata, nell'origine, dal numero 2. Aggiungiamo che uno dei rami si estende, in forma parabolica, all'infinito, mentre l'altro, dopo un'inflessione nel punto di ascissa $\left(\frac{8}{15}\right)^2$, acquista la massima ordinata per $x=\left(\frac{4}{5}\right)^2$, e poi scende anch'esso parabolicamente all'infinito, tagliando nel punto $x=1$ l'asse delle ascisse.



e) Quando il procedimento esposto nel § 27 si applica all'equazione complessiva di due curve $(\varphi=0, \psi=0)$, si trovano, oltre i punti multipli delle due curve, anche i loro punti d'incontro. Infatti, posto $f=\varphi\psi$, è chiaro che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ si annullano, come f, tutte le volte che si annullano insieme φ e ψ; ed essendo

www.rcin.org.pl

inoltre, in questo caso,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}^2 ,$$

si vede che i punti comuni alle due curve appariscono come veri punti doppii. In particolare, se si annulla il secondo membro, come accade quando le curve si toccano, si annulla anche il primo, e però i punti di contatto delle due curve ci si presentano come cuspidi, quantunque le curve si estendano dall' uno all' altro lato della normale.

30. Le singolarità finora studiate sono le sole che si osservino sulle curve algebriche, considerate nella loro generazione per punti. Quando poi si fa uso di coordinate tangenziali, ed invece dei punti si considerano le tangenti alla curva, si può ripetere, con perfetta dualità, tutta la discussione precedente, ed invece dei punti doppii, tripli, ecc., s'incontrano le *tangenti doppie*, triple, ecc.; ma non si ottengono altre singolarità essenzialmente nuove. Si trovano infatti le *tangenti regredienti* e le *tangenti inflessionali*; ma le prime non sono che le tangenti nei punti d'inflessione, e le altre sono invece le tangenti nei punti di regresso. Per questa ragione il numero ν delle cuspidi e quello μ dei flessi si corrispondono per dualità, nello stesso modo che al numero ν' dei punti doppii corrisponde il numero μ' delle tangenti doppie, ed all'*ordine* n la *classe* m. Un altro numero importantissimo, che corrisponde a sè stesso, si chiama il *genere* della curva, e si rappresenta abitualmente con p. Si dimostra che questo numero sarebbe uguale, per una curva priva di singolarità, ad $^1/_2(n-1)(n-2)$; ed è anche noto che, se non si tien conto delle singolarità, la classe m risulta uguale ad $n(n-1)$. Finalmente si è visto nel § 24 che μ è generalmente uguale a $3n(n-2)$. Orbene si dimostra *) che, per effetto della presenza di ν' punti doppii e di ν cuspidi, i numeri precedenti si abbassano rispettivamente di $\nu+\nu', 3\nu+2\nu', 8\nu+6\nu'$. Quindi, per dualità, se da $^1/_2(m-1)(m-2), m(m-1), 3m(m-2)$ si sottraggono rispettivamente $\mu+\mu', 3\mu+2\mu', 8\mu+6\mu'$, si trovano i numeri p, n, ν. Le formole alle quali in tal modo si perviene si chiamano *formole di Plücker*. Da esse è facile dedurre che, per una curva di ordine n, di classe m, di genere p, i numeri delle singolarità sono

$$\nu = 2(n+p-1) - m \quad , \quad \nu' = {}^1/_2(n-1)(n-6) + m - 3p \ ,$$

$$\mu = 2(m+p-1) - n \quad , \quad \mu' = {}^1/_2(m-1)(m-6) + n - 3p \ ,$$

qualora non si abbiano altre singolarità più complicate. Particolarmente interessanti sono le *curve di genere zero*, le quali hanno, tutte, la proprietà (che le caratterizza) di essere *unicursali*, cioè di avere le coordinate x, y dei loro punti esprimibili razionalmente in funzione d'una terza variabile:

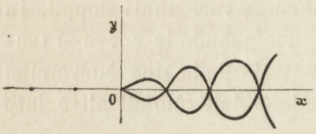
*) Vedi Jordan « *Cours d'Analyse* » (1ère éd., t. I, p. 371).

www.rcin.org.pl

tali sono, per esempio, le coniche e le prime tre curve studiate nel precedente paragrafo.

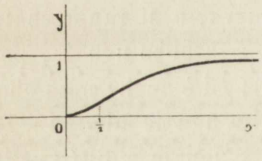
31. Altre singolarità possono verificarsi solo nelle curve trascendenti:

a) Prima di tutto ci si convince facilmente che su tali curve si possono avere infinite singolarità. Ciò si è già constatato nella curva $y = e^x + \operatorname{sen} x$ (infiniti flessi), nella cicloide (infinite cuspidi), *ecc.*; ed ora si può aggiungere che la curva $y^2 = x \operatorname{sen}^2 x$, dotata d'una cuspide nell'origine, e di due flessi fuori dell'asse x, possiede inoltre, su questo asse, infiniti punti isolati ed infiniti punti doppii, i quali sono anche punti d'inflessione.



b) Infiniti punti d'inflessione presenta anche, in un intervallo finito, la curva $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, che ha un assintoto ($y = 1$) parallelo all'asse x. Siccome si ha $x^4 y'' = -y$, l'inflessione avviene sempre sull'asse x. Oltre le infinite tangenti regredienti (che concorrono in due punti dell'asse y), la curva ammette come tangenti singolari le bisettrici degli assi, dalle quali è toccata, infatti, in infiniti punti. Questa curva è poi notevole per la seguente proprietà: da ogni punto dell'asse y, compreso nell'intervallo $(-1, 1)$, le si possono condurre infinite tangenti, i cui punti di contatto stanno sopra una retta uscente dall'origine. Analoghe proprietà si riscontrano sulla curva $y = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$, assintotica all'asse x.

c) *Punti di fermata* son quelli nei quali termina bruscamente un ramo di curva, come accade nell'origine per uno dei rami della curva $y = e^{-\frac{1}{x}}$, dotata inoltre d'un flesso per $x = {}^1/_2$, ed assintotica alla retta $y = 1$. La curva $y = (e^{\frac{1}{x}} - 1) : (e^{\frac{1}{x}} + 1)$ consta anch'essa di due rami, i quali si fermano sull'asse delle y nei punti $y = \pm 1$, e sono entrambi assintotici all'asse delle x. Anche le curve rappresentate dalle equazioni



$$y = \frac{x^2}{\log x} \quad , \quad y = x^2 \log \frac{x}{y}$$

si fermano nell'origine, perchè ai valori negativi di x non corrispondono punti reali. La prima sembra comportarsi, rispetto alla tangente nell'origine, come in un punto d'inflessione, perchè (*cfr.* V, 1)

$$\lim \frac{y}{x^2} = 0 \quad , \quad \text{ma} \quad \lim \frac{y}{x^n} = \infty \quad \text{per} \quad n > 2 \; ;$$

e la seconda come in un punto di regresso, perchè

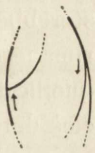
$$\lim \frac{y}{x^2} = \infty \quad , \quad \text{ma} \quad \lim \frac{y}{x^n} = 0 \quad \text{per} \quad n < 2 \; .$$

d) Se due rami d'una curva s'incontrano in un punto M, e vi si fermano, M è un *punto saliente*. In M la curva tocca due rette, come in un punto doppio, ma ciascun ramo esiste, come in una cuspide, da un lato solo della corri-

www.rcin.org.pl

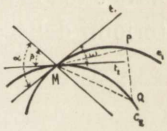
spondente normale. Un punto saliente lo abbiamo già incontrato (§ 19, *e*) sulla curva $y = x:(1 + e^{\frac{1}{x}})$, ed un altro esempio semplicissimo ne abbiamo (II, 2, *b*), per $x = 0$, nella curva $y = x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$.

e) Quando poi un solo dei due rami si ferma nel punto comune, questo è un *punto di sdoppiamento* *), ossia la curva presenta ivi un bivio, per così dire, ad un punto che la percorre in un certo senso. Per averne esempii basta aggiungere $e^{-\frac{1}{x}}$, o $x \log x$, o $[x]$, *ecc.*, ad y, nella equazione di una curva dotata d'un punto doppio, per esempio in $x^3 + y^3 = 3axy$. Si viene così a sopprimere o ad asportare uno dei quattro rami uscenti dal punto doppio; ed è chiaro che lo stesso procedimento permette di sopprimere due, tre o quattro rami, e può quindi servire a costruire curve dotate di punti salienti, punti di fermata o punti isolati.



Contatti.

32. Nelle vicinanze d'un punto ordinario M, comune a due curve, si considerino due punti P e Q, uno sopra una curva, l'altro sull'altra. Immaginiamo che P e Q tendano simultaneamente ad M, e, per fissare le idee, supponiamo (quantunque non sia necessario) che la retta PQ tenda ad una posizione limite, nella quale siano diversi da zero i suoi angoli α e β con le due curve (ossia con le loro tangenti in M). È anzitutto facile vedere che gli archi MP ed MQ sono infinitesimi del medesimo ordine. Infatti



$$\lim \frac{MP}{MQ} = \lim \frac{\operatorname{sen} \widehat{MQP}}{\operatorname{sen} \widehat{MPQ}} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha},$$

ed il secondo membro è, per ipotesi, finito e diverso da zero. Ora, preso MP o MQ come infinitesimo principale, e chiamato ω l'angolo delle due curve, in M, si ha pure

$$\lim \frac{PQ}{MQ} = \lim \frac{\operatorname{sen} \widehat{PMQ}}{\operatorname{sen} \widehat{MPQ}} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \alpha},$$

e si vede che la distanza PQ è infinitesima del primo ordine, o d'un ordine superiore, secondo che ω è diverso da zero o uguale a zero, vale a dire secondo che, in M, le due curve si tagliano o si toccano. Adunque il diventare PQ infinitesimo d'un ordine superiore al primo è un fatto che caratterizza il *contatto* delle curve. È dunque naturale assumere come indice del contatto più o meno stretto, che si può avere fra le curve considerate, l'ordine d'infinitesimo di PQ. Pertanto diremo che *il contatto è dell'ordine n* quando PQ è infinitesimo dell'ordine $n + 1$.

*) Su queste singolarità, segnalate venti anni fa dal fisico belga Plateau, vedi un articolo di Mansion in *Mathesis* (1883, p. 193).

www.rcin.org.pl

33. Partendo da questa definizione è facile trovare le condizioni analitiche del contatto n^{-uplo} per due curve, date in coordinate cartesiane mediante le equazioni $Y=\varphi(X), Y=\psi(X)$. Supponiamo che, in M, le curve ammettano una tangente comune, non parallela all'asse delle y, e tagliamole, nelle vicinanze di M, con una parallela al detto asse, che le incontri in P e Q. Qui si noti che, se la tangente fosse parallela all'asse delle y, basterebbe scambiare fra loro gli assi, e conseguentemente le coordinate, per rimanere nell'ipotesi fatta. Ciò premesso, se x è l'ascissa di M, ed $x+h$ quella di P e Q, è chiaro che l'infinitesimo h è dell'ordine di MP e di MQ, cioè del primo ordine, perchè il rapporto di h ad MP o ad MQ tende al coseno dell'angolo che la tangente in M fa con l'asse delle x, e per ipotesi questo coseno non è nullo. Anche per ipotesi la retta PQ non tende a confondersi con la tangente in M, e però le condizioni del contatto n^{-uplo} son tutte racchiuse nel fatto che PQ è infinitesimo dell'ordine $n+1$; e siccome, posto $\chi(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, si ha (III, 11)

$$PQ=\chi(x+h)=\chi(x)+h\chi'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\chi^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\chi^{(n+1)}(x)+\varepsilon\right)$$

dove ε tende a zero con h, e per conseguenza, supponendo nulli i primi $n+1$ termini del secondo membro,

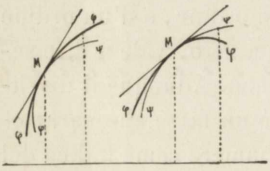
$$\lim\frac{PQ}{h^{n+1}}=\frac{\chi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!},$$

si vede che *le condizioni necessarie e sufficienti perchè le due curve abbiano, nel punto* M, *un contatto dell'ordine* n, *sono*

$$\varphi(x)=\psi(x)\ ,\ \varphi'(x)=\psi'(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)=\psi^{(n)}(x)\ ,\ \varphi^{(n+1)}(x)\gtrless\psi^{(n+1)}(x)\ ,\quad (15)$$

cioè che le prime n derivate dell'ordinata rispetto all'ascissa siano fra loro uguali, nelle due curve, ma le derivate $(n+1)^{esime}$ siano differenti. Si noti che la prima delle condizioni (15) esprime semplicemente che, in M, le curve s'incontrano, e la seconda che esse si toccano.

34. Osserviamo che, quando n è *dispari*, le condizioni trovate son quelle stesse che permettono di asserire (III, 25) che la funzione $\chi(X)$ ha, per $X=x$, un minimo o un massimo; e siccome la funzione è nulla per quel valore di X, essa conserverà invariato un certo segno intorno ad M, e per conseguenza le due curve, in M, *non si attraversano*. Se, invece, n è *pari*, la funzione considerata non ha nè minimo nè massimo per $X=x$, e però si ha $\varphi(X)>\psi(X)$ da un lato di M, e $\varphi(X)<\psi(X)$ dall'altro lato, cioè le due curve, pur toccandosi in M, *si attraversano*. Dunque il solo fatto che due curve nel toccarsi s'incrociano rivela un contatto superiore, ed in tutti i casi d'un ordine pari. Tuttavia questa conclusione è subordinata all'ipotesi implicitamente contenuta nelle precedenti considerazioni, cioè che le fun-



www.rcin.org.pl

zioni φ e ψ ammettano le successive derivate uniche. Così, per esempio, nel § 25 abbiamo incontrata una curva che attraversa la tangente nell'origine, malgrado che il contatto fra le due linee sia semplice. Un caso analogo si dà per la curva $y = x^2 : (1 + e^{\frac{1}{x^2}})$, che nell'origine tocca ed attraversa (§ 19, f) la parabola $y = {}^1/_2 x^2$, quantunque il contatto sia semplice a sinistra dell'origine, mentre a destra non si saprebbe dire quanto ne sia elevato l'ordine.

35. Algebricamente considerate le condizioni (15) dicono ancora che l'equazione $\chi(X) = 0$ ha in $X = x$ una radice $(n+1)^{-upla}$; e siccome questa è l'equazione che fornisce le ascisse dei punti d'incontro delle due curve, si può dire che in M sono riuniti $n+1$ punti comuni alle curve stesse. Questo modo di vedere è poi geometricamente giustificato dal fatto che, se si conduce per un punto M d'una curva $Y = f(X)$ una curva variabile $Y = \varphi(X)$, la cui equazione racchiuda più di n parametri arbitrarii, e se si dispone di questi parametri in modo che la curva passi per altri n punti $M', M'', \ldots$, della prima curva, e se finalmente questi n punti si fanno simultaneamente tendere ad M in modo che la curva variabile tenda ad occupare una posizione limite, in questa essa ha un contatto di ordine generalmente uguale ad n con la curva data. Supponiamo infatti che $n+1$ parametri della curva variabile siano stati determinati in modo da soddisfare alle condizioni

$$\varphi(x) = f(x)\ ,\ \varphi(x_1) = f(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi(x_n) = f(x_n)\ ,$$

nelle quali $x, x_1, x_2, \ldots\ldots$ sono le ascisse di $M, M', M'', \ldots$ È noto (III, 31) che si può scrivere

$$\varphi(X) = f(x) + (X-x)f(x, x_1) + (X-x)(X-x_1)f(x, x_1, x_2) + \cdots$$
$$+ (X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_{n-1})f(x, x_1, \ldots, x_n) + (X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_n)\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ ,$$

rappresentando con ξ un numero compreso fra la più piccola e la più grande delle ascisse $X, x, x_1, \ldots, x_n$. È anche noto che, quando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendono insieme ad x, si ha

$$\lim f(x, x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\ .$$

Dunque, se si rappresenta con ξ_1 un numero compreso fra X ed x,

$$\varphi(X) = f(x) + (X-x)\frac{f'(x)}{1} + (X-x)^2\frac{f''(x)}{1.2} + \cdots + (X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (X-x)^{n+1}\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\ .$$

D'altra parte, se ξ_0 è un altro numero compreso fra X ed x,

$$f(X) = f(x) + (X-x)\frac{f'(x)}{1} + (X-x)^2\frac{f''(x)}{1.2} + \cdots + (X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (X-x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\ .$$

Per conseguenza

$$\lim_{X=x}\frac{f(X) - \varphi(X)}{(X-x)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x) - \varphi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\ ,$$

www.rcin.org.pl

cioè $f(X)-\varphi(X)$ è infinitesima d'un ordine superiore ad n, e però le due curve hanno, in M, un contatto di ordine non inferiore ad n. Il contatto può diventare d'un ordine superiore ad n quando altri punti d'incontro delle due curve, oltre quelli da noi considerati, vadano a confondersi con M. Naturalmente in tutto ciò si suppone n intero; ma, nel definire l'ordine del contatto, non si esclude che possa essere frazionario, come accade, per esempio, nel contatto fra una curva ed una sua tangente inflessionale, dove l'ordine è, in generale (§ 28), uguale ad $^1/_2$.

36. Ora supponiamo che ad una data curva $f(X,Y)=0$ si voglia condurre, in un punto (x,y), una curva che abbia con essa un contatto n^{-uplo}, ed appartenga ad una famiglia di curve, definita dall'equazione $\varphi(X,Y)=0$, che racchiude più di n parametri arbitrarii. Bisognerà derivare le due equazioni n volte di seguito, come per calcolare le prime n derivate di Y rispetto ad X, ed esprimere poi che in entrambe le serie di equazioni le dette derivate hanno, per $X=x$ ed $Y=y$, gli stessi valori. Si ottengono così $n+1$ equazioni, comprendendovi quella che si ha ponendo $X=x$ ed $Y=y$ nell'equazione della curva incognita. Esse servono a determinare $n+1$ parametri, ed in generale avverrà che, soltanto se i parametri arbitrarii saranno in numero maggiore di n, si potrà ottenere un contatto n^{-uplo}. Quando si dispone di tutti i parametri, in modo da raggiungere il *contatto massimo*, si dice che le due curve sono *osculatrici*. Ciò non toglie che, per una particolarità inerente alla prima curva, si possa oltrepassare l'ordine massimo, ed allora si dice che le curve sono *surosculatrici*. Per sapere in quali punti avviene la surosculazione, basta derivare una volta di più, ed eliminare i parametri fra tutte le equazioni ottenute.

37. **Esempii**: *a)* Quando ad una curva si vuol condurre, in un punto (x,y), una retta tangente, se si osserva che l'equazione della retta $Y=mX+h$ contiene due parametri arbitrarii, si prevede che non si può ottenere, in generale, se non un contatto semplice. Intanto si trovano, derivando, le condizioni $y=mx+h$, $y'=m$, nelle quali bisogna pensare che x,y,y' si riferiscano alla curva data. Dalle ultime equazioni si ricavano i valori dei parametri: $m=y'$, $h=y-xy'$: l'equazione della retta tangente è dunque $Y=Xy'+(y-xy')$, cioè $Y-y=(X-x)y'$. Per un contatto superiore bisogna che sia $y''=0$, e ciò dipende dalla curva data; e precisamente si vede che solo nei flessi una curva ha, con le proprie tangenti, un contatto di ordine superiore al primo. Questo contatto è generalmente del secondo ordine, e la tangente *attraversa* la curva; ma, perchè ciò avvenga, occorre inoltre e basta che la prima delle successive derivate $y''', y^{IV}, \ldots$, che non è nulla, sia di ordine dispari. Con linguaggio geometrico si può dire che in un punto d'inflessione M sono confusi almeno tre punti comuni alla curva ed alla sua tangente, e che in ogni caso il numero dei punti accumulati in M è dispari o pari secondo che la retta è attraversata o no dalla curva.

b) Un circolo di centro (ξ,η) e di raggio ρ è rappresentato dall'equazione $(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2=\rho^2$. Derivando e ponendo $X=x, Y=y$, ecc., si ottiene

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2\ ,\ x-\xi+(y-\eta)y'=0\ ,\ 1+y'^2+(y-\eta)y''=0\ , \quad (16)$$

www.rcin.org.pl

d'onde si trae, successivamente,

$$y-\eta=-\frac{1+y'^2}{y''}\quad,\quad x-\xi=y'\frac{1+y'^2}{y''}\quad,\quad \rho=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\,.$$

Si ritrova così il circolo già chiamato osculatore, e si vede che il suo contatto con la curva è generalmente del secondo ordine, d'onde segue (*cfr.* § 13) che *il circolo osculatore attraversa la curva nel punto stesso in cui la tocca.* Si può anche dire, riferendosi a quanto si è visto nel § 35, che il circolo osculatore passa per tre punti della curva, infinitamente vicini, ed è bene rammentarsi che proprio così questo circolo ci si è presentato per la prima volta (III, 32, *e*).

c) Se poi si vuole che un circolo abbia con una curva data un contatto di ordine superiore al secondo, bisogna che sia soddisfatta anche l'eguaglianza che si ottiene derivando l'ultima delle (16), cioè

$$3y'y''+(y-\eta)y'''=0\quad,\quad \text{o}\quad 3y'y''^2=(1+y'^2)y'''\ :$$

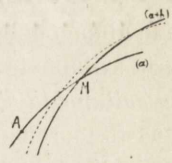
ciò dipende dalla natura della curva data, nel punto particolare che si considera. Ora si noti che la derivata di ρ, rispetto ad x, è precisamente

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''^2}(3y'y''^2-(1+y'^2)y''')\,.$$

Dunque (*cfr.* § 13), immaginando che M percorra la curva, avviene che *il circolo osculatore, quando diventa minimo o massimo, acquista con la curva un contatto di ordine superiore al secondo.* Ciò non toglie che la surosculazione possa aver luogo anche quando il circolo non diventa minimo o massimo.

Inviluppi.

38. Sia data una famiglia di curve mediante l'equazione $f(X,Y,a)=0$, che per ciascun valore del parametro a individua una curva. Supponiamo che f sia continua anche rispetto ad a, ed ammetta le derivate prime continue. Sia M un punto d'incontro delle curve (a) ed $(a+h)$, ossia delle curve corrispondenti ai valori a ed $a+h$ del parametro. Quando, fissato a, si fa tendere h a zero, la curva $(a+h)$ tende a coincidere con (a), e può darsi che il punto M, scorrendo su (a), tenda ad occupare una posizione limite A. Il luogo dei punti A chiamasi *inviluppo* delle curve (a). Ciò premesso, si noti che le equazioni delle curve (a) ed $(a+h)$ sono soddisfatte dalle coordinate X, Y del punto M, dimodochè si ha



$$f(X,Y,a)=0\quad,\quad f(X,Y,a+h)=0\ , \tag{17}$$

e conseguentemente, sottraendo la prima eguaglianza dalla seconda, anche $f'_a(X,Y,a+\theta h)=0$, con θ compreso fra 0 ed 1. Se M tende ad A, ciò vuol dire che, per h infinitesimo, X ed Y tendono a limiti determinati x ed y, coordinate di A, dimodochè l'ultima equazione diventa $f'_a(x,y,a)=0$,

www.rcin.org.pl

mentre le (17) si riducono entrambe ad $f(x,y,a)=0$. *L'eliminazione di* a *fra le equazioni*

$$f(x,y,a)=0 \quad , \quad f'_a(x,y,a)=0 \tag{18}$$

fornisce l'equazione dell'inviluppo. Analogamente si procede quando l'equazione della famiglia contiene n parametri, legati da $n-1$ relazioni:

$$f(x,y,a,b,c,\ldots)=0 \quad , \quad \varphi(a,b,c,\ldots)=0 \quad , \quad \psi(a,b,c,\ldots)=0 \ , \ \ldots$$

Differenziando si ottengono le uguaglianze

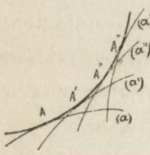
$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db+\cdots=0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a}da+\frac{\partial \varphi}{\partial b}db+\cdots=0 \ , \ \ldots\ldots$$

per la coesistenza delle quali è necessario che si abbia

$$\frac{\partial(f,\varphi,\psi,\ldots)}{\partial(a,b,c,\ldots)}=0 \ .$$

Basta poi eliminare, fra questa e le n uguaglianze date, gli n parametri, per trovare l'equazione dell'inviluppo.

39. Ora vogliamo dimostrare che *l'inviluppo tocca tutte le curve della famiglia.* L'equazione dell'inviluppo è, se si vuole, la prima equazione (18), nella quale si pensa a come funzione di x e di y, definita dalla seconda equazione (18). Ora la derivazione totale della prima, rispetto ad x, conduce all'equazione $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dx}=0$, che generalmente si riduce, in virtù della seconda equazione (18), a $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$, ossia a quella stessa equazione che fornisce il valore di y' per la curva (a).



40. **Sviluppata e sviluppanti.** Si chiama *sviluppata* d'una curva l'inviluppo delle sue normali. Ogni curva, poi, si dice *sviluppante* della propria sviluppata. Per quanto si è visto nel § 14 si può subito affermare che *la sviluppata d'una curva piana è il luogo dei suoi centri di curvatura.* Ora questo teorema si può anche dimostrare applicando all'equazione della normale $X-x+(Y-y)y'=0$ il procedimento esposto nel § 38. Si ottiene infatti $-(1+y'^2)+(Y-y)y''=0$, e però le coordinate del punto di contatto della normale col suo inviluppo sono

$$X=x-y'\frac{1+y'^2}{y''} \quad , \quad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''} \ .$$

D'altra parte si è visto nel § 37 che, se ξ ed η sono le coordinate del centro di curvatura, si ha

$$x-\xi=y'\frac{1+y'^2}{y''} \quad , \quad y-\eta=-\frac{1+y'^2}{y''} \ .$$

Dunque $X=\xi$, $Y=\eta$.

www.rcin.org.pl

41. Scritte le coordinate del centro di curvatura sotto la forma

$$\xi = x - \rho \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \eta = y + \rho \cos\varphi \ ,$$

se ne deduce

$$d\xi = dx - \rho\cos\varphi\, d\varphi - \operatorname{sen}\varphi\, d\rho \quad , \quad d\eta = dy - \rho \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, d\rho \ ;$$

quindi, ricordando che $dx = \cos\varphi\, ds$, $dy = \operatorname{sen}\varphi\, ds$, e ponendo ds per $\rho d\varphi$, si trova $d\xi = -\operatorname{sen}\varphi\, d\rho$, $d\eta = \cos\varphi\, d\rho$. Queste formole mostrano che l'elemento CC′ di sviluppata si può considerare come se fosse collocato sulla normale alla sviluppante, e come se avesse la lunghezza $d\sigma = d\rho$. Ne segue, ancora una volta, che *le tangenti alla sviluppata sono normali alla sviluppante.* Inoltre l'eguaglianza $d(\sigma - \rho) = 0$ mostra che $\sigma - \rho$ è costante, e però, se si considera un arco di sviluppata $C_1C_2 = \sigma_2 - \sigma_1$, negli estremi del quale i raggi di curvatura della sviluppante considerata abbiano i valori ρ_1 e ρ_2, si ha $\sigma_1 - \rho_1 = \sigma_2 - \rho_2$, cioè $\sigma_2 - \sigma_1 = \rho_2 - \rho_1$. In altri termini arco $C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1$. Questa proprietà mostra che, se si immagina avvolto un filo sopra una curva piana, e che poi, tenendo fisso un capo del filo, questo si svolga, restando teso, nel piano della curva, ciascuno dei suoi punti descrive una sviluppante della curva data. Una curva ha dunque infinite sviluppanti, le quali costituiscono un sistema di curve *parallele* ed *equidistanti.* Si possono anche considerare le sviluppanti d'una curva come rullette, gerate dai punti d'una retta che rotola, senza strisciare, sulla curva stessa. Finalmente, per conoscere la curvatura della sviluppata d'una data linea, basta scrivere che nelle due curve l'angolo di contingenza ha lo stesso valore, d'onde si deduce subito che *il raggio di curvatura della sviluppata è uguale a* $\rho\dfrac{d\rho}{ds}$; e perciò accade, in generale, che, nei punti di minima o massima curvatura della sviluppante, la sviluppata presenta altrettante cuspidi. Invece le cuspidi della sviluppante (almeno quelle di prima specie) cadono sulla sviluppata, perchè, annullandosi ρ, il punto M della sviluppante coincide col punto C della sviluppata; ed inoltre, se questa ha in M il raggio a, dall'eguaglianza $\lim \rho\dfrac{d\rho}{ds} = a$ si deduce, ponendo in M l'origine degli archi della sviluppante, ed invocando il teorema di l'Hospital,

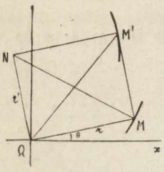
$$\lim \frac{\rho^2}{s} = 2a \ ,$$

vale a dire che, intorno ad M, la sviluppante si comporta come se la sua equazione intrinseca fosse $\rho^2 = 2as$, ossia (*cfr.* § 15, *o*) come si comporta la sviluppante d'un circolo di raggio a intorno alla propria cuspide.

42. **Pedali ed antipedali.** Abbiamo già detto nel § 11 che si chiama *pedale* d'una curva (M), rispetto ad un polo Q, il luogo delle projezioni di Q sulle tangenti di (M). Se (M_1) è la pedale di (M), si dice che

www.rcin.org.pl

(M) è l'*antipedale* di (M_1) rispetto a Q. È ovvio che l'antipedale d'una curva rispetto ad un punto Q si può considerare come l'inviluppo delle perpendicolari elevate alle rette uscenti da Q, nei loro punti d'incontro con la curva data. Questa osservazione indica la via da seguire per trovare l'equazione dell'antipedale d'una curva. Sia $x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta = r$ l'equazione di MM_1. Derivandola rispetto a θ si ottiene l'equazione $-x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta = r'$, che rappresenta la perpendicolare condotta per l'estremità N della normale polare su MM_1. Dunque *il punto* M_1 *dell'antipedale di* (M) *è la projezione di* N *su* MM_1. Dalle due equazioni si deduce $x = r\cos\theta - r'\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta + r'\cos\theta$. Se si elimina θ, tenendo conto dell'equazione polare di (M), si ottiene l'equazione cartesiana di (M_1). Inversamente, data la curva (M_1), si conosce, per la definizione stessa, il punto M che corrisponde ad M_1 sulla pedale di (M_1), e le considerazioni precedenti permettono di ritrovare (*cfr.* § 11, *c*) per altra via la costruzione della tangente in M ad (M): questa è infatti perpendicolare alla normale MN, che si costruisce congiungendo M al punto di mezzo di QM_1.



43. Se poi si vuol conoscere il raggio di curvatura di (M_1), nel punto M_1, si noti che

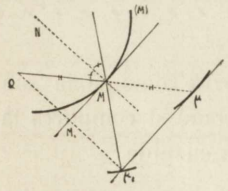
$$\frac{dx}{d\theta} = -(r + r'')\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = (r + r'')\cos\theta \ .$$

Siccome $d\theta$ è, per (M_1), l'angolo di contingenza, il raggio di curvatura è $\rho_1 = r + r''$, basta cioè prolungare M_1N di $NC_1 = r''$ per ottenere il centro di curvatura di (M_1). A questo risultato si suole dare un'altra forma introducendo la lunghezza $r_1 = QM_1$ ed il raggio di curvatura di (M). Questo è

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = \frac{r_1^3}{2r_1^2 - r\rho_1} \ .$$

Si ha dunque la formola $\frac{r\rho_1}{r_1^3} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{\rho}$, che permette (*cfr.* § 15, *j*) di costruire C_1 quando è nota la posizione di C.

44. **Caustiche.** Immaginiamo che da un punto Q emanino raggi luminosi, i quali vengano poi riflessi da uno specchio (M). I successivi punti d'incontro dei raggi infinitamente vicini costituiscono una linea luminosa, che i fisici chiamano *caustica* per riflessione. Adunque la caustica della curva (M) rispetto al polo Q è l'inviluppo dei raggi che, provenienti dal punto luminoso Q, si riflettono sulla curva (M) seguendo la nota legge dell'eguaglianza fra gli angoli d'incidenza e di riflessione. Il raggio riflesso in M passa nel punto μ_1, simmetrico di Q rispetto alla tangente in M. Se si considera la curva (μ), luogo dei simmetrici di Q rispetto ai punti M, è quasi evidente che la curva (μ_1) è



www.rcin.org.pl

la pedale di (μ) rispetto a Q, e però la normale a (μ_1), in μ_1, passa nel punto medio di $Q\mu$, cioè per M. Per conseguenza i raggi riflessi sono tutti normali alla curva (μ_1), e però il loro inviluppo è la sviluppata di (μ_1). Dunque *la caustica d'una curva è la sviluppata della pedale d'una curva simile, rispetto al punto luminoso.* Ne segue subito che i punti della caustica si costruiscono (*cfr.* § 15, *j*) come i centri di curvatura della pedale di (μ) rispetto a Q; ed è facile riconoscere che la costruzione si può eseguire sostituendo alla curva (μ) la stessa (M). Nel caso poi che i raggi luminosi vengano dall'infinito, la costruzione si riduce ad una forma assai semplice, giacchè si trova che *le normali alla caustica, prodotta da un fascio di raggi paralleli, dividono per metà i raggi di curvatura dello specchio nei rispettivi punti d'incidenza.* Finalmente, nel caso generale d'un punto Q a distanza finita, si vede subito, invocando il teorema sulla lunghezza della sviluppata, dimostrato nel § 41, che *ogni arco di caustica, con un estremo in un punto convenientemente scelto, è lungo quanto il cammino totale percorso dalla luce per giungere nell'altro estremo*; d'onde segue, in particolare, che se si vuole che i raggi uscenti da Q tornino a convergere in un punto P, bisogna farli riflettere sopra un'ellisse, che abbia i fuochi in P e Q.

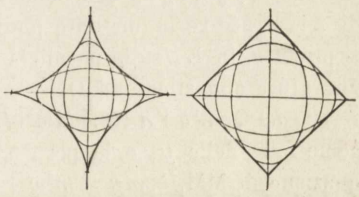
45. **Esercizii**: *a)* L'equazione $y=(x-a)^3$ rappresenta una infinità di parabole cubiche uguali, inviluppate dall'asse delle x. Questa retta tocca tutte le parabole nei loro punti d'inflessione, e perciò non divide il piano in due regioni, delle quali una sola contenga le curve inviluppate, e l'altra no, come accade in generale. Similmente l'inviluppo delle parabole $y=a^2(x-a)^2$ è costituito dall'asse delle x e dalla curva $16y=x^4$; ma questa, pur toccando in un punto $(x=2a)$ ciascuna curva, l'attraversa in altri due $(x=-2a\pm 2a\sqrt{2})$, e così la regione occupata dalle parabole si trova limitata dal solo asse delle x.

b) Si cerchi l'inviluppo d'una retta, mobile nel piano in guisa che due suoi punti restino sui lati d'un angolo retto. Se l è la distanza di questi punti, l'equazione della retta è $\frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\operatorname{sen}\theta}=l$, e θ si può considerare come quel parametro arbitrario, a ciascun valore del quale corrisponde una posizione della retta. Derivando rispetto ad esso la precedente equazione si ottiene

$$\frac{x}{\cos^3\theta}=\frac{y}{\operatorname{sen}^3\theta}\ ,\quad \text{ovvero}\quad \frac{x:\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{y:\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}=l\ ,$$

e conseguentemente $x=l\cos^3\theta$, $y=l\operatorname{sen}^3\theta$; poi $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$. Dunque (§ 15, *g*) la retta inviluppa un'asteroide.

c) L'asteroide è anche l'inviluppo delle ellissi descritte da tutti gli altri punti della retta. Infatti, spezzato il segmento l in $a+b$, l'equazione dell'ellisse descritta dal punto di divisione è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: differenziandola rispetto ai parametri a e b, ed osservando che $da+db=0$, si trova $\frac{x^2}{a^3}=\frac{y^2}{b^3}$, ovvero

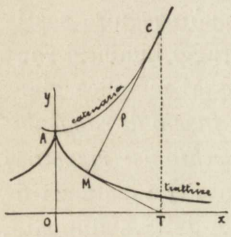


$\frac{x^2:a^2}{a}=\frac{y^2:b^2}{b}=\frac{1}{l}$; quindi, successivamente, $x^2=a^3:l$, $y^2=b^3:l$, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$.

www.rcin.org.pl

Se invece le lunghezze degli assi sono vincolate dalla relazione $a^2+b^2=l^2$, si trova, in modo analogo, che l'inviluppo è costituito dalle quattro rette $\pm x \pm y = l$, vale a dire che le infinite ellissi, che hanno in comune gli assi ed il circolo di Monge, sono inscritte in un medesimo quadrato.

d) Fra le sviluppanti della catenaria è particolarmente notevole quella che prende origine nel vertice della curva, e che si chiama *trattrice*. Le proprietà (§ 15, *l*) della catenaria conducono immediatamente a scoprire le seguenti proprietà della trattrice: *è costante il segmento staccato dall'assintoto sulle tangenti, a partire dai rispettivi punti di contatto;* ed *il centro di curvatura sta sulla perpendicolare elevata all'assintoto dal piede della tangente.*



e) Che le circonferenze siano le sole linee a curvatura costante si può dedurre dal fatto che, se ρ è costante il raggio di curvatura della sviluppata, cioè $\rho\frac{d\rho}{ds}$, è sempre nullo, vale a dire che la sviluppata si riduce ad un punto O; e però la curva data, i cui punti si trovano, alla distanza costante ρ da O, è una circonferenza. In modo analogo si giustifica il nome di sviluppante di circolo, dato precedentemente (§ 15, *o*) ad una curva, dalla cui equazione intrinseca $\rho^2=2as$ si ricava infatti $\rho\frac{d\rho}{ds}=a$, vale a dire che la curva ammette come sviluppata una circonferenza di raggio a.

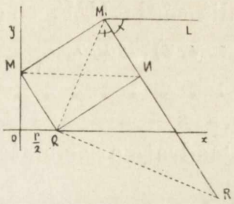
f) È facile constatare, anche per via geometrica, che la cicloide è uguale alla propria sviluppata, che la sviluppata della cardioide è una cardioide tre volte più piccola, che la sviluppata dell'asteroide è un'asteroide due volte più grande, *ecc.*; ma più generalmente si può dimostrare che, esclusa la sviluppante di circolo, *ogni epicicloide o ipocicloide è simile alla propria sviluppata*: il rapporto di similitudine è $1+2m$ (se m è il rapporto della circonferenza mobile alla circonferenza fissa), ed ha per conseguenza i valori $1, 3, \frac{1}{2}$, *ecc.*, per la cicloide ($m=0$), per la cardioide ($m=1$), per l'asteroide $\left(m=-\frac{1}{4}\right)$, *ecc.*

g) Riferiamoci alle cose dette nel § 43, ed osserviamo che, se la curva (M) è una lumaca, dalla sua equazione $r=a\cos\theta+b$ si deduce $r+r''=b$, e basta questa uguaglianza per confermare che l'antipedale è una circonferenza di raggio b. Similmente, se la curva (M) è una spirale di Archimede, si ha $r'=a$, $r''=0$, e però il punto N, centro di curvatura di (M_1) in virtù della seconda uguaglianza, resta, in virtù della prima, sopra una circonferenza. In altri termini (M_1) è una sviluppante di circolo. Dunque *la spirale di Archimede è la pedale d'una sviluppante di circolo.* Per questa proprietà, quasi evidente, si è condotti (*cfr.* § 15, *j*) ad una facile costruzione del centro di curvatura della spirale di Archimede in un dato punto M: se la projezione del polo O sulla normale si projetta, in L, sulla parallela condotta per N alla normale stessa, il centro di curvatura appartiene ad OL.

h) Qual'è l'*antipedale d'una retta* rispetto ad un punto Q? Presa la retta come asse delle y, e la perpendicolare condotta per Q come asse delle x, l'equazione di MM_1 è $my=m^2x+{}^1/_2p$, rappresentando con m il coefficiente angolare (variabile), e con ${}^1/_2p$ la lunghezza (costante) del segmento OQ. Derivando

www.rcin.org.pl

rispetto ad m si ottiene $y = 2mx$; poi, eliminando m, si trova $y^2 = 2px$. Dunque l'antipedale d'una retta rispetto ad un punto è la parabola che ha questo punto per fuoco, ed è toccata dalla retta nel vertice. Del resto ciò risulta immediatamente dalla costruzione indicata nel § 42, la quale mostra che $\widehat{QM_1N} = \widehat{NM_1L}$, cioè che la normale è bisettrice dell'angolo QM_1L; e da quanto altrove (§ 10, *d*) si è visto risulta che questa proprietà caratterizza appunto la parabola. Ancora si noti che la formola ottenuta in fine del § 43 diventa, nel caso attuale, $r\rho_1 = 2r_1^2$, e siccome nel triangolo rettangolo RQM_1 si ha $r_1^2 = r.RM_1$, si vede che R divide per metà il raggio di curvatura: si ricade così sopra una nota (§ 15, *k*) costruzione.



i) Se i raggi provenienti da un punto luminoso Q vengono riflessi da uno specchio circolare, la corrispondente curva (μ) è un'altra circonferenza, e però (§ 11, *c*) la curva (μ_1) è una lumaca. In particolare, se il punto Q appartiene alla circonferenza data, esso appartiene anche alla circonferenza (μ), e la lumaca è una cardioide, la cui sviluppata è un'altra cardioide, tre volte più piccola ed inversamente situata. Dunque *la caustica d'uno specchio circolare, per un fascio di raggi provenienti da un punto dello specchio stesso, è una cardioide*, che tocca la circonferenza nel punto luminoso Q, ed ha la cuspide ai due terzi del diametro che parte da Q. Se invece i raggi provengono dall'infinito, si è visto che la normale alla caustica in un punto P, corrispondente ad un dato punto d'incidenza M, passa nel punto N, medio del raggio OM, e però, costruite la circonferenza di centro O, che passa per N, e quella che ha per diametro MN, si vede che la curva (P) si può considerare come generata dal punto P della seconda circonferenza nel rotolamento puro di questa sulla prima circonferenza. Dunque *la caustica d'uno specchio circolare, per un fascio di raggi paralleli, è un'epicicloide a due cuspidi.*

VII. APPLICAZIONI ALLE CURVE STORTE.

Formole fondamentali.

1. **Tangente e piano normale.** La *tangente* in un punto M d'una curva qualunque, piana o storta, è sempre la retta a cui tende la secante MM′ quando, fissato M, si fa tendere M′ ad M lungo la curva. Noi vogliamo limitarci a studiare le linee per le quali si ha, come per le curve piane considerate nel precedente capitolo,

$$\lim \frac{\text{arco}\,MM'}{\text{corda}\,MM'} = 1 .$$

Ora, poichè i coseni direttori della secante MM′ sono uguali agli eccessi

www.rcin.org.pl

$\delta x, \delta y, \delta z$ delle coordinate di M′ su quelle di M, divisi per la lunghezza della corda MM′, si trova, passando al limite, dopo aver sostituito l'arco δs alla corda MM′, che *i coseni direttori della tangente alla curva, nel punto* (x, y, z), *sono*

$$a = \frac{dx}{ds} \quad , \quad b = \frac{dy}{ds} \quad , \quad c = \frac{dz}{ds} \, . \tag{1}$$

Quadrate e sommate, queste formole conducono all'altra

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \, . \tag{2}$$

Così, date le coordinate x, y, z in funzione d'un parametro qualunque t, se si calcola prima ds mercè la formola (2), le (1) faranno poi conoscere i coseni direttori della tangente. Le equazioni della tangente sono dunque

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz} \, ,$$

e si possono scrivere immediatamente considerandole come le equazioni della *retta che congiunge il punto* (x, y, z) *al punto* (x + dx, y + dy, z + dz). Giova conoscere un'altra forma delle medesime equazioni, utile nel caso che la curva sia rappresentata da una coppia di equazioni $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$. Allora, dovendo $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ essere proporzionali ai differenziali dx, dy, dz, vincolati dalle relazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0 \, ,$$

si deve avere

$$\begin{cases} (X - x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z - z)\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \, , \\[2ex] (X - x)\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + (Y - y)\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + (Z - z)\dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \, . \end{cases}$$

Adunque son queste le equazioni della tangente. Si chiama poi *piano normale* il luogo delle normali alla curva, in M, ossia delle perpendicolari condotte per M alla tangente. L'equazione d'un tal piano è

$$(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0 \, ,$$

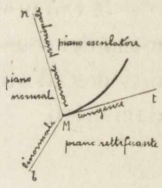
o pure, se la curva è data mediante le equazioni $\varphi = 0$, $\psi = 0$,

$$\begin{vmatrix} X - x & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\[2ex] Y - y & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\[2ex] Z - z & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \, .$$

2. Binormale e piano osculatore; normale principale e

www.rcin.org.pl

piano rettificante. Quando M′ tende, lungo la curva, a fissarsi in M, il piano condotto per la tangente in M parallelamente alla tangente in M′ può tendere ad una posizione limite, ed in questa esso prende il nome di *piano osculatore.* Una delle infinite normali è situata nel piano osculatore, un'altra è perpendicolare a questo piano: la prima dicesi *normale principale*, l'altra si chiama *binormale*, perchè è perpendicolare a due tangenti infinitamente vicine, vale a dire che può essere considerata come limite della retta condotta per M perpendicolarmente alle tangenti in M ed M′. Il piano determinato dalla tangente e dalla binormale si chiama *piano rettificante.* Le tre rette (tangente, binormale, normale principale) ed i tre piani (normale, osculatore, rettificante), definiti precedentemente, sono gli spigoli e le facce d'un triedro trirettangolo, che si chiama il *triedro fondamentale.* In seguito si vedrà che, per conoscere la posizione relativa dei triedri fondamentali in M ed M′, basta la conoscenza di due infinitesimi ε ed η, caratterizzati dalla doppia proprietà di essere dei differenziali, e di rappresentare, a prescindere da infinitesimi superiori, l'angolo delle tangenti in M ed M′, e l'angolo delle binormali nei medesimi punti. Il primo si chiama *angolo di contingenza*, il secondo *angolo di torsione.*



3. Qui è necessaria una breve digressione. Per una retta qualunque, i cui coseni direttori A, B, C sono funzioni continue d'una sola variabile indipendente t, si può sempre trovare un *differenziale*, sostituibile (VI, 1) all'angolo della direzione (A, B, C) con $(A+\delta A, B+\delta B, C+\delta C)$, ossia delle direzioni della retta, corrispondenti ai valori t e $t+dt$ della variabile indipendente. Conduciamo infatti, nella sfera di raggio 1, che ha il centro nell'origine, i raggi OP ed OP′ nelle predette direzioni. Al variare di t il punto P descrive sulla sfera una linea, ed è chiaro che all'angolo delle due direzioni, misurato dall'arco di circolo massimo PP′, si può prima sostituire la corda PP′, poi l'arco PP′ della linea descritta da P, e finalmente il differenziale dell'arco σ di questa curva, contato a partire da un'origine arbitraria. Ne segue subito, in virtù di (2), dopo avere osservato che le coordinate di P sono appunto A, B, C,

$$d\sigma^2 = dA^2 + dB^2 + dC^2 \ . \qquad (3)$$

Ad un'altra forma notevole di $d\sigma$ si giunge osservando che, essendo $\Sigma A^2 = 1$, $\Sigma A\,dA = 0$, si ha

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma A^2 & \Sigma A\,dA \\ \Sigma A\,dA & \Sigma dA^2 \end{vmatrix} = d\sigma^2 \ ;$$

quindi

$$d\sigma^2 = (B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2 \ . \qquad (4)$$

4. Ora, per conoscere la direzione della normale principale, osserviamo

www.rcin.org.pl

che, se la direzione (A, B, C) è quella della tangente, in M, alla curva (M), il piano OPP′ è parallelo alle tangenti in M ed M′, e però tende ad esser parallelo al piano osculatore quando M′ tende ad M (e conseguentemente P′ a P, se a, b, c sono funzioni continue di t). Intanto PP′, che tende a toccare, in P, la curva (P), diventando così perpendicolare ad OP, tende ad esser parallela tanto al piano osculatore quanto al piano normale, e per conseguenza alla normale principale. Dunque, in virtù di (1), *i coseni direttori della normale principale sono*

$$\lambda = \frac{da}{\varepsilon} \quad , \quad \mu = \frac{db}{\varepsilon} \quad , \quad \nu = \frac{dc}{\varepsilon} \, . \tag{5}$$

5. Ciò premesso, la direzione (α, β, γ) della binormale è determinata, a meno del senso, dalle condizioni di ortogonalità $\Sigma \alpha a = 0$, $\Sigma \alpha \lambda = 0$; e queste, insieme all'altra $\Sigma a \lambda = 0$, mostrano che il determinante dei nove coseni fondamentali

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1 \tag{6}$$

è ortogonale, d'onde segue *) che il suo valore è $+1$ o -1; ma si può sempre fissare il verso positivo della direzione della binormale in modo che sia vera la (6): geometricamente ciò equivale a supporre che, quando si porta il triedro fondamentale a coincidere col triedro degli assi, in guisa che le direzioni *positive* della tangente e della normale principale coincidano rispettivamente con quelle degli assi x e z, la direzione *positiva* della binormale vada a coincidere con quella dell'asse y. Ed è anche noto *) che, in queste condizioni, *ogni elemento del determinante* (6) *è uguale al proprio complemento algebrico.* Ne segue, tenendo conto delle (5), che *i coseni direttori della binormale sono dati dalle formole*

$$\frac{\alpha}{b\,dc - c\,db} = \frac{\beta}{c\,da - a\,dc} = \frac{\gamma}{a\,db - b\,da} = -\frac{1}{\varepsilon} \, . \tag{7}$$

Ed ora siamo in grado di scrivere anche l'equazione del piano osculatore $\Sigma(b\,dc - c\,db)(X - x) = 0$, alla quale, in virtù delle (1), possiamo dar la forma

$$\begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \\ Y - y & dy & d^2y \\ Z - z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

e così vediamo che *il piano osculatore nel punto* (x, y, z) *si può considerare come determinato dalla tangente e dal punto*

$$(x + dx + {}^1/_2 d^2x \quad , \quad y + dy + {}^1/_2 d^2y \quad , \quad z + dz + {}^1/_2 d^2z) \, .$$

*) « *Analisi algebrica* » p. 54.

www.rcin.org.pl

6. Le formole (7) e (5) permettono di determinare le direzioni della binormale e della normale principale quando sono noti i coseni a, b, c, poichè l'angolo di contingenza si può, per le (3) e (4), calcolare mediante l'una o l'altra delle seguenti formole:

$$\varepsilon^2 = da^2 + db^2 + dc^2 \quad , \quad \varepsilon^2 = (b\,dc - c\,db)^2 + (c\,da - a\,dc)^2 + (a\,db - b\,da)^2 \ .$$

Il segno con cui va preso ε resta arbitrario, giacchè il cambiamento di questo segno nelle formole (7) e (5) produrrebbe il cambiamento simultaneo dei segni di α, β, γ e λ, μ, ν, dimodochè resterebbe intatta la (6). Se invece di a, b, c fossero noti i coseni α, β, γ, si potrebbe calcolare l'angolo di torsione mediante una delle formole

$$\eta^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 \quad , \quad \eta^2 = (\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta)^2 + (\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma)^2 + (\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha)^2 \ ;$$

poi, con formole analoghe alle (7) e (5), si riuscirebbe a determinare le direzioni degli altri due spigoli del triedro fondamentale. Infatti la differenziazione delle uguaglianze $\Sigma a\alpha = 0$, $\Sigma\alpha^2 = 1$ dà, ricordando le (5),

$$\sum a\,d\alpha = -\sum \alpha\,da = -\varepsilon \sum \alpha\lambda = 0 \quad , \quad \sum \alpha\,d\alpha = 0 \ ;$$

quindi $d\alpha : \lambda = d\beta : \mu = d\gamma : \nu = \pm\eta$, ovvero, prendendo η con un segno conveniente,

$$\lambda = \frac{d\alpha}{\eta} \quad , \quad \mu = \frac{d\beta}{\eta} \quad , \quad \nu = \frac{d\gamma}{\eta} \ ; \tag{8}$$

poi $\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta = (\beta\nu - \gamma\mu)\eta = a\eta$, *ecc.*, ossia

$$\frac{a}{\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta} = \frac{b}{\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma} = \frac{c}{\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha} = \frac{1}{\eta} \ . \tag{9}$$

Anche qui si noti che il cambiamento di segno di η o di α, β, γ nelle formole (8) e (9) lascerebbe intatta la condizione (6).

7. **Formole di Frenet.** Dalle relazioni $\Sigma a\lambda = 0$, $\Sigma\alpha\lambda = 0$, $\Sigma\lambda^2 = 1$ si deduce, differenziando e tenendo presenti le (5) e le (8),

$$\sum a\,d\lambda = -\sum \lambda\,da = -\varepsilon \sum \lambda^2 = -\varepsilon \ ,$$

$$\sum \alpha\,d\lambda = -\sum \lambda\,d\alpha = -\eta \sum \lambda^2 = -\eta \ ,$$

e $\Sigma\lambda\,d\lambda = 0$. Dunque $d\lambda, d\mu, d\nu$ soddisfano al sistema di equazioni

$$\begin{cases} a\,d\lambda + b\,d\mu + c\,d\nu = -\varepsilon \ , \\ \alpha\,d\lambda + \beta\,d\mu + \gamma\,d\nu = -\eta \ , \\ \lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu = 0 \ , \end{cases}$$

che ha il determinante (6), ossia un determinante uguale all'unità, in cui ogni elemento è uguale al proprio complemento algebrico. Ne segue subito

$$d\lambda = -a\varepsilon - \alpha\eta \quad , \quad d\mu = -b\varepsilon - \beta\eta \quad , \quad d\nu = -c\varepsilon - \gamma\eta \ . \tag{10}$$

www.rcin.org.pl

Son queste le *formole di Frenet*. Esse ci dicono, insieme alle formole (5) ed (8), che *i differenziali dei nove coseni fondamentali sono esprimibili linearmente nei coseni stessi*; i coefficienti di tali espressioni dipendono unicamente da ε e da η. Se poi si chiama ω il differenziale sostituibile all'angolo di due normali principali, infinitamente vicine, le formole (10), quadrate e sommate, danno $\omega^2 = \varepsilon^2 + \eta^2$. Quest'ultima proposizione, che si può dimostrare mediante semplici considerazioni geometriche, è conosciuta col nome di *teorema di Lancret*.

8. È utile osservare che per qualunque terna ortogonale di direzioni sussistono formole analoghe alle precedenti. Prima, considerando due direzioni variabili qualunque, conveniamo di chiamare *rotazione d'una direzione verso l'altra* il differenziale ω, sostituibile allo spostamento angolare infinitesimo della projezione della prima sopra un piano parallelo ad entrambe, e proponiamoci di calcolare ω, supponendo conosciuti i coseni A, B, C ed A′, B′, C′, che definiscono le due direzioni. Conduciamo per l'origine le parallele, nel verso positivo, alle direzioni (A, B, C), (A′, B′, C′), (A + δA, B + δA, C + δC), ed alla projezione di questa sul piano determinato dalle prime due rette. Siano P, P′, P″ i punti in cui la prima, la terza e la quarta retta incontrano la sfera di raggio 1, col centro nell'origine. Evidentemente, poichè A, B, C sono le coordinate di P, ed A + δA, B + δB, C + δC quelle di P′, le differenze δA, δB, δC misurano le projezioni di PP′ sugli assi. D'altra parte l'elemento PP″, che differisce da ω per un infinitesimo superiore, si può considerare come la projezione di PP′ sulla direzione (l, m, n) dell'elemento stesso, evidentemente perpendicolare ad (A, B, C). Dunque, conservando i soli infinitesimi differenziali, $\omega = l\,dA + m\,dB + n\,dC$; e poichè, chiamando φ l'angolo delle due direzioni, si ha manifestamente

$$A' = A\cos\varphi + l\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad B' = B\cos\varphi + m\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad C' = C\cos\varphi + n\,\mathrm{sen}\,\varphi \ ,$$

si vede subito, moltiplicando per dA, dB, dC, e sommando, che

$$\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = A'dA + B'dB + C'dC \ .$$

È questa una formola spesso utile nelle applicazioni geometriche e meccaniche. Ciò premesso, se le direzioni (A′, B′, C′) ed (A″, B″, C″) costituiscono con (A, B, C) una terna *ortogonale*, e se (A, B, C) ruota di ω' verso la prima, e di ω'' verso la seconda, si ha

$$\sum A\,dA = 0 \quad , \quad \sum A'dA = \omega' \quad , \quad \sum A''dA = \omega'' \ ,$$

e se ne ricava

$$dA = A'\omega' + A''\omega'' \quad , \quad dB = B'\omega' + B''\omega'' \quad , \quad dC = C'\omega' + C''\omega'' \ ;$$

poi si vede che, se ω è il differenziale sostituibile allo spostamento angolare assoluto di (A, B, C) nello spazio, in virtù di (3) si ha $\omega^2 = \omega'^2 + \omega''^2$. In particolare le formole (5) ed (8) ci dicono che gli spostamenti angolari della

www.rcin.org.pl

tangente e della binormale consistono in rotazioni ε ed η verso la normale principale, e le (10) significano invece che lo spostamento angolare ω della normale principale risulta da due rotazioni $-\varepsilon$, $-\eta$, che questa retta esegue verso le prime due.

Curvature.

9. Come per le curve piane, così anche per le curve storte il rapporto $\varepsilon:ds$ serve a misurare una prima curvatura, o *flessione* della curva che si considera; ed analogamente si assume $\eta:ds$ per misurare un'altra curvatura, o *torsione*, che non ci si è presentata nelle curve piane, perchè in esse è costantemente nulla. Mentre poi al rapporto $\rho=ds:\varepsilon$ si continua a dare il nome di *raggio di curvatura* (o raggio di flessione), si conviene di chiamare *raggio di torsione* la lunghezza $\tau=ds:\eta$. L'introduzione delle lunghezze determinate ρ ed τ al posto degli infinitesimi ε ed η in tutte le formole precedenti giova a metter queste sotto una forma più precisa. Così le (5), (8) e (10) diventano

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{da}{ds}=\dfrac{\lambda}{\rho}, & \dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{\lambda}{\tau}, & \dfrac{d\lambda}{ds}=-\dfrac{a}{\rho}-\dfrac{\alpha}{\tau} \\ \dfrac{db}{ds}=\dfrac{\mu}{\rho}, & \dfrac{d\beta}{ds}=\dfrac{\mu}{\tau}, & \dfrac{d\mu}{ds}=-\dfrac{b}{\rho}-\dfrac{\beta}{\tau} \\ \dfrac{dc}{ds}=\dfrac{\nu}{\rho}, & \dfrac{d\gamma}{ds}=\dfrac{\nu}{\tau}, & \dfrac{d\nu}{ds}=-\dfrac{c}{\rho}-\dfrac{\gamma}{\tau} \end{array}\right\}. \tag{11}$$

Alla prima terna si può, ricordando le (1), dar la forma

$$\lambda=\rho\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}, \quad \mu=\rho\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}, \quad \nu=\rho\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}, \tag{12}$$

o, se si vuole,

$$\lambda=\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \ \mu=\rho\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \ \nu=\rho\left(\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right). \tag{13}$$

Similmente, in virtù delle (1), le (7) si possono scrivere nel seguente modo:

$$\alpha=\rho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right), \ \beta=\rho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right), \ \gamma=\rho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right). \tag{14}$$

10. **Calcolo della flessione.** Le formole (1), (12), (14) fanno conoscere i valori dei nove coseni fondamentali in funzione delle derivate prime e seconde delle coordinate, purchè prima si conosca il valore di ρ. Ora questo valore risulta dalle formole stesse, giacchè le (12), quadrate e sommate, danno

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2, \tag{15}$$

o, se si vuole, adoperando invece le (13),

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2,$$

www.rcin.org.pl

vale a dire che per le curve storte, come (V, 11, *e*) per le curve piane, *il quadrato della curvatura è uguale alla somma dei quadrati delle derivate seconde delle coordinate rispetto all'arco.* Se poi si elevano al quadrato le (14), e si sommano, si ottiene l'altra formola

$$\rho = \frac{\pm (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}\,, \tag{16}$$

che include (per z costante) quella che più comunemente (V, 11, *d*) si adopera per le curve piane. Dalla formola (15) si deduce subito che *le sole linee a flessione nulla sono le rette.* Infatti non si può costantemente avere $1:\rho = 0$ senza che siano ad un tempo nulle le derivate seconde delle coordinate, e per conseguenza le derivate prime uguali a costanti a, b, c, d'onde segue, chiamando x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto scelto come origine degli archi, $x = as + x_0$, $y = bs + y_0$, $z = cs + z_0$, e finalmente, eliminando s,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}\,,$$

equazioni della retta condotta dal punto (x_0, y_0, z_0) nella direzione (a, b, c).

11. **Calcolo della torsione.** Dalla seconda terna (11), moltiplicando per λ, μ, ν, e sommando, si ricava

$$\frac{1}{\tau} = \lambda \frac{d\alpha}{ds} + \mu \frac{d\beta}{ds} + \nu \frac{d\gamma}{ds}\,.$$

D'altra parte la derivazione delle (14) conduce alle formole

$$\frac{d\alpha}{ds} = \rho \left(\frac{dz}{ds} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{dy}{ds} \frac{d^3z}{ds^3} \right) + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho}{ds}\,, \text{ ecc.}$$

e per conseguenza, se si tien conto anche delle (13),

$$\frac{1}{\tau} = \rho^2 \sum \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{dz}{ds} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{dy}{ds} \frac{d^3z}{ds^3} \right),$$

ossia

$$\frac{1}{\tau\rho^2} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}\,. \tag{17}$$

Questa importante formola fa conoscere la torsione quando è nota la flessione. Del resto, se si sostituisce a ρ la sua espressione (16), si può anche scrivere

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,d^3y + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,d^3z}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}\,.$$

www.rcin.org.pl

Questa è la torsione. In forma più elegante:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2}.$$

Evidentemente nelle linee piane la torsione è nulla, purchè si escluda la retta, la cui torsione è dappertutto indeterminata, visto che si può in ciascun punto considerare come osculatore ogni piano che passa per la retta. Ora è utile osservare che *le sole linee a torsione nulla sono le curve piane.* Infatti, quando la torsione è costantemente nulla, è tale anche il secondo membro di (17), d'onde segue (IV, 9) che si ha $\Sigma\alpha dx=0$ per tre convenienti valori delle costanti α, β, γ; quindi $\Sigma\alpha x=$ *costante.* Alla medesima conclusione, come all'altra ottenuta in fine del precedente paragrafo, si perviene anche mercè la considerazione diretta delle prime due terne (11).

12. Note le curvature, è determinato il triedro fondamentale in M′ rispetto al triedro che ha l'origine in M. Si calcoli infatti la distanza $\Sigma A\,\delta x$ del punto M′ al piano condotto per M perpendicolarmente alla direzione (A, B, C). Per lo sviluppo di δx secondo la formola di Taylor (V, 17) si può sempre assumere s come variabile indipendente, nella quale ipotesi dalle (11) si ha

$$\frac{dx}{ds}=a\ ,\quad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\lambda}{\rho}\ ,\quad \frac{d^3x}{ds^3}=\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\left(\frac{a}{\rho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\rho}\ ,\ \ldots;$$

quindi

$$\delta x=a\,ds+\frac{\lambda}{\rho}\frac{ds^2}{2}+\left(\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\left(\frac{a}{\rho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\rho}\right)\frac{ds^3}{6}+\cdots,$$

e finalmente

$$\Sigma A\,\delta x=\mathfrak{A}ds+\frac{\mathfrak{C}}{\rho}\frac{ds^2}{2}+\left(\mathfrak{C}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\left(\frac{\mathfrak{A}}{\rho}+\frac{\mathfrak{B}}{\tau}\right)\frac{1}{\rho}\right)\frac{ds^3}{6}+\cdots,\qquad (18)$$

dove $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sono i coseni che definiscono la direzione (A, B, C) rispetto al triedro fondamentale, ossia

$$\mathfrak{A}=\Sigma Aa\ ,\quad \mathfrak{B}=\Sigma A\alpha\ ,\quad \mathfrak{C}=\Sigma A\lambda\ .$$

Soltanto per $\mathfrak{A}=0$ il secondo membro di (18) è infinitesimo del secondo ordine, e diventa d'un ordine superiore al secondo se si ha inoltre $\mathfrak{C}=0$. Dunque la distanza di M′ ai piani che passano per la tangente in M è generalmente infinitesima del secondo ordine rispetto all'arco MM′; ma, fra tutti questi piani, un solo ha da M′ una distanza infinitesima del terzo ordine almeno, ed è il piano osculatore. Bene a ragione, dunque, questo piano si è chiamato *osculatore*, poichè, fra tutti i piani dello spazio, è quello che *più si accosta* alla curva intorno ad M.

www.rcin.org.pl

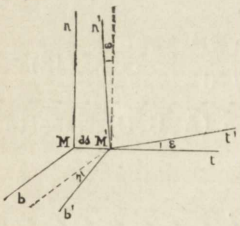
13. La formola (18) ci dà subito le coordinate u, v, w di M′ rispetto al triedro fondamentale: basta far coincidere (A, B, C) successivamente con le direzioni della tangente ($\mathfrak{A}=1, \mathfrak{B}=\mathfrak{C}=0$), della binormale ($\mathfrak{B}=1$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}=0$), della normale principale ($\mathfrak{C}=1, \mathfrak{A}=\mathfrak{B}=0$), per ottenere

$$u=ds-\frac{ds^3}{6\rho^2}\ ,\quad v=-\frac{ds^3}{6\tau\rho}\ ,\quad w=\frac{ds^2}{2\rho}-\frac{ds^2 d\rho}{6\rho^2}\ , \tag{19}$$

prescindendo dagli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo. In queste condizioni l'arco MM′ si può considerare come appartenente ad una sfera, giacchè si ha $\rho w-\frac{d\rho}{ds}\tau v={}^1/_2 ds^2$; ed al posto di ds^2 si può scrivere u^2, ed aggiungervi anche v^2 e w^2, trascurabili rispetto a ds^3. In tal modo si ottiene

$$u^2+\left(v+\tau\frac{d\rho}{ds}\right)^2+(w-\rho)^2=\mathfrak{R}^2\ ,$$

dove $\mathfrak{R}^2=\rho^2+\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)^2$, si trova cioè una sfera, che ha il raggio $\mathfrak{R}$, ed il cui centro sta nel piano normale, alle distanze $-\tau\frac{d\rho}{ds}$ e ρ dal piano osculatore e dal piano rettificante. Questa sfera si chiama *osculatrice* alla curva, in M, in quanto è, fra tutte le sfere dello spazio, quella che *più si accosta* alla curva intorno ad M. Quando poi si trascurano gli infinitesimi del terzo ordine, l'arco MM′ si può considerare come situato nel piano osculatore; e, se si trascurano anche quelli del secondo ordine, si può addirittura riguardare MM′ come un segmento rettilineo. Per conseguenza, in quelle questioni per le quali è lecito prescindere dagli infinitesimi superiori, è anche lecito assimilare la curva ad una linea poligonale MM′M″M‴... dai lati infinitamente piccoli, e considerare la tangente come la retta su cui giace un *elemento* MM′, il piano osculatore come il piano determinato da due elementi *consecutivi* MM′ ed M′M″, o dai punti M, M′, M″; la sfera osculatrice come determinata dai punti M, M′, M″, M‴. Questo modo di vedere e di esprimersi, apparentemente scorretto, è spesso utile per rendersi conto geometricamente di parecchi risultati del Calcolo. Ed ora è facile constatare che si passa da una posizione del triedro fondamentale (origine M) alla posizione *successiva* (origine M′) facendo scorrere di ds il vertice sulla tangente, e facendo poi ruotare gli spigoli intorno al vertice, in modo che acquistino, rispetto alle loro primitive posizioni t, b, n, i seguenti coseni direttori:



t' :	1	0	ε
b' :	0	1	η
n' :	$-\varepsilon$	$-\eta$	1

Ciò si deduce dalle formole (5), (8) e (10), nell'ipotesi che sia $a=\beta=\nu=1$, $b=c=\gamma=\alpha=\lambda=\mu=0$, ed è reso anche più chiaro e più preciso dalle considerazioni del § 8.

www.rcin.org.pl

14. Le formole (19) permettono di discutere l'andamento della curva intorno a ciascuno dei suoi punti. È chiaro, infatti, che se le curvature, in M, non sono nulle, un osservatore che cammini sulla curva, tenendo la testa sulla parte positiva della normale, e procedendo nel senso positivo della tangente, vedrà, in M, la curva *elevarsi* o *abbassarsi* secondo che ρ è positivo o negativo, e la vedrà volgere *a sinistra* o *a destra* secondo che τ ha il segno di ρ o il segno opposto. Siccome poi il cambiamento di ds in $-ds$ altera il segno di v, ma non quello di w, si vede che, se si prende intorno ad M un arco convenientemente piccolo, *ogni piano che passa per la tangente lascia l'arco tutto da una parte, ad eccezione del piano osculatore, il quale attraversa la curva.* In altri termini ogni punto della curva è un punto di inflessione per la projezione della curva sul corrispondente piano rettificante. Ciò accade soltanto in generale, poichè cessa di aver luogo nei punti (analoghi, *nello spazio*, ai punti d'inflessione delle curve piane) soddisfacenti alla condizione (*cfr.* VI, 24)

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{20}$$

In siffatti punti è nulla, in virtù di (17), almeno una delle curvature, e però v diventa d'un ordine superiore al terzo. Per valutare questa distanza bisogna proseguire il calcolo iniziato nel § 12, osservando innanzi tutto che

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -3\frac{a}{\rho}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} - \alpha\rho\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau\rho^2} + \lambda\left(\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\rho} - \left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\rho}\right), \tag{21}$$

per dedurne, a prescindere dagli infinitesimi d'un ordine superiore al quarto,

$$v = \frac{1}{24}\sum \alpha\, d^4x = -\frac{\rho\, ds^3}{24} d\frac{1}{\tau\rho^2}\,;$$

quindi, secondo che $\frac{1}{\rho} = 0$ $\left(\text{ma } d\frac{1}{\rho} \gtrless 0\right)$, o $\frac{1}{\tau} = 0$ $\left(\text{ma } d\frac{1}{\tau} \gtrless 0\right)$, è

$$v = -\frac{ds^3}{12\tau} d\frac{1}{\rho} \qquad \text{o} \qquad v = -\frac{ds^3}{24\rho} d\frac{1}{\tau}\,.$$

Ne segue, in generale, che nei punti *singolari* M, definiti dalla (20), secondo che *una delle curvature si annulla per prendere o per lasciare il segno dell'altra*, un arco convenientemente piccolo, preso intorno ad M, sta *tutto a sinistra*, o (rispettivamente) *tutto a destra* del piano osculatore. Ma quando le due curvature si annullano ad un tempo, anche in generale accade che v diventa infinitesima del quinto ordine, giacchè, se si deriva la (21), si trova facilmente, nelle ipotesi fatte,

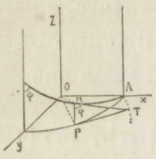
$$v = \frac{1}{120}\sum \alpha\, d^5x = -\frac{ds^3}{40} d\frac{1}{\rho} d\frac{1}{\tau}\,,$$

sicchè il piano osculatore attraversa la curva, come nei punti ordinarii; ed

www.rcin.org.pl

in questo caso il punto che si considera è un punto d'inflessione anche per le projezioni della curva sul piano rettificante e sul piano normale. Sono poi notevoli, fra i punti definiti dalla (20), quei punti M nei quali si annulla la sola flessione, perchè in essi avviene proprio l'opposto di ciò che si verifica nei punti ordinarii, vale a dire che *la curva attraversa tutti i piani che passano per* M, *tranne il piano osculatore*: ciò si deve al fatto che, mentre l'infinitesimo v diventa, come si è visto, del quarto ordine, w diventa del terzo, e però, come u, cambia segno insieme a ds. Ne segue che si ha un'inflessione per la projezione della curva, non sul piano rettificante, ma sul piano osculatore, e però son questi i punti che veramente corrispondono ai punti d'inflessione delle curve piane. Inoltre la projezione della curva sul piano normale in M, anche quando è nulla la sola torsione, presenta una cuspide, in M; ma questa è di prima specie (VI, 28) nel primo caso, e di seconda specie nel secondo. Più difficile è lo studio delle singolarità dovute all'annullarsi di ρ o di τ, non reggendo più, in simili punti, i precedenti sviluppi di u, v, w, giacchè le formole adoperate per ottenerli suppongono essenzialmente finite le curvature.

15. **Esercizii**: *a)* Consideriamo un'*elica circolare*, ossia una curva che incontra sotto un angolo costante φ le generatrici d'un cilindro circolare, di raggio r. Prendiamo come asse delle z l'asse del cilindro, e perpendicolarmente ad esso conduciamo, per un punto A della curva, l'asse delle x. Sia θ, per qualunque punto M dell'elica, l'angolo che la projezione di OM sul piano xy fa con l'asse x. Siccome, per definizione, c dev'essere costantemente uguale a $\cos\varphi$, bisogna che sia $z = s\cos\varphi$, fissando in A l'origine degli archi.



Le coordinate di M sono dunque $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = s\cos\varphi$. Ne segue, differenziando,

$$dx = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \quad , \quad dy = r\cos\theta\, d\theta \quad , \quad dz = \cos\varphi\, ds \;;$$

quindi, quadrando e sommando, $ds^2 = r^2 d\theta^2 + \cos^2\varphi\, ds^2$; poi, successivamente,

$$ds = \frac{r d\theta}{\mathrm{sen}\,\varphi} \quad , \quad s = \frac{r\theta}{\mathrm{sen}\,\varphi} \,.$$

Già la relazione $z = s\cos\varphi$ dimostra che, se T è il piede della tangente sul piano xy, il segmento MT è appunto uguale ad s; ed ora vediamo che, se P è la projezione di M sul detto piano, si ha $\mathrm{PT} = s\,\mathrm{sen}\,\varphi = r\theta =$ arco AP, e però, quando M si sposta lungo l'elica, T descrive una sviluppante di circolo. Intanto i coseni direttori della tangente all'elica sono

$$a = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad b = \mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \quad , \quad c = \cos\varphi \;,$$

d'onde si trae, derivando e ricordando la prima terna (11),

$$\frac{\lambda}{\rho} = -\frac{\mathrm{sen}^2\varphi\cos\theta}{r} \quad , \quad \frac{\mu}{\rho} = -\frac{\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} \quad , \quad \nu = 0 \;;$$

poi

$$\rho = \frac{r}{\mathrm{sen}^2\varphi} \quad , \quad \lambda = -\cos\theta \quad , \quad \mu = -\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \nu = 0 \,.$$

www.rcin.org.pl

Dunque le normali principali dell'elica incontrano ad angolo retto l'asse del cilindro. Inoltre si noti che *il raggio di flessione è costante.* I coseni direttori della binormale sono

$$\alpha = c\mu = -\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \beta = -c\lambda = \cos\varphi\cos\theta \quad , \quad \gamma = b\lambda - a\mu = -\operatorname{sen}\varphi \ ,$$

e basta derivare α o β, o pure uno dei coseni direttori della normale principale, per ottenere, ricordando le altre formole (11), il valore del raggio di torsione: $\tau = \dfrac{r}{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}$. Dunque, come si vede, anche *il raggio di torsione è costante.*

b) I calcoli precedenti si possono eseguire più generalmente (con r funzione di θ) per qualsivoglia *elica cilindrica*, cioè per quelle curve che, tracciate sopra un cilindro qualunque, ne incontrano le generatrici sotto un angolo costante φ. Invece di ripetere i calcoli vogliamo mostrare, andando per la via più breve, come si arriva a scoprire un'importante proprietà caratteristica di tali curve. Richiamiamo le formole

$$\frac{dc}{ds} = \frac{\nu}{\rho} \quad , \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\tau} \quad , \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{c}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau} \ ,$$

ed osserviamo che, nell'ipotesi di c costante, la prima formola dà $\nu = 0$, poi la seconda mostra che γ è costante. Ora, siccome si ha sempre $c^2 + \gamma^2 + \nu^2 = 1$, si può porre $\gamma = \cos(\varphi + {}^1/_2\pi) = -\operatorname{sen}\varphi$, se $c = \cos\varphi$, contando φ, nel piano rettificante, a partire dalla tangente, nel senso opposto a quello del moto degli indici d'un orologio per un osservatore posto sulla parte positiva della normale principale. Ciò premesso, la terza formola dà $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{r}{\rho}$, e però *il rapporto delle curvature è costante.* Inversamente, se ciò ha luogo, si conduca per ciascun punto M, nel piano rettificante, la retta definita dai coseni

$$l = a\cos\varphi - \alpha\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad m = b\cos\varphi - \beta\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad n = c\cos\varphi - \gamma\operatorname{sen}\varphi \ ,$$

dove l'angolo φ, costante, è definito dalla precedente uguaglianza. Si ha, in virtù delle (11),

$$\frac{dl}{ds} : \lambda = \frac{dm}{ds} : \mu = \frac{dn}{ds} : \nu = \frac{\cos\varphi}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\tau} = 0 \ ,$$

cioè l, m, n sono costanti, e però la curva è un'elica cilindrica, perchè è tracciata sopra un cilindro, e ne incontra le generatrici sotto l'angolo costante φ. Dunque, *perchè una curva sia un'elica cilindrica, occorre e basta che le sue curvature si mantengano in un rapporto costante.* Se poi le curvature si conservano entrambe costanti, l'elica è necessariamente circolare: essa è tracciata sopra un cilindro, il cui raggio è $\rho\tau^2 : (\rho^2 + \tau^2)$. Lasciamo al lettore la cura di dimostrare questo teorema, dovuto a Puiseux.

c) Si chiama poi *elica conica* ogni curva che incontra (obliquamente) sotto un angolo costante ψ le generatrici d'un cono. Quando il cono è circolare, l'elica incontra evidentemente sotto un angolo costante φ (tale che, chiamando χ l'inclinazione delle generatrici sull'asse, è $\cos\varphi = \cos\psi\cos\chi$) anche le generatrici del cilindro che la projetta ortogonalmente sopra un piano perpendicolare all'asse, ed è per conseguenza un'elica cilindrica, e si chiama, per questa ragione, *elica cilindro-conica*: essa è, per così dire, la spirale logaritmica dello spazio. L'asse

www.rcin.org.pl

ed il vertice del cono si prendano come asse delle z e come origine delle coordinate, e si chiami R la distanza di M dall'origine. Si deve avere

$$\cos\psi = \frac{x}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{R}\frac{dz}{ds} = \frac{dR}{ds} ;$$

e poichè, per ipotesi, non è $\cos\psi = 0$ (nel qual caso si avrebbe $R = costante$, e la curva apparterrebbe ad una sfera), si ha $R = s\cos\psi$, ponendo l'origine degli archi nel vertice del cono. D'altra parte $r = R\,\mathrm{sen}\,\chi$; dunque $r = ms\,\mathrm{sen}\,\psi$, dove per brevità si è posto $m = \cot\psi\,\mathrm{sen}\,\chi$. Intanto le coordinate d'un punto qualunque della curva sono $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = r\cot\chi$, e si ha

$$dr^2 = m^2\mathrm{sen}^2\psi(dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2) = \cos^2\psi\,dr^2 + m^2r^2\mathrm{sen}^2\psi\,d\theta^2 ,$$

d'onde si trae $dr = mr\,d\theta$, poi $\log r = m\theta + costante$. Dunque la sezione retta del cilindro, su cui la curva considerata è un'elica, è una spirale logaritmica. Ora, se si osserva che

$$\frac{dr}{ds} = m\,\mathrm{sen}\,\psi \quad , \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{mr}\frac{dr}{ds} = \frac{\mathrm{sen}\,\psi}{r} = \frac{1}{ms} ,$$

si trovano facilmente i coseni direttori della tangente

$$a = (m\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\psi \quad , \quad b = (m\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\psi \quad , \quad c = \cos\varphi ,$$

poi, derivando ancora, quelli della normale principale

$$\lambda = -(\cos\theta + m\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\psi}{ms} \quad , \quad \mu = -(\mathrm{sen}\,\theta - m\cos\theta)\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\psi}{ms} \quad , \quad \nu = 0 .$$

Dunque le normali principali sono perpendicolari all'asse del cono, ma non l'incontrano: esse *sono normali al cilindro, non al cono.* Quadrando e sommando le ultime formole, ed osservando che $1 + m^2 = \frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\mathrm{sen}^2\psi}$, si ottiene il valore di ρ, e se ne deduce poi subito quello di $\tau = \rho\,\mathrm{tg}\,\varphi$:

$$\rho = \frac{ms}{\mathrm{sen}\,\varphi} \quad , \quad \tau = \frac{ms}{\cos\varphi} .$$

Dunque *nell'elica cilindro-conica i raggi di curvatura sono proporzionali all'arco*, contato a partire dal vertice del cono. Si può dimostrare che, inversamente, se in una curva si ha $\rho = ks$, $\tau = k's$, essa è necessariamente un'elica cilindro-conica, tracciata sopra un cono circolare, in cui l'inclinazione χ delle generatrici sull'asse è definita da $\mathrm{tg}\,\chi = k' : \sqrt{k^2 + k'^2 + k^2k'^2}$.

d) Quando ad un piano, considerato come un velo flessibile ma inestendibile, si dà una qualsiasi forma cilindrica, tutte le rette, che hanno nel piano una certa direzione, diventano le generatrici del cilindro, ed ogni altra retta si cambia in un'elica, e non cessa di segnare sulla superficie il più breve cammino fra due qualunque dei suoi punti, sufficientemente vicini. Ciò si esprime dicendo che le eliche cilindriche sono le *geodetiche* dei rispettivi cilindri. Il concetto di geodetica verrà più oltre presentato sotto un altro aspetto, ed esteso ad una superficie qualunque; ma noi già possiamo ricercare quali sono le geodetiche delle superficie coniche, cioè in quali curve si cambiano le rette d'un piano inestendibile quando

www.rcin.org.pl

a questo si dà, per via di semplice flessione, la forma d'un cono. Si noti che tali curve non sono le eliche coniche, le quali provengono invece da quelle spirali logaritmiche, che hanno il polo nel vertice del cono. Ora, limitandoci al caso d'un cono circolare, se A è la projezione del vertice O sulla retta che si vuol considerare, se l è la lunghezza del segmento OA, ed R la distanza di O ad un punto qualunque M della retta, si ha $R^2 = s^2 + l^2$, ponendo in A l'origine degli archi. Chiamiamo inoltre φ l'angolo OMA, ossia, nello spazio, l'inclinazione della tangente sulla generatrice. È chiaro che

$$\frac{dR}{ds} = \cos\varphi = \frac{s}{R} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{l}{R} \quad , \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R} \; ;$$

e, poichè $ds^2 = dR^2 + r^2 d\theta^2$, si ha pure $\frac{d\theta}{ds} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}$, dove, essendo χ l'inclinazione delle generatrici sull'asse z (asse del cono), è $r = R\operatorname{sen}\chi$. Ciò premesso, la derivazione di $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cot\chi$ rispetto ad s fornisce i coseni direttori della tangente

$$a = -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\chi \; , \; b = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\chi \; , \; c = \cos\varphi\cos\chi \; ,$$

poi (derivando ancora) quelli della normale principale

$$\lambda = -\frac{\rho}{R}\operatorname{sen}^2\varphi\cot\chi\cos\chi\cos\theta \; , \; \mu = -\frac{\rho}{R}\operatorname{sen}^2\varphi\cot\chi\cos\chi\operatorname{sen}\theta \; , \; \nu = \frac{\rho}{R}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\chi \; ,$$

ossia

$$\lambda = -\cos\chi\cos\theta \quad , \quad \mu = -\cos\chi\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \nu = \operatorname{sen}\chi \; ,$$

dopo avere osservato (quadrando e sommando) che

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R}\cot\chi = \frac{l^2}{R^3}\cot\chi \; .$$

Dunque le normali principali sono perpendicolari alle generatrici, ed incontrano l'asse: esse *sono perpendicolari alla superficie del cono.* Inoltre *la flessione varia in ragione inversa del cubo del segmento staccato dalla curva sulla generatrice, a partire dal vertice.* I coseni direttori della binormale sono

$$\alpha = -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\chi \; , \; \beta = \cos\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\chi \; , \; \gamma = -\operatorname{sen}\varphi\cos\chi \; .$$

Basta derivare l'ultimo per trovare il valore della torsione:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{R}\cot\chi = \frac{ls}{R^3}\cot\chi \; .$$

Si noti la relazione $s\tau = l\rho$. Orbene si dimostra che questa è vera per le geodetiche di qualsivoglia superficie conica, ma non sussiste per altre curve. È in altri termini *proprietà caratteristica delle geodetiche dei coni il variare del rapporto delle curvature in ragione inversa dell'arco.*

e) Cerchiamo se può darsi che le normali principali d'una curva (M) siano normali principali di un'altra curva (M_1). A ciascun punto (x, y, z) della prima curva corrisponde, sull'altra, un punto M_1, le cui coordinate sono $x_1 = x + \lambda p$, $y_1 = y + \mu p$, $z_1 = z + \nu p$, se p è la distanza MM_1. Ai coseni direttori della tangente ad (M_1), in M_1, si deve poter dare la forma

$$a_1 = a\cos\psi - \alpha\operatorname{sen}\psi \quad , \quad b_1 = b\cos\psi - \beta\operatorname{sen}\psi \quad , \quad c_1 = c\cos\psi - \gamma\operatorname{sen}\psi \; ,$$

www.rcin.org.pl

chiamando ψ l'angolo di cui la tangente stessa, osservata da M, deve ruotare (nel senso inverso degli indici d'un orologio) per diventar parallela alla tangente, in M, ad (M). Intanto si ha

$$\frac{dx_1}{ds}=a-\left(\frac{a}{\rho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)p+\lambda\frac{dp}{ds}\ ,\ ecc.\ ;$$

quindi

$$\frac{dp}{ds}=0\ ,\quad 1-\frac{p}{\rho}=\frac{ds_1}{ds}\cos\psi\ ,\quad \frac{p}{\tau}=\frac{ds_1}{ds}\operatorname{sen}\psi\ , \tag{22}$$

e per conseguenza dev'essere

$$p=costante\ ,\quad \frac{1}{\rho}+\frac{\cot\psi}{\tau}=\frac{1}{p}\ . \tag{23}$$

Fin qui abbiamo soltanto espresso che le normali principali di (M) sono *normali* ad (M_1); ma perchè siano le normali *principali* bisogna ancora che si abbia

$$\frac{da_1}{ds_1}=\frac{\lambda}{\rho_1}\ ,\quad \frac{db_1}{ds_1}=\frac{\mu}{\rho_1}\ ,\quad \frac{dc_1}{ds_1}=\frac{\nu}{\rho_1}\ ,$$

vale a dire, osservando che

$$\frac{da_1}{ds}=\left(\frac{\cos\psi}{\rho}-\frac{\operatorname{sen}\psi}{\tau}\right)\lambda-(a\operatorname{sen}\psi+\alpha\cos\psi)\frac{d\psi}{ds}\ ,\ ecc.,$$

bisogna che sia

$$\frac{d\psi}{ds}=0\ ,\quad \frac{1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds}=\frac{\cos\psi}{\rho}-\frac{\operatorname{sen}\psi}{\tau}\ ; \tag{24}$$

quindi $\psi=costante$, e così vediamo che *i triedri fondamentali delle due curve sono rigidamente connessi fra loro.* Inoltre, in virtù di (23), *fra le curvature di* (M) *sussiste una relazione lineare, a coefficienti costanti.* Dunque (M) non è una curva qualunque: essa è una *curva di Bertrand*, nome che si dà ad ogni linea, le cui curvature sono vincolate da una relazione

$$\frac{p}{\rho}+\frac{q}{\tau}=1\ , \tag{25}$$

con p e q costanti. Si noti che, inversamente, data una simile linea, tutte le condizioni trovate innanzi sono soddisfatte, e però esiste una seconda linea, che ammette le stesse normali principali: le due curve determinano segmenti uguali a p sulle comuni normali principali, e le tangenti negli estremi di ciascun segmento fanno fra loro un angolo costante $\psi=\operatorname{arc\,tg}(p:q)$. Evidentemente la seconda linea è, come la prima, una curva di Bertrand, che soddisfa alla stessa (25), a parte il cambiamento di p in $-p$. Ciò permette di calcolare facilmente le curvature di (M_1), giacchè dalla terza formola (22) si ha $ds_1:ds=\sqrt{p^2+q^2}:\tau$, e però dev'essere anche $ds:ds_1=\sqrt{p^2+q^2}:\tau_1$. Ne segue $\tau\tau_1=p^2+q^2$, vale a dire che *le torsioni, in due punti che si corrispondono sulle due linee, formano un prodotto costante.* Poi, applicando la (25) alla curva (M_1),

$$\frac{p}{\rho_1}=\frac{q}{\tau_1}-1=\frac{q\tau}{p^2+q^2}-1=\frac{(p\tau+q\rho)q}{(p^2+q^2)\rho}-1=\frac{(q\tau-p\rho)p}{(p^2+q^2)\rho}\ ,$$

cioè

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{q\tau-p\rho}{(p^2+q^2)\rho}\ , \tag{26}$$

www.rcin.org.pl

come si può anche dedurre dalla seconda formola (24). Finalmente osserviamo che la risposta data alla questione proposta riesce illusoria quando $p=0$, ossia per le curve a torsione costante (non nulla) ed a flessione variabile, perchè allora (M_1) coincide con (M). Questa conclusione non vale per le curve a torsione nulla (curve piane), per le quali si ha infatti $\psi=0$, dimodochè le formole (22) e (24) forniscono soltanto i noti risultati

$$p=costante \quad , \quad \frac{ds_1}{ds}=1-\frac{p}{\rho} \quad , \quad \rho_1=\rho-p \ ,$$

relativi ai sistemi di curve parallele (VI, 41). E nemmeno vale quando è costante anche la flessione, perchè allora la condizione (25) è soddisfatta per infinite coppie di valori di p e q, vale a dire che *un'elica circolare si può in infiniti modi considerare come una curva di Bertrand.* Così le eliche circolari ci si presentano come *caratterizzate, fra le curve storte, dalla proprietà di avere,* come le curve piane, *le normali principali in comune con infinite altre linee.* Queste sono, naturalmente, eliche circolari, ed una, in particolare, deve ridursi ad una retta; essa corrisponde ai valori di p e q soddisfacenti alla (25) ed alla (26) per $\rho_1=\infty$, ossia $p=\frac{\rho r^2}{\rho^2+r^2}$, $q=\frac{r\rho^2}{\rho^2+r^2}$, ed è l'asse comune dei cilindri, sui quali son tracciate le eliche.

Contatti.

16. Terminiamo con pochi cenni intorno al contatto fra una curva ed una superficie, rinviando il lettore ad altri trattati *) per uno studio più accurato del contatto d'una curva con una superficie o con altre curve. Qui, per potere svolgere la teoria dei contatti con procedimento più rapido ed intuitivo, ci appoggeremo a certi risultati ottenuti precedentemente (VI, 35) nello studio del contatto fra curve piane, e diremo che una superficie ha con una curva data, in un punto M, un contatto dell'ordine n, se occupa la posizione limite d'una superficie passante per M e per altri n punti della curva, quando questi ultimi tendono ad M, senza che ciò avvenga per altri punti d'incontro. Se la superficie che si considera è di quelle che nello spazio a tre dimensioni sono determinate da $n+1$ punti (o, ciò che vale lo stesso, se appartiene ad una famiglia di superficie, rappresentata da una equazione che racchiude $n+1$ parametri arbitrarii) l'ordine del contatto non supera n, in generale, e quando raggiunge questo valore, la superficie dicesi *osculatrice* alla curva, nel punto considerato. Per esprimere che una superficie è osculatrice ad una data curva, in un dato punto, basta evidentemente differenziarne l'equazione tante volte quante sono necessarie per determinare i valori dei parametri, e scrivere che tutte le equazioni così ottenute sono soddisfatte dalle coordinate x, y, z del punto M e dai successivi differenziali delle coordinate stesse. In tal modo si viene infatti ad esprimere, usando il solito linguaggio convenzionale (§ 13), che la superficie contiene, oltre il punto M, gli n punti M′, M″,... infinitamente vicini ad M.

*) Vedi, per esempio, il « *Cours d'Analyse* » di Hermite (p. 116).

www.rcin.org.pl

17. **Piano osculatore.** L'equazione del piano $AX+BY+CZ+D=0$ contiene *tre* parametri veramente arbitrarii, cioè i rapporti di tre coefficienti ad un quarto non nullo. Esprimiamo che questa equazione, e le prime due che se ne deducono per differenziazione, o per derivazione rispetto all'arco s d'una curva, sono soddisfatte dalle coordinate x, y, z d'un punto M di questa curva:

$$Ax+By+Cz+D=0\ ,\quad Aa+Bb+Cc=0\ ,\quad A\lambda+B\mu+C\nu=0\ . \qquad (27)$$

Dalla prima condizione il piano è obbligato soltanto a passare per M; ma, se vi si aggiunge la seconda, il piano dovrà contenere la tangente in M. Dunque ogni piano che passa per la tangente si può ben chiamare *piano tangente*, in quanto ha con la curva un contatto generalmente del primo ordine, ossia la sua distanza ad un punto M', infinitamente vicino ad M, è infinitesima del secondo ordine rispetto ad MM'. Se poi si aggiunge la terza condizione, si obbliga il piano a contenere anche la normale principale, ossia a coincidere con quello che già precedentemente abbiamo chiamato *piano osculatore.* Il suo contatto con la curva è del secondo ordine, ma può accidentalmente riuscire d'un ordine superiore: allora il piano è surosculatore, o, come si suol dire, è un piano osculatore *stazionario.*

18. La surosculazione avviene, naturalmente, in punti singolari, caratterizzati dalla condizione a cui si giunge derivando ancora una volta l'ultima delle (27), ed eliminando A, B, C; ma, per essere sicuri di considerare tutti i casi possibili, conviene osservare che, in realtà, la condizione ottenuta derivando la seconda eguaglianza (27) è

$$(A\lambda+B\mu+C\nu)\frac{1}{\rho}=0\ , \qquad (28)$$

dimodochè si ha, tornando a derivare,

$$(A\lambda+B\mu+C\nu)\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}=(A\alpha+B\beta+C\gamma)\frac{1}{\rho\tau}\ . \qquad (29)$$

Ora, se non è $\frac{1}{\rho}=0$, dev'essere $\Sigma A\lambda=0$, e per conseguenza si può porre $A=\alpha, B=\beta, C=\gamma$; quindi la condizione (29) diventa $\frac{1}{\tau}=0$. Nel caso opposto l'eguaglianza (28) è vera qualunque siano A, B, C, e però tutti i piani tangenti hanno un contatto del secondo ordine con la curva; ma il nome di piano osculatore spetta a quello, fra essi, per cui è soddisfatta la condizione (29); e poichè questa, in generale, torna a prendere la forma $\Sigma A\lambda=0$, si ritrova il piano osculatore, con un contatto del terzo ordine almeno. Se poi si avesse anche $d\frac{1}{\rho}=0$ basterebbe derivare la condizione (29), una o più volte di seguito, per convincersi che si ritrova sempre il medesimo piano. Ben s'intende che, per la validità delle formole adoperate, le curvature si debbono supporre finite. Adunque *il piano osculatore stazionario si*

www.rcin.org.pl

presenta in quei punti della curva, nei quali è nulla almeno una delle curvature, cioè (§ 11) quando è soddisfatta la condizione (20).

19. **Sfera osculatrice.** Partendo dall'equazione generale d'una sfera

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2=\mathcal{R}^2\,,$$

(in cui $\xi,\eta,\zeta,\mathcal{R}$ sono quattro *costanti* da determinare convenientemente) troviamo, con successive derivazioni rispetto all'arco d'una curva qualunque, sostituendo alle coordinate correnti le coordinate x,y,z d'un punto M della curva stessa:

$$\left.\begin{aligned}(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2&=\mathcal{R}^2\\ a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)&=0\\ \lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)&=-\rho\\ \alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)&=\tau\frac{d\rho}{ds}\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

Dalle ultime tre equazioni si ricava

$$x-\xi=-\lambda\rho+\alpha\tau\frac{d\rho}{ds}\,,\quad y-\eta=-\mu\rho+\beta\tau\frac{d\rho}{ds}\,,\quad z-\zeta=-\nu\rho+\gamma\tau\frac{d\rho}{ds}\,,\qquad(31)$$

e si conoscono così i valori di ξ,η,ζ, coordinate del centro: sostituendoli nella prima equazione si ottiene, per esprimere il raggio, la formola

$$\mathcal{R}^2=\rho^2+\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)^2.\qquad(32)$$

La sfera così determinata è proprio quella che abbiamo incontrata in principio del § 13, giacchè le ultime tre condizioni (30) ci dicono che il suo centro sta nel piano normale, alle distanze ρ e $-\tau\frac{d\rho}{ds}$ dalla binormale e dalla normale principale. Ad essa tende la sfera MM'M''M''' quando M', M'', M''' tendono ad M. Evidentemente la circonferenza MM'M'' tende anch'essa a collocarsi sulla detta sfera; e poichè d'altra parte il suo piano tende ad osculare la curva, in M, è chiaro che *la circonferenza osculatrice è l'intersezione della sfera osculatrice col piano osculatore.* Dunque ρ è il raggio del circolo osculatore, dimodochè per le curve storte, come per le curve piane, *la flessione d'una linea qualunque è la curvatura della sua circonferenza osculatrice.* Ora, tornando alle condizioni (30), osserviamo che la prima obbliga la sfera a passare per M; la seconda a toccare la curva, in M; la terza a passare per la circonferenza osculatrice; e la quarta, fra le infinite sfere *toccate ed attraversate* dalla curva, in M, ne distingue una, che non attraversa la curva, perchè il suo contatto è generalmente del terzo ordine: è dessa la sfera osculatrice.

20. Per decidere se la curva, intorno ad M, è interna o esterna alla sfera osculatrice, si calcoli la distanza h di M' a tale sfera. Supposto finito

www.rcin.org.pl

il raggio $\mathcal{R}$, da

$$(\mathcal{R}+h)^2=(x-\xi+\delta x)^2+(y-\eta+\delta y)^2+(z-\zeta+\delta z)^2$$

si deduce, trascurando gli infinitesimi d'un ordine superiore al quarto,

$$\mathcal{R}h=\sum(x-\xi)\delta x+{}^1/_2\sum\delta x^2\ ;$$

e poichè, chiamando u, v, w come nel § 13, le coordinate di M′ rispetto al triedro fondamentale in M, si ha

$$\delta x=au+\alpha v+\lambda w\quad,\quad \delta y=bu+\beta v+\mu w\quad,\quad \delta z=cu+\gamma v+\nu w\ ,$$

si ha pure, ricordando le (31),

$$\mathcal{R}h=-w\rho+vr\frac{d\rho}{ds}+{}^1/_2(u^2+v^2+w^2)\ .$$

In questa formola si può, in virtù delle (19), trascurare v^2, limitare w^2 al suo primo termine, e calcolare u fino al termine del terzo ordine; ma v e w debbono essere calcolati fino ai termini del quarto ordine, e ciò si può fare agevolmente servendosi anche della formola (21):

$$v=\left(-1+\frac{d\rho}{2\rho}+\frac{dr}{4r}\right)\frac{ds^3}{6r\rho}\ ,\ w=\frac{ds^2}{2\rho}-\frac{ds^2\,d\rho}{6\rho^2}-\left(\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2+1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)\frac{ds^4}{24\rho^3}\ .$$

Ora, posto per brevità $\varkappa=\frac{\rho}{r}+\frac{d}{ds}\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)$, è facile trovare

$$\mathcal{R}h=\frac{\varkappa\,ds^4}{24r\rho}\ ; \tag{33}$$

e siccome, d'altra parte, la (32) dà, per differenziazione,

$$\mathcal{R}d\mathcal{R}=\varkappa r d\rho\ , \tag{34}$$

si ottiene finalmente

$$h=\frac{ds^4 d\mathcal{R}}{24r^2\rho d\rho}\ .$$

Dunque, esclusi i punti nei quali è $d\rho=0$, un arco convenientemente piccolo, preso intorno ad M, è tutto esterno o tutto interno alla sfera osculatrice in M, secondo che il volume di questa e l'area del circolo osculatore variano, o pur no, nello stesso senso.

21. Per trovare la condizione che dev'essere soddisfatta affinchè la sfera surosculi la curva, ossia per sapere in quali punti della curva il contatto fra questa e la sua sfera osculatrice va oltre il terzo ordine, basta derivare l'ultima delle (30), tenendo conto delle precedenti; ma, per non omettere alcun caso, bisogna tornare ad eseguire tutte le derivazioni, senza alterare la forma dei successivi risultati. Così facendo le ultime due condizioni ci si presentano sotto la forma

$$\frac{1}{\rho}\sum\lambda(x-\xi)=-1\quad,\quad \frac{1}{r\rho}\sum\alpha(x-\xi)=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\ ; \tag{35}$$

www.rcin.org.pl

poi, derivando ancora quest'ultima, si trova $\frac{\varkappa}{\tau\rho}=0$. Al medesimo risultato si giunge subito se si osserva che nella condizione trovata sta quanto occorre e basta, in virtù di (33), perchè h riesca d'un ordine superiore al quarto. Ora, esclusa l'ipotesi $\frac{1}{\rho}=0$ (perchè $\mathfrak{R}$ si suppone finito), ed esclusa anche (per la stessa ragione) l'ipotesi $\frac{1}{\tau}=0$ con $d\rho \gtrless 0$, si vede che *la sfera surosculatrice si presenta, oltrechè nei punti soddisfacenti alla condizione* $\varkappa=0$, *anche in altri punti*, caratterizzati dal fatto che la torsione vi si annulla, quantunque la sfera resti finita. In questi ultimi punti la seconda condizione (35) è soddisfatta identicamente, e per conseguenza accade che la curva ha un contatto del terzo ordine con tutte le sfere che passano per la circonferenza osculatrice; ma ad una sola di esse spetta il nome di sfera osculatrice, ed è sempre quella determinata in principio. Adunque la condizione $\varkappa=0$, sufficiente per la surosculazione, non è necessaria; ma in tutti i casi la (34) ci dice che, se non è $d\rho=0$, si ha $d\mathfrak{R}=0$. Ne segue, in particolare, che una curva attraversa la sua sfera osculatrice tutte le volte che questa diventa minima o massima, o pure quando stacca da un piano osculatore stazionario un circolo minimo o massimo; ed in questo secondo caso si verifica l'opposto di ciò che avviene ordinariamente, giacchè la curva non attraversa alcuna delle altre sfere contenenti la circonferenza osculatrice.

22. Ora si consideri una *curva sferica*, ossia una linea tracciata sopra una data sfera, di raggio R. È chiaro che non vi può essere, in ciascun punto, altra sfera osculatrice, anzi surosculatrice, se non la sfera stessa che contiene la curva. Dunque si deve costantemente avere $\varkappa=0$, o pure $d\rho=0$ ed $\frac{1}{\tau}=0$; e nel secondo caso si trova nuovamente $\varkappa=0$. Questa è dunque una condizione necessariamente soddisfatta lungo qualsiasi linea sferica. Per dimostrare che la condizione stessa è sufficiente perchè la linea appartenga ad una sfera, deriviamo le (31). Dalla prima si deduce

$$a-\frac{d\xi}{ds}=-\lambda\frac{d\rho}{ds}+\alpha\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)+\left(\frac{a}{\rho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\rho+\lambda\frac{d\rho}{ds}.$$

Dunque

$$\frac{d\xi}{ds}=-\varkappa\alpha\quad,\quad\frac{d\eta}{ds}=-\varkappa\beta\quad,\quad\frac{d\zeta}{ds}=-\varkappa\gamma\,. \tag{36}$$

Se si ha $\varkappa=0$ lungo tutta la curva, la (34) mostra che $\mathfrak{R}$ ha un valore costante R, e le (36) ci dicono che anche ξ,η,ζ sono costanti, d'onde segue che i punti della curva si trovano tutti alla distanza *costante* R dal punto *fisso* (ξ,η,ζ). Dunque *la condizione necessaria e sufficiente perchè una curva sia sferica è* $\frac{\rho}{\tau}+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)=0$.

23. Nel caso generale le formole (36) mostrano che *le tangenti al luogo dei centri delle sfere osculatrici d'una curva son parallele alle binormali nei*

www.rcin.org.pl

corrispondenti punti della curva. Inoltre, quadrando e sommando, si trova il differenziale dell'arco della seconda curva $d\sigma = -\varkappa ds$, e si vede che, quando un punto M percorre una curva, il centro della sfera osculatrice tende ad avvicinarsi al piano osculatore, in M, o tende ad allontanarsene, secondo che $\varkappa$ è positivo o negativo. Siccome i coseni direttori delle normali principali, in due punti corrispondenti delle due curve, sono proporzionali a $d\alpha, d\beta, d\gamma$, si vede che le dette normali sono fra loro parallele, e però anche le tangenti della prima curva sono parallele alle corrispondenti binormali della seconda curva, dimodochè questa è sempre osculata dai piani normali all'altra. Rappresentando con ρ_1 e τ_1 i suoi raggi di curvatura, e dirigendone le normali principali in senso opposto a quello delle normali principali della prima curva, si ha

$$\frac{\lambda}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = -\varkappa \frac{d\alpha}{d\sigma} = \varkappa \frac{\lambda}{\tau_1} \quad , \quad \frac{\lambda}{\tau} = \frac{d\alpha}{ds} = -\varkappa \frac{d\alpha}{d\sigma} = \varkappa \frac{\lambda}{\rho_1} .$$

Dunque $\rho_1 = \varkappa\tau$, $\tau_1 = \varkappa\rho$, cioè

$$\rho_1 = \rho + \tau \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right) \quad , \quad \tau\tau_1 = \rho\rho_1 .$$

Particolarmente notevoli sono i *circoli storti*, ossia le curve a flessione costante ($\rho = R$) ed a torsione non nulla, fra le quali vanno annoverate le eliche circolari (§ 15, *a*). Le sfere osculatrici d'un circolo storto son tutte uguali fra loro ($\mathcal{R} = \rho$), ed i loro centri stanno sopra un altro circolo storto ($\rho_1 = \rho$), che insieme al primo costituisce una particolare coppia di curve di Bertrand (§ 15, *e*). *Le sole curve osculate da infinite sfere uguali sono i circoli storti*, perchè, in virtù di (34), se ρ non è costante, non può essere costante $\mathcal{R}$ senza che sia $\varkappa = 0$, nel qual caso, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, le sfere osculatrici coincidono in una, che contiene tutta la curva.

VIII. APPLICAZIONI ALLE SUPERFICIE.

Prime nozioni.

1. **Piano tangente.** Alle infinite linee che si possono tracciare, per un punto M, sopra una superficie, conduciamo, in M, le tangenti: queste si dicono anche *tangenti alla superficie.* Una qualunque delle dette linee si può rappresentare aggregando all'equazione $f(X, Y, Z) = 0$ della superficie data un'altra equazione $\varphi(X, Y, Z) = 0$, distinta dalla prima. Altrove (VII, 1) si è visto che le equazioni della tangente alla curva considerata sono

$$\sum (X - x) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \sum (X - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 .$$

www.rcin.org.pl

Siccome la prima rimane invariata qualunque sia la curva che passa per M, sulla superficie, si vede che *tutte le tangenti in* M *stanno in un piano.* Questo si chiama il *piano tangente* alla superficie nel punto M, e la perpendicolare ad esso, condotta per M, è la *normale* alla superficie. Adunque il piano tangente è rappresentato dall'equazione

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0\ , \qquad (1)$$

e la normale dalle equazioni

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}\ .$$

I coseni direttori della normale sono dunque

$$\mathsf{L}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad \mathsf{M}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\quad \mathsf{N}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial z}\ ,$$

o, se si vuole, in funzione di $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$\mathsf{L}=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad \mathsf{M}=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad \mathsf{N}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ .$$

Quando si fa uso di queste p e q, l'equazione del piano tangente prende la forma più semplice

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)\ . \qquad (2)$$

Se ci riferiamo a cose dette precedentemente (V, 18) vediamo che la normale alla superficie $f=0$, in un punto M, è precisamente la retta secondo la quale più rapidamente tende a variare la funzione f, mentre secondo le tangenti la funzione tende a conservarsi costante; essa ha, infatti, nei punti M′ del piano tangente, infinitamente vicini ad M, valori infinitesimi del secondo ordine rispetto ad MM′.

2. È anche utile saper calcolare $\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ nel caso che la superficie sia data mediante le equazioni

$$x=\varphi(u,v)\ ,\quad y=\chi(u,v)\ ,\quad z=\psi(u,v)\ ,$$

con u e v che variano indipendentemente l'uno dall'altro. Perchè queste tre equazioni rappresentino una superficie, occorre e basta che due delle tre funzioni x, y, z siano indipendenti, e per conseguenza (V, 29) che nella matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

www.rcin.org.pl

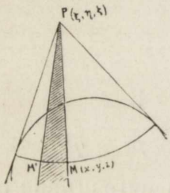
non siano tutti nulli i minori del secondo ordine. Ciò premesso, quando v si mantiene costante, le equazioni precedenti definiscono una curva della superficie, e $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ sono proporzionali ai coseni direttori della tangente alla detta curva, nel punto considerato, mentre $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ sono invece proporzionali ai coseni direttori della tangente alla curva che si ottiene mantenendo costante u, e lasciando variare la sola v. Dalle condizioni di perpendicolarità

$$\sum \mathsf{L} \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum \mathsf{L} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

si può, ora, dedurre

$$\mathsf{L} : \mathsf{M} : \mathsf{N} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} .$$

3. Cerchiamo, come esercizio, l'equazione di quel *cono circoscritto* alla superficie $f(X,Y,Z)=0$, che ha il vertice in un punto P, di coordinate ξ, η, ζ, ossia del cono formato da tutte le tangenti condotte da P alla superficie. Si esprime che il punto M, di coordinate x, y, z, appartiene alla superficie, e che il piano tangente in M passa per P, scrivendo



$$f(x,y,z)=0 \ , \ (\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ . \quad (3)$$

Queste uguaglianze, se vi si considerano x, y, z come coordinate correnti, sono le equazioni della *curva di contatto* del cono con la superficie; e così, nelle applicazioni, si può determinare il *contorno apparente* d'una superficie, per un osservatore posto in P, cioè la linea che separa la parte della superficie, visibile da P, dalla parte invisibile; o, anche, la *linea di separazione fra ombra e luce* quando la superficie si trova immersa in un fascio di raggi provenienti dall'unico punto luminoso P. Se poi si vuol determinare l'*ombra portata* sopra un'altra superficie, all'equazione di questa bisogna aggregare l'equazione del cono circoscritto per trovare il contorno dell'ombra; e per avere l'equazione del cono basta eliminare x, y, z fra le (3) e le equazioni della generatrice PM:

$$\frac{X-\xi}{x-\xi} = \frac{Y-\eta}{y-\eta} = \frac{Z-\zeta}{z-\zeta} .$$

In particolare, immaginando P infinitamente lontano, l'eliminazione di x, y, z fra le equazioni

$$f(x,y,z)=0 \quad , \quad A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}$$

fornirà l'equazione del *cilindro circoscritto* alla superficie, parallelamente ad una data direzione (A, B, C). Tornando al caso generale, notiamo che l'eliminazione si può eseguire in forma molto semplice se si considera la funzione

$$F(t) = f(\xi + t(X-\xi), \eta + t(Y-\eta), \zeta + t(Z-\zeta)) \ ,$$

e si osserva che la seconda uguaglianza (3) diventa $F'(t)=0$, d'onde si vede che *l'equazione del cono circoscritto risulta dall'eliminazione di* t *fra* $F(t)=0$ *ed* $F'(t)=0$.

www.rcin.org.pl

4. **Singolarità.** In ciò che precede è implicita la supposizione che le derivate parziali prime di f non siano tutte nulle nel punto M, altrimenti l'equazione (1) sarebbe illusoria. Quando invece si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}=0 \; , \tag{4}$$

il punto M è un *punto singolare*, in quanto che le tangenti, in M, alla superficie, invece di stare in un piano, formano un cono: ciò si può subito riconoscere scrivendo l'equazione della superficie, per i punti (X, Y, Z) infinitamente vicini ad M, sotto la forma (III, 10)

$$\Sigma(\mathrm{X}-x)\frac{\partial f}{\partial x}+{}^1/_2\left((\mathrm{X}-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cdots+2(\mathrm{X}-x)(\mathrm{Y}-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cdots\right)+\cdots=0 \; .$$

Se i valori di $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, calcolati in M, non sono tutti nulli, si vede, trascurando gli infinitesimi superiori, che intorno ad M la superficie si comporta come il *piano* (3), e si ritrova così più rapidamente l'equazione del piano tangente. Se, invece, le coordinate di M soddisfano alle (4), i punti infinitamente vicini ad M, sulla superficie, si possono considerare, a prescindere da infinitesimi d'un ordine superiore al secondo, come situati sul *cono quadrico*

$$(\mathrm{X}-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(\mathrm{Y}-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\cdots+2(\mathrm{X}-x)(\mathrm{Y}-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cdots=0 \; ;$$

e così via. La ricerca di questi punti singolari d'una superficie (detti anche *punti conici*, o *doppii*, *tripli*, ecc.) si fa dunque con un procedimento del tutto simile a quello che si è tenuto per le curve piane (VI, 27), e l'indole della singolarità si riconosce mediante sezioni piane nella superficie, infinitamente vicine al punto che si considera. Si noti che nelle superficie i punti singolari possono anche, succedendosi con continuità, formare *linee singolari*: così, projettando una curva piana da un punto, preso fuori del suo piano, si ottiene un cono, che ammette come linee multiple tutte quelle generatrici che passano nei punti multipli della curva considerata; ed anche sono linee multiple d'una superficie di rotazione tutti i paralleli generati dai punti multipli del meridiano; *ecc.* Altre singolarità, analoghe alle inflessioni delle curve piane, ci si presenteranno fra breve.

5. **Rette osculatrici.** Tornando ai punti ordinarii proponiamoci di studiare il modo di comportarsi della superficie intorno ad uno di essi, M. Presa l'equazione del piano tangente sotto la forma (2), si calcoli la distanza di questo piano ad un punto qualunque M′, infinitamente vicino ad M sulla superficie; se $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$ sono le coordinate di M′, la distanza di cui si tratta è

$$h=\frac{\delta z-p\,\delta x-q\,\delta y}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; .$$

www.rcin.org.pl

Intanto si ha

$$\delta z = p\delta x + q\delta y + {}^1/_2(r\delta x^2 + 2s\delta x\delta y + t\delta y^2) + \cdots,$$

dove p, q, r, s, t hanno il solito significato (V, 16), e s'intendono calcolati in M. Dunque, trascurando gli infinitesimi d'un ordine superiore al secondo,

$$h = \frac{r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2}{2\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \qquad (5)$$

Ogni coppia di valori di dx e dy, insieme al corrispondente $dz = p dx + q dy$, definisce la direzione d'una retta, tangente ad infinite curve che passano per M, sulla superficie; e si può sempre immaginare che M′ appartenga ad una qualunque di queste curve. Basta poi far girare la tangente intorno ad M, nel piano tangente, perchè M′ possa occupare qualunque posizione in un pezzo ς di superficie, convenientemente piccolo, circostante ad M. Quando la tangente compie un giro, due volte accade che h diventa d'un ordine superiore al secondo, cioè nelle due posizioni per le quali si annulla il numeratore dell'espressione (5). Così, fra le infinite tangenti, si è condotti a distinguerne due, che si chiamano *rette osculatrici*, perchè, fra tutte le rette che passano per M, son quelle che più si accostano alla superficie. Tali rette possono essere immaginarie, o reali e distinte, secondo che $rt - s^2$ è positivo o negativo. Nel primo caso il punto M si dice *ellittico*, ed *iperbolico* nel secondo. Per $rt - s^2 = 0$ si presenta una singolarità: le due rette osculatrici si confondono in una, ed il punto si dice *parabolico*. Quando M è un punto ellittico, h conserva un segno invariato, e però ς *sta tutto da una parte del piano tangente*, dimodochè si può dire che, nella curva d'intersezione della superficie col suo piano tangente, M è un punto isolato. Invece, se M è un punto iperbolico, le rette osculatrici, reali, determinano sul piano tangente due regioni, per una delle quali h è positivo, mentre per l'altra è negativo, e però ς *è attraversato dal piano tangente*. Inoltre, se M′ sta in questo piano, o, più generalmente, se appartiene ad una curva osculata, in M, dal piano stesso, la distanza h è nulla o infinitesima almeno del terzo ordine, e però deve annullarsi il numeratore dell'espressione (5). Dunque le rette osculatrici sono tangenti a tutte le curve della superficie, che nel punto M ammettono come piano osculatore il piano tangente; ed in particolare l'intersezione della superficie col piano tangente ha due rami che passano per M tangenzialmente alle rette osculatrici, vale a dire che, su tale intersezione, M è un punto doppio. Inversamente, tutte le volte che una curva della superficie tocca una retta osculatrice, h diventa d'un ordine superiore al secondo, e però la curva è osculata dal piano tangente, o pure (VII, 14) la sua flessione è nulla. Finalmente osserviamo che, se la funzione $rt - s^2$ è continua, i punti ellittici ed i punti iperbolici sono raccolti in analoghe regioni della superficie, confinanti fra loro per mezzo di linee, costituite dai punti parabolici: questi si trovano (*cfr.* VI, 24) all'intersezione della superficie data con la superficie $rt - s^2 = 0$.

www.rcin.org.pl

6. **Indicatrice di Dupin.** Per vedere più da vicino ciò che accade intorno alle due specie di punti, poniamo l'origine in M, e dirigiamo l'asse delle z normalmente alla superficie: ciò non altera il segno di $rt-s^2$, poichè si è visto che questo segno caratterizza fatti geometrici, indipendenti dalla scelta degli assi. In questo caso è $p=0, q=0$, ed intorno ad M la superficie si comporta come il paraboloide $z={}^1/_2(rx^2+2sxy+ty^2)$, ellittico o iperbolico secondo che $rt-s^2>0$, o $rt-s^2<0$. Le rette osculatrici sono appunto quelle due generatrici rettilinee del paraboloide, immaginarie o reali, che stanno nel piano $z=0$. Se poi è $rt-s^2=0$, M è un punto parabolico, intorno al quale la superficie si comporta come un cilindro parabolico. Ora tagliamo la superficie con due piani $z=\pm l$, paralleli ed infinitamente vicini al piano tangente. L'equazione della sezione è

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm 2l\ ,$$

e rappresenta una coppia di ellissi, una reale e l'altra immaginaria, o pure una coppia di iperboli complementari, secondo che il punto M è ellittico o iperbolico. Projettata la sezione sul piano tangente, immaginiamo che si dilati intorno al centro finchè la sua equazione diventi $rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1$. La *parte reale* di questa coppia di coniche si chiama *indicatrice di Dupin*: essa è incontrata da ogni diametro in due punti reali, ed ammette come assintoti, immaginarii o reali, le rette osculatrici.

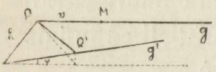
7. **Linee notevoli.** Fra le linee che si possono tracciare sopra una superficie sono particolarmente notevoli le *linee assintotiche*, cioè quelle che in ogni loro punto toccano una retta osculatrice. Un'assintotica si può immaginare generata da un punto M, il quale prenda a spostarsi lungo una simile retta, fino ad M′, per muoversi poi lungo la retta analoga, che passa per M′, fino ad M″; *ecc.* Se invece di spostarsi successivamente lungo le rette osculatrici, cioè tangenzialmente agli *assintoti* dell'indicatrice di Dupin, il punto si muove sempre tangenzialmente agli *assi* dell'indicatrice stessa, la linea così generata si chiama *linea di curvatura*. Ogni superficie è dunque coperta da un doppio sistema di linee di curvatura, sempre reali, e tali che per ogni punto della superficie passano, tagliandosi ad angolo retto, una linea d'un sistema ed una dell'altro sistema. Passano anche, per ogni punto iperbolico, due assintotiche egualmente inclinate su ciascuna linea di curvatura, e generalmente oblique fra loro. Per un'osservazione fatta nel § 5, i piani osculatori d'una linea assintotica sono i piani che toccano la superficie lungo la linea stessa, a meno che non sia costantemente $\frac{1}{\rho}=0$, nel qual caso (VII, 10) la linea è retta, e si può sempre considerare come osculata dai piani tangenti. Dunque le assintotiche *hanno, in ciascuno dei loro punti, la normale principale situata nel piano tangente alla superficie.* Invece passano per ogni punto d'una superficie infinite linee, dette *linee geodetiche*, le quali *hanno come normale principale la normale alla*

www.rcin.org.pl

superficie. In seguito si vedrà che il più breve cammino fra due punti (non troppo lontani) d'una superficie è segnato appunto dall'arco di geodetica che li congiunge. Evidentemente una retta è geodetica ed assintotica su qualunque superficie, giacchè ognuna delle sue normali si può sempre considerare come normale principale.

Superficie rigate.

8. Quando una retta si muove nello spazio, occupando successivamente una semplice infinità di posizioni, essa genera una *superficie rigata.* Fissata



la retta in una posizione g, se ne consideri un'altra g′, che si farà poi tendere a g. La comune perpendicolare a g e g′ incontra g in un punto, mobile insieme a g′, il quale può tendere ad una posizione limite Q quando g′ tende a g. Il punto Q si chiama *punto centrale* della generatrice. Se, rispetto all'arco infinitesimo QQ′ del luogo dei punti centrali, la distanza h delle corrispondenti generatrici è del primo ordine, come avviene in generale, la superficie si dice *gobba*, e la curva (Q) è la sua *linea di stringimento.* Nel caso contrario la superficie si chiama *sviluppabile*, e (Q) è il suo *spigolo di regresso.*

9. Siano a, b, c i coseni direttori di g, ed x, y, z le coordinate d'un punto qualunque di questa retta. Si sa dalla Geometria analitica che l'angolo φ di g con g′ è dato dalla formola $\operatorname{sen}^2\varphi = \Sigma(b\delta c - c\delta b)^2$, in cui col segno δ si distinguono le variazioni subìte dalle varie quantità nel passaggio da g a g′. Siccome h è la projezione, sulla comune perpendicolare a g e g′, del segmento rettilineo che va dal punto (x, y, z) al punto $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, e poichè i coseni direttori della comune perpendicolare sono proporzionali a $b\delta c - c\delta b$, $c\delta a - a\delta c$, $a\delta b - b\delta a$, è chiaro che si ha

$$h = \sum \frac{b\delta c - c\delta b}{\operatorname{sen}\varphi}\delta x = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\begin{vmatrix} a & \delta a & \delta x \\ b & \delta b & \delta y \\ c & \delta c & \delta z \end{vmatrix},$$

o, in forma più concisa, $h \operatorname{sen}\varphi = [a, \delta a, \delta x]$. Ne segue, omettendo nei due membri gli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo,

$$h\varphi = [a, da, dx] + {}^1/_2[a, da, d^2x] + {}^1/_2[a, d^2a, dx] + \dots .$$

Perchè h sia d'un ordine superiore al primo occorre e basta che si abbia $[a, da, dx] = 0$. Questa è dunque la *condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie considerata sia sviluppabile*; ed importa notare che tale condizione sussiste intatta quando a, b, c non sono proprio i coseni direttori, ma quantità proporzionali ai coseni stessi. Ora si osservi che, quando è soddisfatta la detta condizione, spariscono dall'espressione di $h\varphi$ anche i termini del terzo ordine, perchè

$$[a, da, d^2x] + [a, d^2a, dx] = d[a, da, dx] .$$

www.rcin.org.pl

Dunque *in una superficie sviluppabile la distanza di due generatrici infinitamente vicine è infinitesima almeno del terzo ordine* rispetto al corrispondente arco dello spigolo di regresso.

10. Ciò premesso, la teoria delle curve storte ci fornisce subito un esempio di superficie sviluppabile. È infatti evidente che il luogo delle tangenti ad una curva storta è una superficie sviluppabile, che ammette come spigolo di regresso la curva considerata, perchè, se (x, y, z) è un punto della curva, gli elementi della terza colonna, nel determinante $[a, da, dx]$, sono proporzionali (VII, 1) a quelli della prima. Inversamente, se $[a, da, dx] = 0$, ai punti (x, y, z) se ne possono sostituire, se occorre, altri $(x+at, y+bt, z+ct)$, tali che le tangenti al luogo di questi punti siano le generatrici della superficie, per la qual cosa basta che i differenziali delle coordinate siano proporzionali ad a, b, c, e per conseguenza che si possa determinare t in modo che

$$\frac{dx + t\,da}{a} = \frac{dy + t\,db}{b} = \frac{dz + t\,dc}{c}.$$

Ora, la condizione perchè queste equazioni siano fra loro compatibili è appunto $[a, da, dx] = 0$. Dunque *ogni superficie sviluppabile si può considerare come il luogo delle tangenti ad una curva storta.* Di questa proprietà possiamo anche renderci conto osservando che, se per g si conduce il piano parallelo a g′, la distanza di Q′ al detto piano è h; e poichè tale distanza è del terzo ordine, in generale accade che il piano così costruito è appunto quello che oscula lo spigolo di regresso nel punto Q. Per dimostrare poi che g è la tangente allo spigolo stesso basta far vedere che la distanza a g della projezione di Q′ sul piano osculatore è d'un ordine superiore al primo; e siccome questa distanza è uguale al prodotto di QQ′ per un angolo infinitesimo, il teorema è dimostrato.

11. Ora supponiamo che x, y, z siano le coordinate del punto centrale Q, e cerchiamo di determinare il piano tangente in un punto qualunque M d'una superficie sviluppabile. La generatrice g sarà determinata dalle coordinate x, y, z, e dai proprii coseni direttori, e queste quantità dipendono tutte da una sola variabile u, che può essere l'*arco* dello spigolo di regresso o della linea di stringimento, computato a partire da un'origine A, arbitrariamente fissata sulla curva. Un punto M sarà poi determinato, sulla corrispondente generatrice, dalla sua distanza v al punto centrale. Così le coordinate di M dipendono dai parametri u e v nel seguente modo:

$$X = x + av \quad , \quad Y = y + bv \quad , \quad Z = z + cv \, .$$

Inoltre

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{dx}{du} + v\frac{da}{du}, \; ecc. \; ; \quad \frac{\partial X}{\partial v} = a \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = b \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = c \, . \qquad (6)$$

Se la superficie è sviluppabile, si ha $\frac{dx}{du} = a$, $\frac{da}{du} = \frac{\lambda}{\rho}$, *ecc.*, e le ultime for-

www.rcin.org.pl

mole diventano

$$\frac{\partial X}{\partial u}=a+\frac{\lambda v}{\rho}\ ,\quad \frac{\partial Y}{\partial u}=b+\frac{\mu v}{\rho}\ ,\quad \frac{\partial Z}{\partial u}=c+\frac{\nu v}{\rho}\ ;$$

quindi (§ 2) i coseni direttori $\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ della normale alla superficie, nel punto M, sono proporzionali ai determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

cioè ai coseni direttori α, β, γ della binormale. Come si vede $\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ sono indipendenti da v. Dunque *il piano tangente in un punto d'una superficie sviluppabile tocca la superficie lungo tutta la generatrice.*

12. Nel caso d'una rigata gobba $\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ sono proporzionali alle quantità

$$b(dz+vdc)-c(dy+vdb)=(bdz-cdy)+v(bdc-cdb)\ ,\ ecc.$$

Intanto si ha, continuando a chiamare α, β, γ i coseni direttori della comune perpendicolare a g e g′,

$$\frac{\alpha}{bdc-cdb}=\frac{\beta}{cda-adc}=\frac{\gamma}{adb-bda}=\frac{1}{\varphi}\ ;$$

ed analogamente, se λ, μ, ν sono i coseni direttori della perpendicolare comune alla retta g ed a QQ′,

$$\frac{\lambda}{bdz-cdy}=\frac{\mu}{cdx-adz}=\frac{\nu}{ady-bdx}=\frac{1}{h}\ .$$

Dunque, posto $h=R\varphi$, i coseni $\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ sono proporzionali alle quantità $\lambda+\frac{v}{R}\alpha, \mu+\frac{v}{R}\beta, \nu+\frac{v}{R}\gamma$, e per $v=0$ coincidono con λ, μ, ν. Le normali corrispondenti ai valori 0 e v del parametro v fanno dunque fra loro un angolo ψ, definito da ciascuna delle uguaglianze

$$\cos\psi=\mathsf{L}\lambda+\mathsf{M}\mu+\mathsf{N}\nu\ ,\quad \operatorname{sen}\psi=\mathsf{L}\alpha+\mathsf{M}\beta+\mathsf{N}\gamma\ .$$

In virtù della prima si ha

$$\mathsf{L}=\left(\lambda+\frac{v}{R}\alpha\right)\cos\psi\ ,\quad \mathsf{M}=\left(\mu+\frac{v}{R}\beta\right)\cos\psi\ ,\quad \mathsf{N}=\left(\nu+\frac{v}{R}\gamma\right)\cos\psi\ ;$$

poi, moltiplicando per α, β, γ e sommando, si ottiene $\operatorname{sen}\psi=\frac{v}{R}\cos\psi$, cioè

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{v}{R}\ .$$

Questa formola, dovuta a Chasles, mostra che, quando il punto di contatto, partendo dalla linea di stringimento, percorre una generatrice, il piano tangente alla superficie ruota d'un angolo, la cui tangente trigonometrica è proporzionale al cammino percorso dal punto. Si noti che, per conoscere gli

www.rcin.org.pl

infiniti piani tangenti ad una rigata gobba, lungo una data generatrice, basta conoscere il valore di R, che per questa ragione si chiama il *parametro distributore* dei piani tangenti. Per interpretare geometricamente il teorema di Chasles assumiamo come assi delle x e delle y la generatrice g e la comune perpendicolare a g e g'. Le equazioni della normale alla superficie nel punto M sono $x = v$, $y = z \operatorname{tg} \psi$, e però la formola di Chasles diventa $xz = \mathrm{R}y$. Dunque *le normali ad una rigata gobba, lungo una generatrice, formano un paraboloide iperbolico.*

13. Torniamo alle sviluppabili per osservare che, se la curva (M) incontra ad angolo retto le generatrici, ossia, come si suol dire, se (M) è una *trajettoria ortogonale* delle generatrici, è soddisfatta la condizione di ortogonalità $\Sigma a dX = 0$. Intanto, poichè in virtù delle (6) si ha

$$dX = \left(a + \frac{\lambda v}{\rho}\right) du + a\,dv \ , \ ecc.$$

è $\Sigma a dX = d(u+v)$, e però la predetta condizione equivale a dire che $u+v$ è costante, cioè *arco* AQ + QM = *costante.* Ne segue che due trajettorie ortogonali qualunque intercettano, sulle infinite generatrici, segmenti uguali all'arco che staccano dallo spigolo di regresso, e che se un filo inestendibile, fissato in un punto A, e teso sul detto spigolo, si svolge scostandosi da questo gradualmente, e mantenendosi sempre teso nello spazio, ciascuno dei suoi punti descrive una trajettoria ortogonale (M). È per tale ragione che alle (M) si dà anche il nome di *sviluppanti* dello spigolo di regresso: questo è, del resto, una curva qualunque.

14. Inversamente questa curva si chiama *sviluppata* di ciascuna (M), perchè (come nelle curve piane) *le sue tangenti sono normali* ad ogni curva (M). Riferiamoci al triedro fondamentale d'una di queste curve, e cerchiamo a quale condizione deve soddisfare una normale per poter generare una superficie sviluppabile. Se la normale che si vuol considerare fa l'angolo φ con la normale principale, la sua direzione è definita dai coseni

$$l = \alpha \operatorname{sen} \varphi + \lambda \cos \varphi \quad , \quad m = \beta \operatorname{sen} \varphi + \mu \cos \varphi \quad , \quad n = \gamma \operatorname{sen} \varphi + \nu \cos \varphi \ .$$

Invece

$$l' = \alpha \cos \varphi - \lambda \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad m' = \beta \cos \varphi - \mu \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad n' = \gamma \cos \varphi - \nu \operatorname{sen} \varphi$$

sono i coseni direttori d'una seconda normale che, insieme alla prima ed alla tangente, costituisce una terna ortogonale, dimodochè

$$\begin{vmatrix} a & l' & l \\ b & m' & m \\ c & n' & n \end{vmatrix} = 1 \ .$$

Ciò premesso, si è visto che la condizione $[l, dl, a] = 0$ è necessaria e suffi-

www.rcin.org.pl

ciente perchè la prima normale generi una sviluppabile. Or poichè per le formole di Frenet (VII, 7) si ha

$$dl = l'(d\varphi - \eta) - a\varepsilon \cos\varphi \ , \ ecc.,$$

il determinante che precede diventa $[l, l', a](d\varphi - \eta) = \eta - d\varphi$, e però la condizione cercata è

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varkappa} \, . \tag{7}$$

Il significato geometrico di questa condizione si scopre calcolando la rotazione ω, verso la normale principale, della normale considerata. È noto (VII, 8) che

$$\omega \operatorname{sen}\varphi = \sum \lambda dl = (d\varphi - \eta) \sum \lambda l' = (\eta - d\varphi) \operatorname{sen}\varphi \ ;$$

quindi $\omega = \eta - d\varphi$, risultato evidente. La condizione $\omega = 0$ significa dunque che, nel moto d'un punto lungo una curva, ogni normale che ruota nel piano normale (in cui si suppone fissata la normale principale) *in modo da spostarsi nello spazio perpendicolarmente al piano stesso*, genera una superficie sviluppabile.

15. Dimostriamo, per finire, due proposizioni, che possono immediatamente dedursi dalle precedenti:

a) In virtù dell'ultima osservazione, lo spostamento della generatrice avviene in modo che il piano osculatore dello spigolo di regresso è sempre perpendicolare al piano normale di (M), d'onde segue che questo è anche il piano rettificante del predetto spigolo. In altri termini *il piano normale della sviluppante coincide col piano rettificante della sviluppata*;

b) Trovata una funzione φ, che soddisfa alla (7), se ne ottengono infinite altre mercè l'addizione d'una costante arbitraria. Ne segue che, *se si fanno ruotare d'uno stesso angolo arbitrario le generatrici d'una sviluppabile, intorno ad una loro trajettoria ortogonale, esse non cessano di costituire una superficie sviluppabile.* Gli spigoli di regresso di tutte queste sviluppabili sono appunto le infinite sviluppate della trajettoria considerata.

Inviluppi.

16. Si consideri il sistema di superficie, rappresentato dalla equazione $f(x,y,z,a) = 0$ per gli infiniti valori del parametro a. Una qualunque di esse, individuata da un particolare valore a del parametro, è incontrata da un'altra, individuata dal valore $a + h$, secondo una certa curva, la quale può tendere ad occupare, sulla prima superficie, una posizione limite, quando h tende a zero. In questa posizione essa si chiama *caratteristica* della corrispondente superficie, nel sistema considerato; ed il luogo delle caratteristiche di tutte le superficie del sistema si chiama *inviluppo* delle superficie stesse. Mediante considerazioni analoghe a quelle (VI, 38) che sono state

www.rcin.org.pl

fatte nel piano, si dimostra subito che *l'equazione dell'inviluppo si ottiene eliminando* a *fra le equazioni* $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$. Ed è anche facile dimostrare che *ogni superficie del sistema è toccata dalla superficie inviluppante lungo la propria caratteristica.* Basta infatti osservare che l'equazione dell'inviluppo è l'equazione stessa del sistema di superficie, in cui si pensa a come funzione delle coordinate, soddisfacente a $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, e che le derivate parziali prime del primo membro della detta equazione sono, per conseguenza,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}\ ,$$

sono cioè appunto uguali a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

17. Supponiamo, per esempio, che si abbia una semplice infinità di piani. La caratteristica di ciascun piano è necessariamente una retta; l'inviluppo è dunque una superficie rigata, e siccome, per l'ultimo teorema, questa superficie dev'essere toccata da un unico piano lungo ciascuna generatrice, essa è sviluppabile. Reciprocamente, per quanto si è visto nel § 11, ogni superficie sviluppabile è l'inviluppo della semplice infinità dei piani osculatori d'una certa curva. Partendo da ciò è facile scoprire un importante carattere analitico delle superficie sviluppabili. L'equazione d'un piano tangente ad una superficie qualunque è

$$Z=pX+qY+(z-px-qy)\ .$$

Perchè la superficie sia sviluppabile occorre e basta che $p, q, z-px-qy$, *dipendano da un sol parametro*, per la qual cosa è necessario e sufficiente (V, 29) che la matrice jacobiana di queste tre funzioni abbia nulli tutti i suoi minori del secondo ordine. Siccome si ha

$$\frac{\partial p}{\partial x}=r\ ,\quad \frac{\partial q}{\partial x}=s\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x}(z-px-qy)=-(rx+sy)\ ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=s\ ,\quad \frac{\partial q}{\partial y}=t\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}(z-px-qy)=-(sx+ty)\ ,$$

la matrice di cui si tratta è

$$\begin{vmatrix} r & s & rx+sy \\ s & t & sx+ty \end{vmatrix}\ ,\quad \text{ed equivale a}\quad \begin{vmatrix} r & s & 0 \\ s & t & 0 \end{vmatrix}\ ;$$

affinchè siano nulli i suoi minori del secondo ordine è necessario e sufficiente che sia nullo $rt-s^2$. Dunque *la relazione* $rt-s^2=0$ *caratterizza le superficie sviluppabili.* Qui si noti che per le rigate gobbe è sempre $rt-s^2<0$, perchè per ogni punto passa certamente un'assintotica reale: questa è la generatrice rettilinea. Sulle sviluppabili i due sistemi di assintotiche coincidono in uno, cioè nel sistema delle generatrici rettilinee; ma esiste inoltre un'assintotica isolata, ed è lo spigolo di regresso. Ciò non contradice alle cose dette innanzi, perchè si può facilmente constatare (§ 34, *b*) che sullo spigolo di regresso r, s, t diventano infiniti.

www.rcin.org.pl

18. Ora si consideri un sistema doppiamente infinito di superficie, rappresentato dall'equazione $f(x,y,z,a,b)=0$ per tutte le coppie di valori dei parametri a e b; e dopo aver fissata una superficie S, corrispondente ad una data coppia (a_0, b_0), si prenda arbitrariamente una funzione φ, e si ponga $b=b_0+\varphi(a)-\varphi(a_0)$. Si è in tal modo ricondotti al caso precedente, e si ottiene sopra S una particolare caratteristica, corrispondente alla data funzione φ. Orbene, quando per φ si prendono tutte le funzioni possibili, le infinite caratteristiche così ottenute *passano tutte per certi punti di* S. Infatti la caratteristica corrispondente ad una data φ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=0 \ ,$$

e però le appartengono quei punti di S, nei quali si ha simultaneamente $\frac{\partial f}{\partial a}=0, \frac{\partial f}{\partial b}=0$, i quali punti sono, come si vede, indipendenti dalla scelta di φ. Adunque in questo caso, invece di avere una linea sopra ogni superficie, si hanno dei punti discreti, i quali costituiscono, al variare della superficie, l'*inviluppo* del sistema considerato; e l'equazione di tale inviluppo risulta dall'eliminazione di a e b fra le equazioni

$$f=0 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial b}=0 \ .$$

Anche in questo caso *l'inviluppo tocca tutte le superficie inviluppate.* In particolare una superficie qualunque si può considerare come l'inviluppo dei suoi piani tangenti.

19. Talvolta il sistema di superficie è dato mediante l'equazione

$$f(x,y,z,a,b,c,\ldots)=0 \ ,$$

e fra gli n parametri $a,b,c,\ldots$ si danno ν relazioni $\varphi=0, \psi=0, \ldots$, essendo $\nu=n-1$ o $\nu=n-2$ secondo che il sistema è semplicemente o doppiamente infinito. Allora, per trovare l'equazione dell'inviluppo, bisogna esprimere che la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} \cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \cdots\cdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial c} \cdots\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

ha uguali a zero tutti i minori dell'ordine $\nu+1$. Si ottengono così $n-\nu$ relazioni, e l'equazione cercata risulta dall'eliminazione degli n parametri fra l'equazione del sistema di superficie, le ν relazioni date fra i parametri stessi, e le $n-\nu$ relazioni ottenute. Può anche darsi che nell'equazione del

www.rcin.org.pl

sistema non compariscano esplicitamente i parametri e le coordinate, vale a dire che l'equazione sia data sotto la forma $f(u,v,w,...)=0$, dove $u,v,w,...$ sono funzioni di x,y,z, e dei parametri; ma è chiaro che, in questo caso, le derivate parziali rispetto ad un parametro a si formano prendendo, per esempio,

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial a}+\cdots\ ,\ ecc.$$

20. **Esercizii**: *a)* Per cercare l'inviluppo delle superficie omotetiche ad una data $f(x,y,z)=0$ rispetto ad un centro P, si osservi, prima di tutto, che se ξ,η,ζ sono le coordinate di P, e se si pone

$$F(t)=f(\xi+t(x-\xi)\ ,\ \eta+t(y-\eta)\ ,\ \zeta+t(z-\zeta))\ ,$$

l'equazione $F(t)=0$ rappresenta appunto, per ciascun valore di t, una di quelle superficie, ed in particolare, per $t=1$, la superficie data. Ora, poichè l'equazione dell'inviluppo risulta dall'eliminazione di t fra $F(t)=0$ ed $F'(t)=0$, si vede (§ 3) che l'inviluppo cercato è il cono circoscritto dal vertice P alla data superficie. Così, per esempio, se si dà un ellissoide riferito ai suoi assi, e se si pone

$$f=-1+\sum\frac{x^2}{a^2}\ ,\quad \varphi=-1+\sum\frac{x\xi}{a^2}\ ,\quad f_0=-1+\sum\frac{\xi^2}{a^2}\ ,$$

si trova $F(t)=(f+f_0-2\varphi)t^2+2(\varphi-f_0)t+f_0$, e basta esprimere che il discriminante $ff_0-\varphi^2$ di questa funzione di t è nullo, per ottenere l'equazione del cono circoscritto all'ellissoide:

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)^2.$$

b) Si chiama *tubo*, o superficie *canale*, l'inviluppo d'una semplice infinità di sfere uguali. Basta derivare l'equazione della sfera

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2\ ,$$

supponendovi x,y,z funzioni dell'arco della linea centrale (luogo dei centri delle sfere inviluppate), per ottenere

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0\ ,$$

ed accorgersi che *la caratteristica sta nel piano normale* della predetta linea. Ne segue che un tubo si può considerare come generato dalla circonferenza d'un circolo costante, il cui centro si va spostando sempre normalmente al piano del circolo stesso. All'equazione del tubo si giunge eliminando fra le due precedenti equazioni quell'unica variabile indipendente s, in funzione della quale si suppongono espressi x,y,z,a,b,c.

c) Proponiamoci di trovare l'inviluppo dei piani $\alpha x+\beta y+\gamma z=l$, nell'ipotesi che la distanza l sia legata ai coseni direttori α,β,γ mediante la relazione

$$\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{\beta^2}{l^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{l^2-c^2}=0\ . \qquad (8)$$

Qui i parametri sono α,β,γ,l, e soddisfano alla condizione (8) ed all'altra

GABINET MATEMATY
Biblioteczna Naukowego W

www.rcin.org.pl

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Si deve dunque considerare (§ 19) la matrice

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x & y & z & 1 \\ \dfrac{\alpha}{l^2-a^2} & \dfrac{\beta}{l^2-b^2} & \dfrac{\gamma}{l^2-c^2} & \sigma \end{vmatrix},$$

nella quale si è posto, per brevità,

$$\sigma=\frac{l\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}+\frac{l\beta^2}{(l^2-b^2)^2}+\frac{l\gamma^2}{(l^2-c^2)^2}\,.$$

Mediante le solite trasformazioni si può alla matrice precedente sostituire l'altra

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x}{\alpha}\sigma-\dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{y}{\beta}\sigma-\dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{z}{\gamma}\sigma-\dfrac{1}{l^2-c^2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{1}{l^2-c^2} & \sigma \end{vmatrix}.$$

Affinchè questa abbia nulli tutti i minori del terzo ordine bisogna che sia

$$\frac{x}{\alpha}\sigma-\frac{1}{l^2-a^2}=\frac{y}{\beta}\sigma-\frac{1}{l^2-b^2}=\frac{z}{\gamma}\sigma-\frac{1}{l^2-c^2}\,.$$

Il comune valore di queste tre quantità si ottiene moltiplicando la prima per α^2, la seconda per β^2, la terza per γ^2, e sommando. In tal modo, ricordando la (8), si trova $l\sigma$, e però

$$x=l\alpha+\frac{1}{l^2-a^2}\cdot\frac{\alpha}{\sigma}\,,\quad y=l\beta+\frac{1}{l^2-b^2}\cdot\frac{\beta}{\sigma}\,,\quad z=l\gamma+\frac{1}{l^2-c^2}\cdot\frac{\gamma}{\sigma}\,.$$

Quadrando e sommando si ottiene ancora

$$x^2+y^2+z^2=l^2+\frac{2l}{\sigma}\sum\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum\frac{\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}=l^2+\frac{1}{l\sigma}\,,$$

e, per conseguenza, si potrà scrivere

$$x=\frac{l\alpha}{l^2-a^2}\left(l^2-a^2+\frac{1}{l\sigma}\right)=\frac{l\alpha}{l^2-a^2}(x^2+y^2+z^2-a^2)\,,\ ecc.\ ;$$

quindi

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2-a^2}=\frac{l\alpha}{l^2-a^2}\,,\quad \frac{y}{x^2+y^2+z^2-b^2}=\frac{l\beta}{l^2-b^2}\,,\quad \frac{z}{x^2+y^2+z^2-c^2}=\frac{l\gamma}{l^2-c^2}\,.$$

Moltiplicando ancora per x, y, z, e sommando, si trova l'equazione

$$\sum\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}=\sum\frac{l\alpha x}{l^2-a^2}=l^2\sum\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{1}{\sigma}\sum\frac{l\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}=1\,,$$

facilmente riducibile alla forma più semplice

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0\,.$$

Dunque (IV, 16, *b*) l'inviluppo cercato è la *superficie delle onde.*

www.rcin.org.pl

21. Applicazione utile della precedente teoria, ed importante in quanto serve a completare la teoria delle curve, è la *ricerca degli inviluppi delle facce del triedro fondamentale* d'una curva qualunque. Se in ciascuna delle tre equazioni

$$\sum a(X-x)=0 \quad , \quad \sum \alpha(X-x)=0 \quad , \quad \sum \lambda(X-x)=0 \ ,$$

che rappresentano il piano *normale*, il piano *osculatore*, il piano *rettificante*, si considerano $x, y, \ldots, \nu$ come funzioni dell'arco s, soddisfacenti alle note (VII, 9) relazioni

$$\frac{dx}{ds}=a \quad , \quad \frac{da}{ds}=\frac{\lambda}{\rho} \quad , \quad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\lambda}{\tau} \quad , \quad \frac{d\lambda}{ds}=-\frac{a}{\rho}-\frac{\alpha}{\tau} \ , \ ecc. \ ,$$

si ottiene rispettivamente, derivando,

$$\sum \lambda(X-x)=\rho \quad , \quad \sum \lambda(X-x)=0 \quad , \quad \sum l'(X-x)=0 \ , \tag{9}$$

dopo aver posto, per l'ultima,

$$l'=a \operatorname{sen}\varphi+\alpha\cos\varphi \quad , \quad m'=b \operatorname{sen}\varphi+\beta\cos\varphi \quad , \quad n'=c \operatorname{sen}\varphi+\gamma\cos\varphi \ , \tag{10}$$

con $\operatorname{tg}\varphi=\tau:\rho$. Dunque:

a) Come si poteva prevedere, i piani osculatori inviluppano la *sviluppabile delle tangenti*, ossia quella sviluppabile che ammette come spigolo di regresso la curva considerata;

b) L'inviluppo dei piani normali si chiama *sviluppabile polare*, ed è *il luogo degli assi dei circoli osculatori*. Evidentemente qualunque retta del piano normale, che generi una sviluppabile, non ne può toccare lo spigolo di regresso altrove che sull'asse del circolo osculatore. Ne segue subito che la sviluppabile polare d'una curva è anche il *luogo delle sviluppate* della curva stessa; e si può aggiungere, in virtù d'una precedente osservazione (§ 15, *a*), che le dette sviluppate *sono geodetiche* della sviluppabile polare. Per determinare lo spigolo di regresso di questa superficie bisogna derivare la prima delle (9). Si costituisce così il sistema

$$\sum a(X-x)=0 \quad , \quad \sum \lambda(X-x)=\rho \quad , \quad \sum \alpha(X-x)=-\tau\frac{d\rho}{ds} \ ,$$

che dà (VII, 19) per X, Y, Z i valori ξ, η, ζ, coordinate del centro della sfera osculatrice. Dunque *lo spigolo di regresso della sviluppabile polare è il luogo dei centri delle sfere osculatrici*;

c) Finalmente la superficie inviluppata dai piani rettificanti, alla quale si dà il nome di *sviluppabile rettificante*, contiene la curva. Questa ne incontra le generatrici sotto un angolo, generalmente variabile, che dipende unicamente dal rapporto delle sue curvature. È chiaro che, su tale superficie, la curva considerata *è una geodetica*. Se poi, per determinare lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificante d'una curva, si vuol conoscere il segmento t staccato da questa curva sulla generatrice, a partire dal detto spigolo, bisogna derivare la terza equazione (9). Così, osservando che,

www.rcin.org.pl

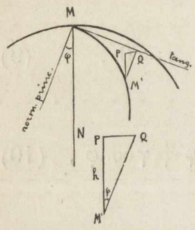
se l, m, n sono i coseni direttori della generatrice, per le (10) si ha $dl' = ld\varphi$, $dm' = md\varphi$, $dn' = nd\varphi$, si ottiene

$$\frac{d\varphi}{ds}\sum l(X - x) = \sum l'a = \operatorname{sen}\varphi \ ,$$

cioè $td\varphi = \operatorname{sen}\varphi\, ds$, e si giunge a spiegare, fra le altre cose, perchè soltanto le eliche ammettono superficie rettificanti cilindriche.

Curvatura.

22. **Teorema di Meusnier.** Prendiamo a studiare la flessione delle linee tracciate sopra una superficie, e consideriamo, in un punto M, una curva, la cui tangente abbia la direzione (a, b, c), e la cui normale principale faccia con la normale alla superficie l'angolo φ. Un punto M′ della curva, infinitamente vicino ad M, si projetti in P sul piano tangente, ed in Q sulla tangente. Quando si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore al secondo, il punto M′ si può considerare come situato nel piano osculatore, dimodochè M′Q risulta parallelo alla normale principale, come M′P è parallelo alla normale, in M, alla superficie. Così, nel triangolo rettangolo M′PQ, l'angolo M′ è uguale a φ, il lato M′P ha (§ 5) la lunghezza



$$h = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{2\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \ ,$$

ed il lato M′Q è (VII, 13) uguale a $\frac{ds^2}{2\rho}$. Sostituendo questi valori nella relazione $M'P = M'Q.\cos\varphi$ si ottiene

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \ . \qquad (11)$$

Ora si considerino tutte le curve della superficie, tangenti fra loro nel punto M, e si distingua, fra esse, quella che sta nel piano determinato dalla comune tangente (a, b, c) e dalla normale alla superficie, e che si chiama *sezione normale.* Per tutte queste curve il secondo membro di (11) ha un valore unico, e però si può dire altrettanto del primo. Ne segue che, se ρ_0 è il raggio di curvatura della *sezione normale*, si ha

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \ , \quad \text{cioè} \quad \rho = \rho_0 \cos\varphi$$

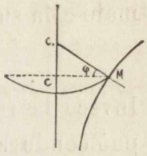
supponendo ρ_0 finito. Dunque *il centro di curvatura di qualunque curva della superficie, in un punto* M, *si ottiene projettando sul piano osculatore il centro di curvatura di quella sezione normale, che tocca la curva in* M.

23. **Esempii:** *a)* Sulla sfera le sezioni normali sono i circoli massimi, ed il centro della sfera è il loro comune centro di curvatura. Ne segue, applicando il

www.rcin.org.pl

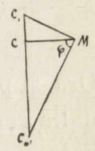
teorema di Meusnier, che *il centro di curvatura, in un punto d'una linea sferica, è la projezione del centro della sfera sul piano che oscula la curva nel punto considerato.*

b) Sopra una superficie di rotazione i paralleli sono generalmente sezioni *oblique.* I loro centri di curvatura appartengono all'asse di rotazione, e poichè i loro piani sono perpendicolari a questo asse, anche i centri di curvatura delle sezioni normali, tangenti ai paralleli, appartengono all'asse di rotazione. Per conseguenza *la sezione piana, fatta in un punto* M *d'una superficie di rotazione normalmente al meridiano, ha il suo centro di curvatura, corrispondente al punto* M, *sull'asse di rotazione.*



24. Per una linea assintotica, e per tutte le curve della superficie che la toccano in un dato punto M, il secondo membro di (11) è nullo, e quindi si ha $\frac{\cos\varphi}{\rho} = 0$. Questa relazione è soddisfatta dalle linee assintotiche in ogni punto, perchè $\varphi = {}^1/_2\pi$, mentre $\frac{1}{\rho}$ è generalmente diverso da zero. Invece per tutte le curve tangenti, in M, ad una retta osculatrice, ma non osculate dal piano tangente alla superficie, φ è diverso da ${}^1/_2\pi$, e però si deve avere $\frac{1}{\rho} = 0$, come già si è visto, per altra via, in fine del § 5. Così, per esempio, ogni sezione fatta nella superficie mediante un piano, condotto per una sola delle rette osculatrici in M, ha nulla la flessione in questo punto. Invece, se si considera la sezione fatta nella superficie mediante il piano tangente in M, si trova che *ciascun ramo della sezione ha, in* M, *una flessione uguale ai* ${}^2/_3$ *della flessione dell'assintotica che la tocca nel detto punto.* Questo interessante teorema è dovuto a Beltrami *). Segue da tutto ciò che il teorema di Meusnier non è valido per le curve che toccano le rette osculatrici, sia perchè la costruzione geometrica che ne risulta non è più applicabile, sia perchè le infinite curve osculate dal piano tangente in un punto, e tangenti fra loro, *non hanno la medesima flessione.*

25. **Curvatura normale e curvatura geodetica.** La quantità $\frac{\cos\varphi}{\rho}$, che misura la curvatura della sezione normale, tangente alla curva che si considera, si chiama *curvatura normale*, mentre a $\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}$ si dà il nome di *curvatura geodetica.* L'asse del circolo osculatore incontra il piano della predetta sezione normale in un punto C_0 (centro di curvatura normale), ed in C_1 (centro di curvatura geodetica) il piano tangente: le due curvature sono evidentemente misurate dalle inverse delle lunghezze MC_0 ed MC_1 (raggi di curvatura normale e di curvatura geodetica). Si noti che la curvatura geodetica non è che la curvatura della projezione della curva sul piano tangente. Infatti, in virtù



*) « *Nouvelles Annales de Mathématiques* » 1865, p. 258. Vedi anche « *Geometria intrinseca* » p. 174.

www.rcin.org.pl

dello stesso teorema di Meusnier, nel cilindro che projetta la curva sul piano tangente, la curvatura della sezione normale, tangente alla curva stessa, è appunto $\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}$. Al concetto di curvatura normale e di curvatura geodetica si è condotti nel modo più naturale quando si analizza lo spostamento angolare della tangente. La rotazione (VII, 8) di questa verso la normale alla superficie è

$$\omega = \sum \mathsf{L} da = \varepsilon \sum \mathsf{L}\lambda = \varepsilon \cos\varphi \ .$$

Invece la rotazione della medesima retta verso la perpendicolare che le si può condurre nel piano tangente, definita in direzione dai coseni L', M', N', è

$$\omega' = \sum \mathsf{L}' da = \varepsilon \sum \mathsf{L}'\lambda = \varepsilon \operatorname{sen}\varphi \ .$$

Lo spostamento angolare ε della tangente nello spazio si può dunque considerare come risultante dalle rotazioni ω ed ω', i cui rapporti a ds, cioè

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \ , \quad \frac{\omega'}{ds} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} \ ,$$

sono appunto la curvatura normale e la curvatura geodetica. La prima serve, per conseguenza, a misurare l'inflessione più o meno grande della curva *fuori la superficie*, mentre la seconda serve, invece, a misurare la deviazione *sulla superficie*. È importante osservare che le linee *geodetiche* sono, in ogni punto, a curvatura geodetica nulla, mentre le *assintotiche* sono a curvatura normale nulla. In altri termini, quando un punto si muove lungo una geodetica, si può dire che la tangente alla curva percorsa si sposta sempre *normalmente alla superficie*. Invece tutto lo spostamento angolare della tangente ad un'assintotica avviene sempre *tangenzialmente alla superficie*.

26. La curvatura d'una sezione normale è

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \ . \tag{12}$$

Per avere un'immagine geometrica del variare di ρ, quando la sezione ruota intorno ad un punto M, poniamo l'origine in M, e dirigiamo l'asse delle z normalmente alla superficie, dimodochè $p = q = c = 0$. Posto $a = \cos\theta$, e conseguentemente $b = \operatorname{sen}\theta$, la (12) diventa

$$\frac{1}{\rho} = r\cos^2\theta + 2s\cos\theta\operatorname{sen}\theta + t\operatorname{sen}^2\theta \ . \tag{13}$$

Ora si porti su ciascuna tangente, a partire da M, un segmento misurato dalla radice quadrata del valore assoluto del corrispondente raggio di curvatura. L'estremo del raggio vettore così costruito ha, nel piano tangente, le coordinate $x = \sqrt{\pm\rho}\cos\theta$, $y = \sqrt{\pm\rho}\operatorname{sen}\theta$, che soddisfano, in virtù di (13), all'equazione $rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1$. Dunque (§ 6) in ciascun punto *la curvatura delle sezioni normali varia* (da una sezione all'altra) *in ragione in-*

www.rcin.org.pl

versa del quadrato del corrispondente diametro dell'indicatrice di Dupin. In particolare essa è nulla per le sezioni determinate dalle rette osculatrici, e raggiunge il minimo ed il massimo valore per le sezioni corrispondenti agli assi dell'indicatrice, le quali si chiamano le *sezioni principali.* Le curvature $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho_2}$ di queste sezioni sono le *curvature principali.*

27. **Teorema di Eulero.** Se riferiamo la figura agli assi dell'indicatrice, nella relazione (13) sparisce il termine in $\cos\theta \operatorname{sen}\theta$; e siccome per $\theta = 0$ dev'essere $\rho = \rho_1$, come per $\theta = {}^1/_2\pi$ si deve avere $\rho = \rho_2$, si ha $\frac{1}{\rho_1} = r$, $\frac{1}{\rho_2} = t$, e conseguentemente

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\theta}{\rho_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho_2}.$$

Questo è il teorema di Eulero. I teoremi di Eulero e di Meusnier mostrano che *basta conoscere le due curvature principali*, in un punto M d'una superficie, *per conoscere la flessione di qualunque curva* tracciata per M sulla superficie, purchè non osculata dal piano tangente in M.

28. **Calcolo delle curvature principali.** Per *determinare le sezioni principali ed i raggi principali di curvatura in un punto d'una superficie*, riprendiamo la formola (12). Si tratta di cercare il minimo ed il massimo del trinomio $ra^2 + 2sab + tb^2$, sapendo che fra le variabili a e b sussiste la relazione

$$(1+p^2)a^2 + 2pqab + (1+q^2)b^2 = 1\ , \tag{14}$$

che si ottiene eliminando c fra $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e la condizione di ortogonalità $pa + qb - c = 0$ della tangente con la normale alla superficie. Ripetendo qui un calcolo già eseguito (IV, 16, a) in condizioni più generali, si è condotti a porre

$$ra + sb = k\big((1+p^2)a + pqb\big)\ ,\ sa + tb = k\big(pqa + (1+q^2)b\big)\ ; \tag{15}$$

poi, eliminando k, si ottiene un'altra equazione in a e b, che serve, insieme alla (14), a determinare le direzioni degli assi dell'indicatrice, e per conseguenza le sezioni principali. Eliminando invece a e b si trova

$$\begin{vmatrix} r - k(1+p^2) & s - kpq \\ s - kpq & t - k(1+q^2) \end{vmatrix} = 0\ ,$$

cioè

$$rt - s^2 - \big((1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\big)k + (1+p^2+q^2)k^2 = 0\ . \tag{16}$$

D'altra parte, moltiplicando la prima delle (15) per a, la seconda per b, e sommando, si ottiene

$$ra^2 + 2sab + tb^2 = k\big((1+p^2)a^2 + 2pqab + (1+q^2)b^2\big) = k\ .$$

www.rcin.org.pl

Dunque k, diviso per $\sqrt{1+p^2+q^2}$, rappresenta precisamente il valore minimo o massimo di $\frac{1}{\rho}$; e poichè le radici k_1 e k_2 dell'equazione (16) sono legate dalle relazioni

$$k_1+k_2=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{1+p^2+q^2}\ ,\quad k_1k_2=\frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2}\ ,$$

si ha pure

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,\quad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\ . \tag{17}$$

Son queste le formole che servono a far conoscere le curvature principali. Con un calcolo facile, posto

$$\mathsf{L}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad \mathsf{M}=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,$$

si riconosce che alle (17) si può anche dar la forma più concisa

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\partial\mathsf{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathsf{M}}{\partial y}\ ,\quad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{\partial(\mathsf{L},\mathsf{M})}{\partial(x,y)}\ .$$

29. **Curvatura media**. Si deve a Sofia Germain il concetto di *curvatura media*. Si chiama così la *media aritmetica* H delle curvature principali, cioè $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)$. Per giustificare tale denominazione si osservi, in primo luogo, che se ρ e ρ' sono i raggi di curvatura di due sezioni normali qualunque, perpendicolari fra loro, si ha, per la formola di Eulero,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\theta}{\rho_1}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho_2}\ ,\quad \frac{1}{\rho'}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho_1}+\frac{\cos^2\theta}{\rho_2}\ ;$$

poi, sommando,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)=\mathrm{H}\ .$$

Ora consideriamo $2n$ tangenti, equamente distribuite intorno ad M; basta immaginarle associate per coppie di tangenti ortogonali per convincersi che, se si fa crescere n all'infinito, la *media aritmetica delle curvature normali* resta sempre uguale al valore di H in M.

30. Le superficie a curvatura media *costante* hanno importanza nei fenomeni capillari, e sono state sperimentalmente realizzate da Plateau *). Particolarmente importanti sono poi le superficie a curvatura media *nulla*, cioè le superficie per le quali, in ogni punto, i raggi principali di curvatura sono uguali, ma diretti in sensi opposti; ciò equivale a dire che l'indicatrice di Dupin consta di due iperboli equilatere complementari, d'onde la seguente proprietà caratteristica: *le assintotiche si tagliano, in ogni punto,*

---

*) Vedi, per esempio, il « *Cours de physique* » di Jamin (3ème éd., t. I, p. 225), e la « *Geometria intrinseca* » p. 181.

www.rcin.org.pl

ad angolo retto. Analiticamente queste superficie sono caratterizzate, in virtù della prima formola (17), dall'equazione differenziale

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 \ .$$

Esse portano il nome di *superficie ad area minima*, o semplicemente superficie minime, perchè ogni contorno chiuso, tracciato sopra una simile superficie, ne stacca un' area minore di quella che lo stesso contorno stacca da ogni altra superficie: ciò sarà dimostrato alla fine del Corso.

31. **Esempii**: *a)* Un esempio di superficie minima ci si presenta subito fra le superficie di rotazione. Presto vedremo che il meridiano passante per M è una delle sezioni principali; l'altra è tangente al parallelo, in M. I raggi principali di curvatura sono dunque il raggio di curvatura del meridiano ed il segmento (§ 23, *b*) staccato sulla normale, a partire da M, dall'asse di rotazione. Questi raggi debbono, in una superficie minima, essere diretti in sensi opposti, e però il meridiano deve rivolgere la convessità verso l'asse di rotazione. Esso deve inoltre esser tale che *il suo centro di curvatura sia simmetrico, rispetto al punto che si considera, del punto d'incontro della normale con una retta fissa.* Già si è visto (VI, 15, *l*) che questa proprietà appartiene alla catenaria, e si vedrà in seguito che non può verificarsi in altre curve. La superficie generata dalla rotazione d'una catenaria intorno alla sua direttrice si chiama *catenoide.* Ed ora possiamo dire che *il catenoide è l'unica superficie minima di rotazione.*

b) Anche l'*elicoide a piano direttore*, cioè la superficie costituita dalle perpendicolari condotte per tutti i punti di un'elica circolare all'asse del cilindro, è di area minima. Infatti, poichè le generatrici sono (VII, 15, *a*) le normali *principali* dell'elica considerata e di altre (VII, 15, *e*) eliche, in numero infinito, tracciate su cilindri concentrici, è chiaro che queste eliche costituiscono uno dei due sistemi di assintotiche, mentre l'altro è formato, come su qualunque rigata, dalle generatrici rettilinee. Constatata così l'ortogonalità dei due sistemi di assintotiche, resta dimostrato che la superficie è di area minima. Reciprocamente sopra una rigata minima un sistema di assintotiche è necessariamente costituito dalle trajettorie ortogonali delle generatrici, e però queste linee ammettono le generatrici stesse come normali *principali*, d'onde segue (VII, 15, *e*) che ognuna di esse, avendo in comune le normali principali con infinite altre linee, è un'elica circolare, e però la superficie (costituita, come si vede, dalle normali principali di un'elica circolare) è un elicoide a piano direttore. In tal modo si giunge al seguente teorema di Catalan: *l'elicoide a piano direttore è l'unica rigata minima.*

32. **Curvatura totale.** A Gauss si deve il concetto di *curvatura totale.* Si chiama così il prodotto K delle curvature principali, ossia

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \ . \qquad (18)$$

L'analogia fra la curvatura totale delle superficie e la curvatura delle linee piane apparisce quando, supponendo data l'equazione della superficie sotto la forma $f(x,y,z)=0$, si cerca di esprimere K mediante le successive de-

www.rcin.org.pl

rivate parziali di f. Si ha infatti, in virtù di note formole (V, 25),

$$K = -\frac{1}{(\Delta f)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} . \qquad (19)$$

Così i punti parabolici delle superficie ci si presentano come gli analoghi dei punti d'inflessione delle curve piane, e la distinzione fra punti ellittici e punti iperbolici sta tutta nel segno di K. Si può *) inoltre dimostrare che, analogamente a ciò che avviene (VI, 12) nelle curve piane, se intorno ad M si stacca un pezzo infinitesimo ς di superficie, il valore di K in M è il limite del rapporto a ς dell'angolo solido compreso fra le normali elevate alla superficie lungo il contorno di ς. Qui vogliamo menzionare una terza misura della curvatura

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right) = 2H^2 - K ,$$

proposta da Casorati come rispondente in modo più fedele delle altre al concetto volgare di curvatura; ma dobbiamo aggiungere che le discussioni sulla più conveniente misura della curvatura d'una superficie non hanno importanza alcuna. Ciò che importa è la conoscenza di entrambi i raggi ρ_1 e ρ_2, o, in loro vece, di due funzioni qualunque, tra loro indipendenti, dei raggi stessi; e le funzioni (17), mentre analiticamente ci si presentano nel modo più naturale, sono anche quelle che intervengono nelle più importanti questioni geometriche e meccaniche. Così, per esempio, supponiamo che, data una superficie, si voglia applicare su di essa un'altra superficie, considerata come una sottilissima membrana flessibile ma inestendibile. Gauss ha dimostrato **) che occorre, perchè ciò sia possibile, e basta che nei punti corrispondenti, cioè nei punti che vengono a coincidere quando una superficie si applica sull'altra, *le curvature totali siano uguali fra loro.* La curvatura totale rappresenta dunque qualche cosa di invariabile, di permanente, in ogni punto d'una superficie che si deforma per semplice flessione. Segue ancora dal teorema di Gauss che le sole superficie sulle quali è possibile (come sul piano e sulla sfera) trasportare da un posto ad un altro una figura qualunque, senza alterarne la forma, sono le superficie a curvatura totale costante, che si chiamano brevemente superficie *a curvatura costante.* È questa un'osservazione di grande importanza per lo studio dei postulati fondamentali della Geometria.

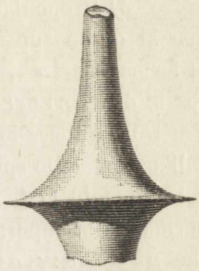
---

*) « *Geometria intrinseca* » p. 168.

**) Vedi, per esempio, il « *Calcul différentiel* » di Boussinesq, p. 298*.

www.rcin.org.pl

33. **Esempii**: *a)* Notevoli esempii di superficie a curvatura costante sono ancora forniti dalle superficie di rotazione. Sulla *sfera* di raggio a la curvatura totale è dappertutto uguale ad $\frac{1}{a^2}$; ma vi sono infinite altre superficie *) a curvatura totale costante, positiva o negativa. La *pseudosfera*, cioè la superficie generata da una trattrice (VI, 45, *d*), che ruota intorno all'assintoto, ha la curvatura totale, in ogni punto, uguale a $-\frac{1}{a^2}$, se a è la lunghezza (costante) della tangente fra il punto di contatto e l'assintoto. Sappiamo infatti che il centro di curvatura C_1 si projetta in T, al piede della tangente, sull'asse di rotazione, e che l'altro centro principale di curvatura, C_2, sta sull'asse; ed ora nel triangolo rettangolo TC_1C_2 si ha



$$MC_1 . MC_2 = MT^2 \ , \quad \text{cioè} \quad \rho_1 \rho_2 = -a^2 \ .$$

b) Le superficie applicabili per semplice flessione sul piano debbono essere a curvatura *nulla*, vale a dire tali che in tutti i punti si abbia $rt - s^2 = 0$; esse sono dunque (§ 17) le superficie sviluppabili. Secondo Casorati la sola superficie a curvatura nulla sarebbe il piano, mentre un cilindro circolare avrebbe la metà della curvatura d'una sfera dello stesso raggio. Tornando al concetto di Gauss, è importante notare che le geodetiche, in quanto segnano il più breve cammino fra due punti, restano tali nell'applicazione d'una superficie sopra un'altra, diguisachè, se una sviluppabile si applica sul piano, *le sue geodetiche si rettificano.* In particolare si rettifica qualunque curva quando se ne applica sul piano la sviluppabile rettificante (§ 21, *c*), vale a dire che per ogni curva si può far passare una sviluppabile tale, che, quando questa si applica sopra un piano, la curva si trasforma in una retta. Le sviluppate della curva (§ 21, *b*) si rettificano invece, tutte, quando si applica sul piano la sviluppabile polare. E qui vogliamo far notare che, siccome la sviluppabile polare di qualunque curva piana è un cilindro, le sviluppate d'una tal curva son sempre eliche cilindriche.

34. **Esercizii**: *a)* Per una quadrica a centro, riferita ai suoi assi, si può calcolare la curvatura totale mediante la formola (19) prendendo

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) .$$

Prima si osservi che, essendo $\sum \frac{Xx}{a^2} = 1$ l'equazione del piano tangente, la distanza h di questo piano al centro è data dalla formola

$$\frac{1}{h^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \Delta f \ ;$$

quindi la (19) dà

$$K = -\frac{h^4}{a^4 b^4 c^4} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & a^2 & 0 & 0 \\ y & 0 & b^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{h^4}{a^2 b^2 c^2} \ .$$

*) « *Geometria intrinseca* » p. 178.

www.rcin.org.pl

Dunque (*cfr.* VI, 15, *h*) *nelle quadriche a centro la curvatura totale varia come la quarta potenza della distanza fra il piano tangente ed il centro.*

b) Proponiamoci di calcolare le curvature principali in un punto qualunque M d'una superficie sviluppabile. Le coordinate di M si possono porre sotto la forma $X = x + av$, $Y = y + bv$, $Z = z + cv$, dove a, b, c rappresentano i coseni direttori della generatrice, ed x, y, z le coordinate del punto Q, in cui la generatrice tocca lo spigolo di regresso. Queste sei quantità dipendono unicamente dall'arco u dello spigolo, mentre v, indipendente da u, rappresenta la lunghezza del segmento QM. Ciò premesso, poichè si sa (§ 11) che i coseni direttori della normale alla superficie son quelli α, β, γ della binormale di (Q), si vede subito che $p = -\alpha:\gamma$, $q = -\beta:\gamma$, d'onde si deduce

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{b}{v\gamma^2} \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{a}{v\gamma^2} \, ,$$

cioè

$$ra + sb = sa + tb = 0 \quad , \quad r\lambda + s\mu = -\frac{\rho b}{vv\gamma^2} \quad , \quad s\lambda + t\mu = \frac{\rho a}{vv\gamma^2} \, ;$$

quindi

$$r = -\frac{\rho b^2}{vv\gamma^3} \quad , \quad s = \frac{\rho ab}{vv\gamma^3} \quad , \quad t = -\frac{\rho a^2}{vv\gamma^3} \, .$$

La (18) dà $K = 0$: ciò era da prevedere, sia perchè già si è visto (§ 17) che in tutti i punti d'una sviluppabile è $rt - s^2 = 0$, sia perchè il coincidere dei due sistemi di assintotiche nell'unico sistema delle generatrici ci dice che una delle sezioni principali, in un punto qualunque M, è la generatrice stessa che passa per M, giacchè le tangenti a tali sezioni debbono dividere per metà gli angoli delle rette osculatrici. Dunque una delle curvature è nulla; l'altra è data dalla prima formola (17), ed è

$$\frac{1}{R} = -\left\{(1-\beta^2)a^2 + 2\alpha\beta ab + (1-\alpha^2)b^2\right\}\frac{\rho}{vv\gamma^2} = -(1-c^2-\nu^2)\frac{\rho}{vv\gamma^2} = -\frac{\rho}{vv}$$

sicchè $R = -v \operatorname{tg}\varphi$, dove φ è l'angolo di cui deve ruotare, in un senso già definito (§ 21), la tangente allo spigolo di regresso, per coincidere con la generatrice della sviluppabile rettificante; e poichè la lunghezza R va portata nel senso positivo della binormale, si vede che *i centri di curvatura normale delle trajettorie ortogonali delle generatrici d'una sviluppabile appartengono alla sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso.* Alla medesima conclusione si giunge anche osservando che la generatrice della sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso è in pari tempo (§ 15, *a*; § 21, *b*, *c*) l'asse dei circoli osculatori di tutte le trajettorie ortogonali, d'onde si deduce, invocando il teorema di Meusnier, che la detta generatrice incontra i piani perpendicolari alla generatrice della prima sviluppabile nei centri di curvatura delle corrispondenti sezioni, lungo la generatrice stessa.

Determinazione e proprietà delle linee notevoli d'una superficie.

35. **Linee di curvatura; ombelichi.** Per determinare le linee di curvatura (§ 7) d'una superficie data, si ha, eliminando k fra le (15),

$$\frac{(1+p^2)dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{pq\,dx + (1+q^2)dy}{s\,dx + t\,dy} \, , \tag{20}$$

www.rcin.org.pl

cioè

$$\left(\frac{r}{1+p^2}-\frac{s}{pq}\right)\frac{dx^2}{1+q^2}-\left(\frac{t}{1+q^2}-\frac{r}{1+p^2}\right)\frac{dx\,dy}{pq}+\left(\frac{s}{pq}-\frac{t}{1+q^2}\right)\frac{dy^2}{1+p^2}=0\ , \quad (21)$$

d'onde, immaginando espresse le funzioni p, q, r, s, t in funzione delle sole variabili indipendenti x ed y, si ricavano due equazioni

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y)\ ,\quad \frac{dy}{dx}=\psi(x,y)\ ; \qquad (22)$$

e da queste, considerate separatamente, si potrà risalire, nel modo che verrà spiegato verso la fine del Corso, alle equazioni di due sistemi di cilindri paralleli all'asse z, i quali tagliano la superficie secondo le sue linee di curvatura. Si osservi che, se le coordinate x, y, z d'un punto M della superficie soddisfano anche alle altre due equazioni

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}\ , \qquad (23)$$

e solo in questa ipotesi, la (21) è soddisfatta identicamente, e però in M concorrono infinite linee di curvatura. Siffatti punti, che si chiamano *ombelichi*, sono generalmente in numero finito; ma possono anche formare linee della superficie: ciò avviene quando le (23) si riducono ad una sola equazione. L'indeterminazione della direzione delle tangenti alle linee di curvatura, in un ombelico, non può esser dovuta ad altro che all'indeterminazione della coppia degli assi nell'indicatrice di Dupin, cioè all'esser questa un circolo. Ne segue che intorno agli ombelichi la superficie si comporta come una sfera, perchè spostando infinitamente poco il piano tangente, perpendicolarmente alla normale, si determinano nella superficie sezioni circolari infinitesime. Ciò permette di veder subito che sopra un ellissoide, per esempio, si hanno quattro ombelichi reali, che sono gli estremi dei diametri conjugati alle due serie di sezioni circolari. Del resto si può verificare che le condizioni (23) equivalgono appunto all'unica $\rho_1=\rho_2$, giacchè dalle (17) si trae, con un calcolo facile,

$$\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)^2=\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^3}\left\{(1+p^2+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right)^2+p^2q^2\left(\frac{r}{1+p^2}+\frac{t}{1+q^2}-\frac{2s}{pq}\right)^2\right\},$$

e si vede che per l'eguaglianza $\rho_1=\rho_2$ le (23) sono sufficienti e necessarie.

36. Le normali condotte ad una superficie lungo una curva qualunque costituiscono una rigata generalmente gobba, che chiamasi *normalia*. Fra le infinite normalie, che passano per un punto, quante e quali sono sviluppabili? La condizione necessaria e sufficiente perchè la normale in M generi una sviluppabile, quando M si sposta sulla superficie data, è (§ 9)

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx \\ q & dq & dy \\ -1 & 0 & dz \end{vmatrix}=0\ .$$

www.rcin.org.pl

Il determinante scritto nel primo membro è uguale a

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx+pdz \\ q & dq & dy+qdz \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx+pdz & dp \\ dy+qdz & dq \end{vmatrix} .$$

Dunque dev'essere

$$\frac{dx+pdz}{dp} = \frac{dy+qdz}{dq} ;$$

ma questa eguaglianza non differisce dalla (20), come si riconosce subito osservando che

$$dz = pdx + qdy \quad , \quad dp = rdx + sdy \quad , \quad dq = sdx + tdy .$$

Passano dunque per ogni punto della superficie due normalie sviluppabili, le cui tracce sulla superficie sono appunto le linee di curvatura. Gli spigoli di regresso di tutte queste normalie formano una superficie a due falde, che si può anche considerare come il *luogo di tutti i centri principali di curvatura*. Questa seconda superficie è dunque, rispetto alla prima, l'analoga della sviluppata *) d'una curva. La precedente proprietà caratteristica delle linee di curvatura si può enunciare dicendo che *ogni linea di curvatura è trajettoria ortogonale delle generatrici sopra una sviluppabile, costituita da normali alla superficie,* ed aggiungendo che tale proprietà non appartiene ad altre linee. Da ciò è facile dedurre, ricordando un precedente teorema (§ 15, *b*), che una curva, quando è linea di curvatura sopra una superficie, conserva questo suo carattere su tutte le superficie che tagliano la data, lungo la curva stessa, sotto un angolo costante. Ne segue, in particolare, che, *quando un piano taglia una superficie sotto un angolo costante, l'intersezione è necessariamente linea di curvatura*; ed inversamente, *se una linea di curvatura è piana, il suo piano taglia la superficie sotto un angolo costante.* Altrettanto si può affermare, più generalmente, per le curve sferiche, giacchè sopra una sfera ogni curva è linea di curvatura.

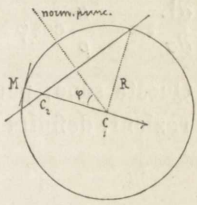
37. **Esempii :** *a)* Sulle superficie di rotazione le linee di curvatura sono i *meridiani* ed i *paralleli.* Infatti le normali alla superficie, lungo ciascun meridiano, stanno nel piano del meridiano, e le normali lungo un parallelo concorrono sull'asse di rotazione. Più semplicemente basta osservare che il piano di qualunque meridiano o parallelo incontra la superficie ad angolo costante. Del resto, quando si è trovato uno dei due sistemi di linee di curvatura, l'altro è determinato dalla condizione che le sue linee incontrino ortogonalmente quelle del primo. Ai due sistemi di linee corrispondono le due falde della sviluppata, delle quali una è generata dalla rotazione della sviluppata del meridiano intorno al medesimo asse, e l'altra si riduce (§ 23, *b*) a questa sola retta. Per esempio un catenoide costituisce, insieme all'asse di rotazione, la sviluppata d'una pseudosfera.

*) Per conoscere le principali proprietà delle sviluppate delle superficie si legga la « *Geometria differenziale* » di Bianchi, o la nostra « *Geometria intrinseca* » p. 170.

www.rcin.org.pl

b) Sopra una sviluppabile ogni *generatrice* è linea di curvatura (§ 34, *b*), perchè le normali alla superficie, lungo una generatrice, stanno in un piano. Se le generatrici si fanno ruotare d'un angolo retto intorno ad una loro *trajettoria ortogonale*, esse diventano normali alla superficie senza cessare (§ 15, *b*) di costituire una sviluppabile, e si riconosce così, direttamente, che le trajettorie ortogonali delle generatrici formano l'altro sistema di linee di curvatura. La sviluppata ha poi una falda all'infinito, e l'altra (§ 34, *b*) è la sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso.

c) Su qualunque inviluppo d'una semplice infinità di sfere, le *caratteristiche* sono linee di curvatura, giacchè (§ 16) lungo ciascuna di esse le normali alla superficie sono i raggi stessi della sfera inviluppata, i quali concorrono nel centro C_1. Ne segue che uno dei due centri principali di curvatura è C_1; l'altro si determina facilmente, nel caso d'un tubo (§ 20, *b*), osservando che appartiene allo spigolo di regresso della sviluppabile generata *da una normale* alla linea centrale, e che per conseguenza (§ 21, *b*) deve stare sull'asse del circolo osculatore di questa linea. I raggi principali di curvatura sono dunque



$$\rho_1 = R \quad , \quad \rho_2 = R - \frac{\rho}{\cos\varphi} \, ,$$

come si può anche stabilire con soli calcoli, facendo uso delle (17), e ponendo $\Sigma\lambda(X - x) = \cos\varphi$. Osserviamo, per finire, che la sviluppata d'un tubo è costituita dalla sviluppabile polare della linea centrale e da questa linea stessa.

38. **Torsione geodetica.** La proprietà caratteristica delle linee di curvatura, trovata nel § 36, è intimamente connessa al concetto di *torsione geodetica*, introdotto da Bertrand per dar la misura della deviazione angolare del piano tangente, intorno ad una tangente, quando il punto di contatto si sposta nella direzione della tangente stessa. È naturale assumere come misura di tale deviazione il rapporto a $d\sigma$ (differenziale dell'arco) dell'angolo di cui ruota la projezione, sul piano normale, della normale alla superficie, angolo già trovato (§ 14) uguale ad $\eta - d\varphi$. È questo rapporto

$$\tau = \frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

che si chiama torsione geodetica. Evidentemente la proprietà caratteristica, accennata in principio, si può esprimere dicendo che le linee di curvatura sono, in ogni punto, *a torsione geodetica nulla*. La torsione geodetica rappresenta dunque, per le linee di curvatura, qualche cosa di analogo a ciò che la curvatura normale (§ 25) è per le assintotiche; ed entrambe restano invariate, in ciascun punto, per tutte le curve che ammettono la stessa tangente, mentre la curvatura geodetica varia, per queste curve, insieme alla posizione del piano osculatore. Vedremo inoltre che vi è analogia fra le leggi che reggono le variazioni della curvatura normale e quelle che presiedono al variare della torsione geodetica nelle infinite direzioni intorno ad un pun-

www.rcin.org.pl

to, in quanto che l'una e l'altra son misurate da funzioni quadratiche omogenee dei coseni che definiscono tali direzioni.

39. Ed infatti, se con a', b', c' si rappresentano i coseni direttori della tangente alla superficie, perpendicolare a quella che si considera, è chiaro che, essendo

$$\mathsf{L} = \alpha \operatorname{sen}\varphi + \lambda \cos\varphi \quad , \quad a' = \alpha\cos\varphi - \lambda \operatorname{sen}\varphi \ , \ ecc.,$$

si ha

$$\frac{d\mathsf{L}}{d\sigma} = -\frac{a}{\rho}\cos\varphi - a'\tau \ , \quad \frac{d\mathsf{M}}{d\sigma} = -\frac{b}{\rho}\cos\varphi - b'\tau \ , \quad \frac{d\mathsf{N}}{d\sigma} = -\frac{c}{\rho}\cos\varphi - c'\tau \ . \quad (24)$$

Queste sono, per così dire, le formole di Frenet relative alla terna di direzioni, definita dal determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} a & a' & \mathsf{L} \\ b & b' & \mathsf{M} \\ c & c' & \mathsf{N} \end{vmatrix} = 1 \ .$$

Moltiplicando le (24) una volta per a, b, c, ed un'altra per a', b', c', si ottiene, sommando,

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = -\sum a \frac{d\mathsf{L}}{d\sigma} \quad , \quad \tau = -\sum a' \frac{d\mathsf{L}}{d\sigma} \ .$$

Ora, poichè $\mathsf{L} = -\mathsf{N}p$, $\mathsf{M} = -\mathsf{N}q$, dove $\mathsf{N} = 1 : \sqrt{1+p^2+q^2}$, se si tien conto delle condizioni di ortogonalità $pa + qb = c$, $pa' + qb' = c'$, le ultime formole diventano

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = a\left(p\frac{d\mathsf{N}}{d\sigma} + \mathsf{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b\left(q\frac{d\mathsf{N}}{d\sigma} + \mathsf{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c\frac{d\mathsf{N}}{d\sigma} = \mathsf{N}\left(a\frac{dp}{d\sigma} + b\frac{dq}{d\sigma}\right),$$

$$\tau = a'\left(p\frac{d\mathsf{N}}{d\sigma} + \mathsf{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b'\left(q\frac{d\mathsf{N}}{d\sigma} + \mathsf{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c'\frac{d\mathsf{N}}{d\sigma} = \mathsf{N}\left(a'\frac{dp}{d\sigma} + b'\frac{dq}{d\sigma}\right).$$

La prima formola non differisce dalla (11), della quale abbiamo così un'altra dimostrazione; la seconda ci dà

$$\tau = \frac{raa' + s(ab' + ba') + tbb'}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ , \quad (25)$$

e questa si può porre sotto una forma analoga alla (11) osservando che

$$a' = \mathsf{M}c - \mathsf{N}b = -\mathsf{N}(b + qc) = -\mathsf{N}[pqa + (1+q^2)b] \ ,$$

$$b' = \mathsf{N}a - \mathsf{L}c = \quad \mathsf{N}(a + pc) = \quad \mathsf{N}[(1+p^2)a + pqb] \ .$$

Così si ottiene

$$\tau = \frac{-(ra+sb)[pqa + (1+q^2)b] + (sa+tb)[(1+p^2)a + pqb]}{1+p^2+q^2} \ ,$$

e si ricade sulla condizione (20), caratteristica delle linee di curvatura, quando si pone $\tau = 0$.

www.rcin.org.pl

40. Per la ricerca delle proprietà di τ è più comodo l'uso della (25):

a) Una prima proprietà si scopre subito osservando che, se alla direzione (a, b, c) si sostituisce (a', b', c'), a questa bisogna sostituire la direzione $(-a, -b, -c)$, dimodochè τ non fa che cambiar segno. Dunque due linee d'una superficie, che s'incontrano ad angolo retto, hanno, nel punto d'incontro, torsioni geodetiche opposte nel segno, ma uguali in valore assoluto;

b) Se (a_1, b_1, c_1) ed (a_2, b_2, c_2) sono le direzioni delle tangenti alle linee di curvatura, si può sempre porre

$$a = a_1 \cos\theta + a_2 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad a' = -a_1 \operatorname{sen}\theta + a_2 \cos\theta \ ,$$

$$b = b_1 \cos\theta + b_2 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad b' = -b_1 \operatorname{sen}\theta + b_2 \cos\theta \ .$$

Sostituendo in (25) questi valori, ed osservando che

$$r a_1 a_2 + s(a_1 b_2 + a_2 b_1) + t b_1 b_2 = 0 \ ,$$

si ottiene la formola

$$\tau = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{26}$$

che mostra chiaramente come varia τ intorno a ciascun punto;

c) Se al prodotto delle curvature normali nelle direzioni (a, b, c) ed (a', b', c') si aggiunge il prodotto delle torsioni geodetiche nelle stesse direzioni, dopo avere osservato che l'espressione

$$(ra^2 + 2sab + tb^2)(ra'^2 + 2sa'b' + tb'^2) - (raa' + s(ab' + ba') + tbb')^2$$

si riduce identicamente ad $(rt - s^2)\mathrm{N}^2$, si ottiene l'importante formola

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\rho\rho'} - \tau^2 \ , \tag{27}$$

che si può anche stabilire servendosi dell'espressione (26) di τ, e della formola di Eulero. Infatti a quest'ultima si possono dare le due seguenti forme

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \operatorname{sen}^2\theta \quad , \quad \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cos^2\theta \ ;$$

quindi, moltiplicando, si ha

$$\tau^2 = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}\mathrm{H} - \mathrm{K} = \frac{1}{\rho\rho'} - \mathrm{K} \ .$$

41. **Linee assintotiche; teorema di Enneper**. La ricerca delle assintotiche è fondata sull'equazione

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0 \ , \tag{28}$$

esprimente che la curvatura normale di simili curve è nulla. Si vedrà in seguito che l'equazione precedente caratterizza (come la (21), che ha la

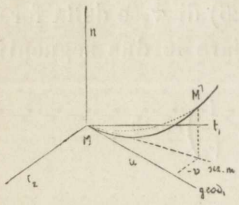
www.rcin.org.pl

stessa forma) due sistemi semplicemente infiniti di superficie, le quali intersecano la data superficie lungo le linee assintotiche. Del resto, per fare lo studio di queste linee, sopra una superficie data, non è indispensabile conoscere le loro equazioni, perchè, note le curvature principali della superficie, si hanno formole per calcolare le curvature delle assintotiche. Noi non potremmo qui dimostrare, senza uscire dai limiti imposti a questo corso, la formola *) di Bonnet, che dà la *flessione* delle assintotiche in funzione di ρ_1 e di ρ_2; ma è facile dedurre dalla (27) il seguente teorema di Enneper: *la torsione delle assintotiche si calcola estraendo la radice quadrata della curvatura totale, cambiata di segno.* Infatti per le assintotiche, come per tutte le curve che hanno le normali principali ugualmente inclinate sulle normali alla superficie (e quindi anche per le geodetiche), la torsione geodetica non differisce dalla torsione assoluta; e però, essendo $\frac{1}{r}=\tau$, $\frac{1}{\rho}=0$, la formola (27) dà $r=\pm\sqrt{-\rho_1\rho_2}$.

42. **Linee geodetiche; formole di Weingarten.** La definizione (§ 7) delle geodetiche d'una superficie $f(x,y,z)=0$ si traduce immediatamente nelle equazioni

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}:\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}:\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}:\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{29}$$

in cui s è la lunghezza dell'arco. Ben raramente accade che si sappia dalle (29) risalire all'equazione in x,y,z, con due costanti arbitrarie, atta a rappresentare, insieme all'equazione della superficie, la doppia infinità delle geodetiche. Si può tuttavia fare lo studio di queste curve senza conoscerne le equazioni in termini finiti, ed è particolarmente importante per le applicazioni il sapere come le geodetiche si comportano in regioni limitatissime della superficie. Posta l'origine sulla superficie, in M, si dirigano gli assi x ed y secondo le tangenti alle linee di curvatura; poi si consideri un arco $MM'=\sigma$ sulla geodetica definita dall'angolo θ, che la sua tangente in M fa con Mx. Se fra le sezioni normali, che passano per M, si costruisce quella che passa anche per M', si determina sulla superficie un altro arco $MM'=\sigma+\delta$. Il piano di questa sezione si suole in pratica assumere come osculatore alla geodetica, quantunque, per farlo diventar tale, vi sia da imprimergli una certa *deviazione* angolare ε: questa, computata nel senso del moto degli indici d'un orologio, per un osservatore posto sulla parte positiva dell'asse z (normale principale), si calcola subito osservando che $\operatorname{tg}\varepsilon=-v:u$, dove u e v sono (VII, 13) le distanze di M' al piano normale ed al piano osculatore. Quindi, cambiando in σ il ds delle formole (19) del precedente capitolo, si ottiene $\varepsilon=\frac{\sigma^2}{6r\rho}$, vale a dire che *la deviazione* ε *è*



*) « *Geometria intrinseca* » p. 163.

www.rcin.org.pl

infinitesima del secondo ordine rispetto all'arco σ. Questa conclusione, così semplice e del resto prevedibile, chiude in sè una delle proposizioni fondamentali della Geodesia *). Nella pratica si suole anche, e con maggior ragione, trascurare δ, cioè considerare l'arco MM′ misurato lungo una sezione normale come un arco di geodetica, e ciò si giustifica dimostrando che $\delta = {}^2/_5 \sigma\varepsilon^2$, vale a dire che *la differenza fra i due archi è infinitesima del quinto ordine*. Questo ed altri importanti risultati si possono dedurre dalle *formole di Weingarten*, le quali danno le coordinate x, y, z di M′ in funzione di σ e di θ. Siccome si ha, per le citate formole (19),

$$u = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho^2} + \cdots \quad , \quad v = -\frac{\sigma^3}{6\tau\rho} + \cdots \quad , \quad w = \frac{\sigma^2}{2\rho} + \frac{\sigma^3}{6}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} + \cdots ,$$

si ottiene subito $z = w$, ed inoltre

$$x = u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta = \sigma\cos\theta - \frac{\sigma^3}{6\rho}\left(\frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\tau}\right) + \cdots ,$$

$$y = u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta = \sigma\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\sigma^3}{6\rho}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta}{\tau}\right) + \cdots .$$

D'altra parte, in virtù del teorema di Eulero, e della formola (26), ricordando che per le geodetiche è $\tau = \frac{1}{\tau}$, si ha

$$\frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\tau} = \frac{\cos\theta}{\rho_1} \quad , \quad \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta}{\tau} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho_2} .$$

Dunque

$$x = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho\rho_1} + \cdots\right)\cos\theta \quad , \quad y = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho\rho_2} + \cdots\right)\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad z = \frac{\sigma^2}{2\rho} + \cdots .$$

43. Per finire proponiamoci, come esercizio, di *determinare le assintotiche e le geodetiche d'una superficie di rotazione*:

a) Preso l'asse di rotazione come asse z, sia $z = f(x)$, nel piano xz, l'equazione del meridiano: l'equazione della superficie è $z = f(\mathrm{R})$, con $\mathrm{R} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ne segue, derivando,

$$p = \frac{x}{\mathrm{R}} f'(\mathrm{R}) = x\varphi(\mathrm{R}) \quad , \quad q = \frac{y}{\mathrm{R}} f'(\mathrm{R}) = y\varphi(\mathrm{R}) ;$$

poi

$$r = \varphi(\mathrm{R}) + \frac{x^2}{\mathrm{R}}\varphi'(\mathrm{R}) \quad , \quad s = \frac{xy}{\mathrm{R}}\varphi'(\mathrm{R}) \quad , \quad t = \varphi(\mathrm{R}) + \frac{y^2}{\mathrm{R}}\varphi'(\mathrm{R}) .$$

Ora l'equazione (28) diventa

$$(dx^2 + dy^2)\varphi(\mathrm{R}) + (x\,dx + y\,dy)^2 \frac{\varphi'(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} = 0 ,$$

ovvero, facendo uso di coordinate polari,

$$(d\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 d\theta^2)\varphi(\mathrm{R}) + \mathrm{R}\varphi'(\mathrm{R})\,d\mathrm{R}^2 = 0 ;$$

---

*) Pucci « *Fondamenti di Geodesia* » (vol. I, p. 102).

www.rcin.org.pl

quindi

$$\pm\frac{d\theta}{dR}=\sqrt{-\frac{f''(R)}{Rf'(R)}}\,.$$

Nel Calcolo integrale si apprenderà a risalire da questa equazione ad un'altra, in termini finiti, $c\pm\theta=F(R)$, che rappresenta due famiglie di curve, projezioni delle assintotiche sul piano dell'equatore.

b) Solo in casi specialissimi è possibile la completa determinazione delle geodetiche; ma si può tuttavia pervenire, nel caso generale, a trarre dalle (29) un notevole teorema, che agevola molto la discussione delle geodetiche e permette di rendersi conto del loro andamento sulle superficie di rotazione. Infatti si deve avere

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}:x=\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}:y\quad,\quad\text{ossia}\quad x\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}-y\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}=0\,,$$

o, ancora, successivamente,

$$\frac{d}{ds}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=0\quad,\quad x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}=c\,,$$

dove c è una costante arbitraria. Sia ψ l'angolo d'una geodetica col *meridiano*, e si noti che, essendo $-\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, 0 i coseni direttori della tangente al *parallelo*, e $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ i coseni direttori della tangente alla geodetica, si ha

$$\operatorname{sen}\psi=-\operatorname{sen}\theta\frac{dx}{ds}+\cos\theta\frac{dy}{ds}=\frac{1}{R}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right),$$

cioè $R\operatorname{sen}\psi=c$. Dunque *le geodetiche d'una superficie di rotazione incontrano i meridiani sotto angoli, il cui seno varia, lungo ciascuna geodetica, come la curvatura dei paralleli.* Questo teorema, dovuto a Clairaut, è utilissimo in Geodesia. Esso impone dei limiti alla regione solcata dalle geodetiche corrispondenti ad un dato valore (non nullo) di c. Infatti R non può diventare minore di c, in valore assoluto, e però, se immaginiamo che si percorra una geodetica nel senso in cui vanno decrescendo i paralleli, la curva andrà deviando sempre più dai meridiani, per accostarsi ai paralleli, e finirà per toccare il parallelo di raggio c, senza poterlo oltrepassare.

www.rcin.org.pl

CALCOLO INTEGRALE

IX. L'INTEGRAZIONE.

Concetti fondamentali.

1. Si chiama *integrale* di $f(x)dx$, e si rappresenta con $\int f(x)dx$, ogni funzione $F(x)$, che ha per differenziale $f(x)dx$. In altri termini, quando si scrive $\int f(x)dx = F(x)$, si vuole affermare che $f(x)dx = dF(x)$. Siccome da queste due uguaglianze si deduce, eliminando F o f,

$$f(x)dx = d\int f(x)dx \quad , \quad \int dF(x) = F(x) \ ,$$

si vede che i segni d e $\int$ si elidono a vicenda; e però, se si chiama *integrazione* l'operazione, rappresentata dal segno $\int$, mediante la quale, data f, si trova F, si può dire che *l'integrazione è l'operazione inversa della differenziazione.* Già è noto (II, 27, a) che, se $F(x)$ è una funzione che ammette il differenziale $f(x)dx$, *tutte* le altre funzioni analoghe sono rappresentate da $F(x)+C$, dove C è una *costante arbitraria*; ma la differenza dei valori che l'integrale $\int f(x)dx$, corrispondente ad un dato valore di C, prende negli estremi d'un dato intervallo (a,b), è perfettamente determinata, giacchè nel formarla sparisce il valore di C. A tale differenza, che si rappresenta con $\int_a^b f(x)dx$, si dà il nome di integrale *definito* (fra i *limiti* a e b), per distinguerla dall'integrale *indefinito* $\int f(x)dx$. Adunque

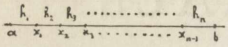
$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad , \quad \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \ ;$$

ma queste definizioni non sono soddisfacenti, perchè nulla ci dicono sull'esistenza dell'integrale, nè sul modo di calcolarlo; esse sono da ritenere piuttosto come definizioni di simboli, e però noi cercheremo di trasformarle in

www.rcin.org.pl

altre, che valgano a definire le operazioni stesse rappresentate da quei simboli.

2. Prima, per ottenere un' interpretazione dell' integrale definito, osserviamo che $F'(x) = f(x)$, ed applichiamo il teorema di Lagrangia (II, 25) in n intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, nei quali si è arbitrariamente spezzato l'intervallo (a, b). Chiamando α_i un *determinato* valore appartenente all' intervallo (x_{i-1}, x_i), di lunghezza h_i, e β_i il corrispondente valore di $f(x)$, si ha



$$F(x_1) - F(a) = h_1\beta_1 \ , \ F(x_2) - F(x_1) = h_2\beta_2, \ldots, F(b) - F(x_{n-1}) = h_n\beta_n \ .$$

Sommando si ottiene $F(b) - F(a) = \sigma_n$, dopo aver posto

$$\sigma_n = h_1\beta_1 + h_2\beta_2 + \cdots + h_n\beta_n \ .$$

Dunque, se si fa crescere n all' infinito, si può scrivere $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sigma_n$, cioè il valore dell' integrale si può considerare come limite della successione $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, i cui termini sono, del resto, tutti uguali fra loro. Ciò premesso, vogliamo dimostrare che, *se la funzione* f(x) *è continua, si può ad ogni* α_i *sostituire un numero qualunque dell' intervallo* (x_{i-1}, x_i), purchè si supponga che, nel crescere di n all' infinito, *tutti* gli intervalli parziali tendano simultaneamente a zero. Infatti, trovato quel numero h, che, in virtù del teorema di Cantor (I, 29), si può sempre far corrispondere ad ogni numero positivo ε, e supponendo che $h_1, h_2, \ldots, h_n$ siano stati già resi tutti inferiori ad h, si avrà, per qualunque valore f_i che la funzione assume nell' intervallo h_i, $|f_i - \beta_i| < \varepsilon$. Dunque, posto

$$\tau_n = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n \ ,$$

si avrà pure

$$|\tau_n - \sigma_n| \leqq \sum_1^n h_i |f_i - \beta_i| < \varepsilon \sum_1^n h_i = (b - a)\varepsilon \ .$$

Ne segue, osservando che $(b - a)\varepsilon$ si può rendere piccolo quanto si vuole,

$$\lim_{n=\infty} \tau_n = \lim_{n=\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx \ ,$$

vale a dire che anche i numeri $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ (che non sono più tutti uguali fra loro) tendono al valore dell' integrale.

3. **Definizione dell' integrale**. Ora, lasciandoci guidare dalle precedenti considerazioni, e largheggiando il più che sia possibile nelle condizioni che avremo da imporre, siamo in grado di formulare la seguente definizione: « Se, *qualunque sia il modo* di dividere l' intervallo (a, b) in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, i quali tendano a zero quando n cresce all' infinito, e *qualunque siano i valori* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, compresi fra i limiti (inferiore e su-

www.rcin.org.pl

periore) di $f(x)$ in ciascuno dei predetti intervalli (non esclusi i limiti stessi), la somma $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n$ tende sempre ad uno stesso limite, questo si chiama l'*integrale definito* di $f(x)dx$ fra a e b, e si rappresenta con $\int_a^b f(x)dx$ ». Se poi al limite b, supposto variabile, si sostituisce x, lasciando arbitrario il limite a, si ottiene la definizione dell'*integrale indefinito* $F(x)$.

4. Fra le proprietà generali degli integrali notiamo subito la seguente

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ , \qquad (k \text{ costante})$$

immediata conseguenza della definizione, come anche l'altra

$$\int_a^b (u+v+\cdots)dx = \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx + \cdots \ ,$$

evidentemente vera fintantochè le funzioni $u, v, \ldots$ di x sono in numero finito. Ora conviene sbarazzare la nozione d'integrale dalle varie restrizioni che ancora racchiude:

a) E prima di tutto, per non essere obbligati a supporre $a < b$, conveniamo che sia, in ogni caso,

$$\int_a^b = -\int_b^a , \tag{1}$$

convenzione questa ben naturale se si riflette che, quando l'intervallo $b - a$ si considera come negativo, tali conviene anche supporre che siano gli intervalli $h_1, h_2, \ldots$ nei quali va suddiviso, mentre restano inalterati i corrispondenti valori $f_1, f_2, \ldots$. Dopo ciò è facile dimostrare che si ha sempre

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b , \tag{2}$$

proprietà evidente quando c è compreso fra a e b. Nel caso opposto, se per esempio si ha $a < b < c$, si ottiene subito, osservando (1),

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b .$$

b) La definizione di $\int_a^b f(x)dx$ richiede che $f(x)$ sia *finita* nell'intervallo d'integrazione (a, b); ma questa restrizione si può togliere in parte convenendo di porre, quando $f(x)$ diventa infinita in uno o più punti c,

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b .$$

c) Si danno anche integrali estesi ad *intervalli infiniti*; ma essi deb-

www.rcin.org.pl

bono essere considerati come limiti dei valori di altri integrali, estesi ad intervalli finiti. In altri termini si ha, per definizione,

$$\int_a^{+\infty} = \lim_{x=+\infty} \int_a^x \,, \quad \int_{+\infty}^a = \lim_{x=+\infty} \int_x^a \,,$$

ed inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^a + \int_a^{+\infty} .$$

È facile constatare che le proprietà (1) e (2) sussistono anche per questi integrali.

d) In seguito all'ultima definizione non è lecito considerare un integrale, esteso ad un intervallo infinito, come il limite d'una somma $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots$. Giova tuttavia segnalare un caso, abbastanza generale, in cui, dopo avere spezzato l'intervallo (a, ∞) in infiniti intervalli $h_1, h_2, h_3, \ldots$, tendenti a zero, ed aver preso in ciascun intervallo h_i, fra i limiti di $f(x)$ in questo intervallo, un valore f_i, si può affermare che

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim(h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots) .$$

Ciò accade quando, nel dividere con la medesima legge un intervallo qualunque (x, ∞), si trova come limite della somma analoga una quantità $\rho(x)$, tendente a zero per x infinito. Infatti è chiaro che si ha

$$\int_a^x f(x)\,dx = \rho(a) - \rho(x) \quad , \quad \int_a^\infty f(x)\,dx = \rho(a) .$$

5. Tra le infinite possibili divisioni dell'intervallo (a, b) la più semplice è senza dubbio quella in parti uguali, per la quale si ha

$$\tau_n = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = (b - a)\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} ,$$

e conseguentemente

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

Per questa ragione si dà al secondo membro il nome di *valor medio* di $f(x)$ nell'intervallo (a, b). Siccome tutti i numeri f_i sono compresi fra il limite inferiore λ ed il limite superiore μ di $f(x)$ in (a, b), altrettanto si può dire della loro media aritmetica, e per conseguenza anche il valor medio di $f(x)$ è compreso fra λ e μ. Ciò premesso si consideri la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx ,$$

ed attribuito ad x un incremento h si osservi, ricordando la proprietà (2),

www.rcin.org.pl

che si ha

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(x)\,dx=hf_0\ ,$$

dove f_0, valor medio di $f(x)$ in $(x, x+h)$, si conserva finito nel tendere di h a zero, dimodochè $\lim F(x+h)=F(x)$. Dunque *la funzione* F(x) *è continua.* Si può affermare qualche cosa di più quando è continua la funzione da integrare, perchè allora λ e μ sono (I, 28) valori di $f(x)$ in (a, b); e nel passare dall'uno all'altro $f(x)$ diventa certamente uguale (I, 26), almeno una volta, al suo valor medio, sicchè, per un conveniente numero ξ dell'intervallo (a, b), si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi)\ . \tag{3}$$

Ed ora è facile dimostrare che la definizione dell'integrale, data nel § 3, concorda con quella data in principio, in quanto che *la derivata di* F(x) *è* f(x). Infatti, se si applica la (3) nell'intervallo $(x, x+h)$, si ottiene $F(x+h)-F(x)=hf(\xi)$, dove ξ, compreso fra x ed $x+h$, tende ad x quando h tende a zero. Ne segue

$$F'(x)=\lim\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim f(\xi)=f(x)\ .$$

Dopo ciò è chiaro che la formola (3) non è che l'espressione del teorema di Lagrangia, applicato all'integrale indefinito. Solo quando $f(x)$ è discontinua la nuova e l'antica definizione possono trovarsi in disaccordo; ed effettivamente si dimostra *) che *l'integrale di* $f(x)dx$, secondo il nuovo concetto, *può non esistere, quantunque* f(x) *ammetta una funzione primitiva.*

6. **Teorema**. *Affinchè esista* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è necessario e sufficiente che si possa formare una divisione dell'intervallo* (a, b) *in intervalli* $h_1, h_2, \ldots, h_n$, *tale che, chiamando* O_i *l'oscillazione di* f(x) *in* h_i, *la somma*

$$\omega_n=h_1O_1+h_2O_2+\cdots+h_nO_n$$

abbia per limite zero quando i detti intervalli, crescendo in numero, tendono simultaneamente ad annullarsi.

a) Se l'integrale esiste, vuol dire che la somma $\tau=\sum_1^n h_i f_i$ ha un limite, sempre lo stesso, comunque si scelgano i numeri f_i nei rispettivi intervalli. In particolare, quando si mettono per $f_1, f_2, \ldots, f_n$ una volta i limiti superiori nei corrispondenti intervalli, ed un'altra i limiti inferiori, si ottiene, sottraendo, $\lim\omega_n=0$, qualunque sia il modo di spezzare l'intervallo (a, b) in parti infinitesime;

---

*) Volterra, « *Giornale di Battaglini* » (1881, p. 334).

www.rcin.org.pl

b) Inversamente, se $\lim \omega_n = 0$ per qualunque modo di divisione, *le somme*

$$\tau'_{n'} = \sum_1^{n'} h'_i f'_i \quad , \quad \tau''_{n''} = \sum_1^{n''} h''_i f''_i$$

non possono tendere a limiti differenti. Consideriamo infatti la divisione in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, operata mediante i punti delle due divisioni. Un intervallo h' consta d'uno o più intervalli h, e se in ciascuno di questi si prende ad arbitrio un valore f, compreso fra i limiti estremi dei valori di $f(x)$, si ha

$$h'_i f'_i = h_{r+1} f_{r+1} + h_{r+2} f_{r+2} + h_{r+3} f_{r+3} + \cdots + h_s f_s$$
$$+ h_{r+1}(f'_i - f_{r+1}) + h_{r+2}(f'_i - f_{r+2}) + \cdots + h_s(f'_i - f_s) \ .$$

La seconda parte di questa somma non supera, in valore assoluto, il prodotto di O'_i per $h_{r+1} + h_{r+2} + \cdots + h_s = h'_i$. Dunque

$$\tau'_{n'} = \tau_n + \rho'_{n'} \quad , \quad \tau''_{n''} = \tau_n + \rho''_{n''} \ ,$$

dove

$$|\rho'_{n'}| \leqq \omega'_{n'} \quad , \quad |\rho''_{n''}| \leqq \omega''_{n''} \ .$$

Ne segue

$$\tau'_{n'} - \tau''_{n''} = \rho'_{n'} - \rho''_{n''} \quad , \quad |\tau'_{n'} - \tau''_{n''}| \leqq \omega'_{n'} + \omega''_{n''} \ .$$

Ora, poichè $\omega'_{n'}$ ed $\omega''_{n''}$ tendono a zero quando tutti gli intervalli parziali tendono ad annullarsi, anche $\tau'_{n'} - \tau''_{n''}$ tende a zero, e però non può $\tau'_{n'}$ tendere ad un limite senza che $\tau''_{n''}$ tenda allo stesso limite;

c) Vogliamo inoltre dimostrare che τ_n *tende necessariamente ad un limite quando* ω_n *tende a zero.* Dato ε positivo e piccolo quanto si vuole, si può trovare un numero δ, tale che, quando gli intervalli h siano tutti minori di δ, si abbia $\omega_n < \varepsilon$. Possiamo supporre che, crescendo n, gli intervalli h finiscano per mantenersi costantemente inferiori a δ, e diventino una volta $h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$, ed un'altra $h''_1, h''_2, \ldots, h''_{n''}$. Sieno $\tau_{n'}$ e $\tau_{n''}$ i corrispondenti valori di τ_n, ed $\omega_{n'}, \omega_{n''}$ quelli di ω_n. È chiaro che a queste somme si possono applicare le considerazioni fatte precedentemente per le τ' e τ'', e scrivere

$$|\tau_{n'} - \tau_{n''}| \leqq \omega_{n'} + \omega_{n''} < 2\varepsilon \ ,$$

per ogni coppia di valori di n' ed n'', superiori ad un certo numero. Dunque *) τ_n tende ad un limite finito;

d) Ci resta soltanto da far vedere che, *quando la somma* ω_n *tende a zero per un determinato modo di spezzare* (a, b) *in parti infinitesime, essa tende a zero per qualunque altro modo di divisione.* Se, per una data divisione in intervalli $h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$, si ha $\lim \omega'_{n'} = 0$, si può, dato ε, sup-

*) « *Analisi algebrica* » p. 97.

www.rcin.org.pl

porre che $\omega'_{n'}$ sia già stato reso inferiore ad ε; poi, in un altro modo di divisione, si può sempre supporre che gli intervalli parziali $h''_1, h''_2, \ldots, h''_{n''}$ siano già diventati minori di $\frac{\eta}{n'}$, chiamando η un altro numero positivo, arbitrariamente piccolo. Ciò premesso, consideriamo la divisione in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ottenuta mercè i punti delle due divisioni. Si ha

$$h'_i \mathsf{O}'_i = h_{r+1}\mathsf{O}_{r+1} + h_{r+2}\mathsf{O}_{r+2} + h_{r+3}\mathsf{O}_{r+3} + \ldots + h_s\mathsf{O}_s$$

$$+ h_{r+1}(\mathsf{O}'_i - \mathsf{O}_{r+1}) + h_{r+2}(\mathsf{O}'_i - \mathsf{O}_{r+2}) + \ldots + h_s(\mathsf{O}'_i - \mathsf{O}_s) ,$$

ovvero, osservando che $\mathsf{O}_{r+1}, \mathsf{O}_{x+2}, \ldots, \mathsf{O}_s$ non superano O'_i,

$$h'_i \mathsf{O}'_i \geqq h_{r+1}\mathsf{O}_{r+1} + h_{r+2}\mathsf{O}_{r+2} + \ldots + h_s\mathsf{O}_s ;$$

poi, sommando, $\omega'_{n'} \geqq \omega_n$. D'altra parte si consideri $\omega''_{n''}$. Questa somma ha in comune con ω_n tutti i termini corrispondenti ad intervalli h'', nell'interno dei quali non cadono punti della prima divisione. Gli altri termini di $\omega''_{n''}$ sono in numero minore di n', appunto perchè corrispondono ad intervalli h'', in ciascuno dei quali cade almeno uno degli $n'-1$ punti della prima divisione; e poichè ciascuno dei detti termini è inferiore al prodotto di $\eta : n'$ per un'oscillazione, che certamente non supera l'oscillazione totale O di $f(x)$ in (a, b), la loro somma è inferiore ad $\eta\mathsf{O}$. Dunque

$$\omega''_{n''} < \omega_n + \eta\mathsf{O} \quad , \text{ e però } \quad \omega''_{n''} < \omega'_{n'} + \eta\mathsf{O} < \varepsilon + \eta\mathsf{O} .$$

Se gli intervalli continuano ad impicciolire, l'ultima disuguaglianza non cessa di esser vera, vale a dire che $\omega''_{n''}$ diventa *e resta* inferiore alla quantità $\varepsilon + \eta\mathsf{O}$, arbitrariamente piccola. Dunque $\lim \omega''_{n''} = 0$.

7. Vi è un mezzo assai semplice per constatare l'integrabilità d'una funzione $f(x)$, in base al criterio precedentemente dimostrato. Dato un numero positivo ε, sia l_n la somma di quelli, fra gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, nei quali l'oscillazione di $f(x)$ supera ε. L'oscillazione di $f(x)$ in ciascuno di questi intervalli non supera l'oscillazione totale O, e negli altri intervalli parziali, la cui somma è $b - a - l_n$, essa non supera ε. Dunque

$$\omega_n \leqq (\mathsf{O} - \varepsilon) l_n + (b - a)\varepsilon .$$

Se $\lim l_n = 0$ per ogni ε, si può, dato un numero positivo η, piccolo quanto si vuole, prendere $(b-a)\varepsilon = {}^1/_2\eta$, determinare la corrispondente somma l_n, e far crescere n finchè sia e resti $\mathsf{O} l_n < {}^1/_2\eta$. Allora sarà pure $\omega_n < \eta$; quindi $\lim \omega_n = 0$. Reciprocamente, quando è soddisfatta questa condizione, siccome si ha $\omega_n > \varepsilon l_n$, è $\lim l_n = 0$ per ciascun valore di ε; vale a dire che si potrà, per ogni numero positivo η, far crescere abbastanza il numero degli intervalli parziali affinchè finisca per essere $l_n < \eta$. Adunque *per l'integra-*

www.rcin.org.pl

bilità d'una funzione occorre e basta che, per ogni coppia di numeri positivi ε *ed* η, *arbitrariamente piccoli, si riesca a spezzare l'intervallo d'integrazione in guisa che la somma degli intervalli parziali, nei quali l'oscillazione della funzione supera* ε, *sia minore di* η.

8. Se, per esempio, $f(x)$ è continua, il teorema di Cantor ci dice che si può, dato ε, rendere gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sufficientemente piccoli perchè *in tutti* l'oscillazione di $f(x)$ sia minore di ε; ed allora si avrà $l_n = 0$. Dunque *ogni funzione continua è integrabile.* Ma è chiaro che anche le funzioni discontinue possono essere integrabili: tali sono, per esempio, le *funzioni generalmente continue* (I, 22, *a*), giacchè i punti di discontinuità, in numero finito, si possono chiudere in intervalli arbitrariamente piccoli. Integrabili sono anche le *funzioni con infinite discontinuità*, tutte le volte che i punti intorno ai quali cadono infiniti punti di discontinuità, nell'intervallo d'integrazione, sono in numero finito. Infatti, isolando prima questi punti in intervalli piccoli quanto si vuole, restano altri punti di divisione, in numero finito, i quali si possono chiudere alla loro volta in intervalli arbitrariamente piccoli; e la somma di tutti questi intervalli (i soli che possano contribuire alla formazione di l_n) è piccola quanto si vuole. In parecchi altri casi *) una funzione è integrabile malgrado le infinite discontinuità che può presentare lungo l'intervallo d'integrazione; ed è facile *) dimostrare che delle sole *funzioni totalmente discontinue* si può dire che *non sono mai integrabili*, perchè, prendendo ε sufficientemente piccolo, vi sarà sempre almeno un intervallo infinitesimo, in cui l'oscillazione si manterrà maggiore di ε. Ad ogni modo si vede che, se *la continuità è condizione sufficiente per l'integrabilità*, essa *non è necessaria*. Invece si sa (II, 2, *d*, *e*) che *la continuità è condizione necessaria per la derivabilità*, ma *non è sufficiente*. Adunque il campo delle funzioni integrabili include quello delle funzioni derivabili, ed è assai più esteso. Nondimeno l'integrazione è un'operazione di gran lunga più difficile, praticamente, della derivazione; e, mentre si hanno regole generali per derivare qualunque funzione data, non si conoscono, per integrare, se non alcuni piccoli espedienti, i quali tuttavia sono largamente sufficienti per le integrazioni che occorrono nella pratica, ed abilmente adoperati conducono a risultati importantissimi anche nell'alta Matematica.

Regole d'integrazione.

9. **Integrazione diretta.** La regola che prima si presenta per calcolare un integrale è quella che risulta immediatamente dalla definizione stessa, ed il modo più naturale di applicarla consiste nel dividere in n parti uguali h l'intervallo d'integrazione (dimodochè sia $nh = b - a$), prendendo

*) Dini « *Fondamenti*, ecc. » (pp. 245-249).

www.rcin.org.pl

per ciascun intervallo parziale il valore della funzione in uno degli estremi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h=0} h \left\{ f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \cdots + f(a+nh) \right\} . \quad (4)$$

Ma altri modi di divisione si possono immaginare, che riescono talvolta più convenienti. Per esempio, se $a > 0$, si potrà porre $aq^n = b$ (con $q > 1$ tendente ad 1 per n infinito), e si avrà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{q=1} a(q-1) \left\{ f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + \cdots + q^{n-1} f(aq^{n-1}) \right\} . \quad (5)$$

10. **Esempii**: *a)* Se $f(x) = e^x$, si ha, applicando la (4),

$$\int_0^x e^x dx = \lim_{h=0} h(e^h + e^{2h} + \cdots + e^{nh}) = (e^x - 1) \lim_{h=0} \frac{h}{e^h - 1} = e^x - 1 .$$

In forma indefinita $\int e^x dx = e^x + C$.

b) Ecco un caso in cui è più utile la (5):

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \lim_{q=1} n(q-1) = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}} - 1\right) = \log \frac{x}{a} .$$

Analogamente si ha

$$\int_a^x \log x\,dx = \lim_{q=1} \sum_1^n (aq^i - aq^{i-1}) \log(aq^i)$$

$$= x \log x - a \log a - (x-a) \lim_{q=1} \frac{\log q}{q-1} = x(\log x - 1) - a(\log a - 1) .$$

In forma indefinita

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \quad , \quad \int \log x\,dx = (\log x - 1) + C .$$

c) Il calcolo precedente non è più applicabile quando $a = 0$; ma dal risultato ottenuto si deduce subito, ricordando (§ 5) la necessaria continuità delle funzioni integrali,

$$\int_0^x \log x\,dx = x(\log x - 1) - \lim_{a=0} a(\log a - 1) = x(\log x - 1) .$$

A ciò si perviene immediatamente se si adotta il modo di divisione (4), giacchè (III, 18, *b*) si ha

$$\int_0^x \log x\,dx = \lim_{h=0} h \log(n!\,h^n) = \lim_{n=\infty} \frac{x}{n}\left(n \log n - n + \cdots + n \log \frac{x}{n}\right) = x(\log x - 1) .$$

d) Facile è il calcolo dell'integrale $\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx$ quando si conosce la for-

www.rcin.org.pl

mola *)

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\,. \tag{6}$$

Infatti, posto $nh={}^1/_2\pi$, si trova

$$\int_0^{{}^1/_2\pi}\log\operatorname{sen}x\,dx=\lim_{h=0}h\log\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}=\frac{\pi}{2}\lim_{n=\infty}\log\frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}}=-{}^1/_2\pi\log 2\,.$$

Quanto alla (6) si può, per dimostrarla, partire dall' identità

$$(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})=x^n-1\,,$$

in cui $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$, ed osservare che si ha, per $x=1$, dopo aver diviso per $x-1$, $(1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})=n$. D'altra parte il modulo di $1-\omega^k$ è $2\left|\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right|$. Dunque

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}\,. \tag{7}$$

Da questa formola si deduce la (6) osservando che al primo membro si può anche dar la forma

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{(n-2)\pi}{2n}\cdots 2\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$$
$$=2^{n-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

e che il primo membro di (6) è per necessità positivo.

e) Per calcolare $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ dividiamo l' intervallo (x,∞) in intervalli tutti uguali ad h, e cerchiamo di calcolare il limite $\rho(x)$ di

$$h\left(e^{-(x+h)^2}+e^{-(x+2h)^2}+e^{-(x+3h)^2}+\ldots\ldots\right)$$

per h tendente a zero. Posto $e^{-h^2}=q$, è facile calcolare $\rho(0)$ servendosi della formola (III, 24, *d*)

$$\lim_{q=1}\sqrt{1-q}\,(q+q^4+q^9+\cdots)={}^1/_2\sqrt{\pi}\,.$$

Si ha infatti

$$\rho(0)=\lim_{h=0}h(q+q^4+q^9+\cdots)={}^1/_2\sqrt{\pi}\lim_{h=0}\frac{h}{\sqrt{1-e^{-h^2}}}={}^1/_2\sqrt{\pi}\,.$$

Ora, poichè $e^{-(x+\alpha)^2}<e^{-x^2}.e^{-\alpha^2}$, è chiaro che

$$0<\rho(x)<\rho(0)e^{-x^2}\quad,\quad\lim_{x=\infty}\rho(x)=0\;;$$

e però, ricordando ciò che si è detto innanzi (§ 4, *d*), si può affermare che

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx={}^1/_2\sqrt{\pi}\,.$$

---

*) Per la dimostrazione di varie interessanti formole, analoghe a questa, vedi il « *Lehrbuch der Algebra* » di Weber (t. I, p. 424, e seguenti).

www.rcin.org.pl

f) Similmente, per calcolare $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, bisogna sapere (I, 4, *f*) che si ha

$$\operatorname{sen} h + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2h + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3h + \ldots\ldots = {}^1/_2(\pi - h) ,$$

purchè h, positivo, sia minore di 2π. Ne segue subito

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{h=0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2} .$$

Si noti che si ha pure

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \left(\operatorname{sen}^2 h + {}^1/_4 \operatorname{sen}^2 2h + {}^1/_9 \operatorname{sen}^2 3h + \ldots\ldots \right)$$

$$= \lim_{h=0} (\operatorname{sen} 2h + {}^1/_2 \operatorname{sen} 4h + {}^1/_3 \operatorname{sen} 6h + \ldots\ldots) ;$$

quindi

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \lim_{h=0} \frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2} .$$

g) Proponiamoci ora di calcolare l'importante integrale $\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx$, che si chiama *integrale euleriano* di seconda specie: il suo valore è il limite, per h tendente a zero, di

$$h^\mu (1^{\mu-1} e^{-h} + 2^{\mu-1} e^{-2h} + 3^{\mu-1} e^{-3h} + \ldots\ldots) ,$$

cioè, ponendo $e^{-h} = q$, e richiamando un precedente risultato (III, 24, *g*),

$$\lim_{q=1} h^\mu (1^{\mu-1} q + 2^{\mu-1} q^2 + 3^{\mu-1} q^3 + \ldots) = \Gamma(\mu) \lim_{h=0} \left(\frac{h}{1 - e^{-h}} \right)^\mu = \Gamma(\mu) .$$

Dunque

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx = \Gamma(\mu) .$$

h) Dalla nota *) proprietà $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi : \operatorname{sen} \pi x$ si deduce, tenendo conto della formola (7),

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \ldots \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{\sqrt{n}} ,$$

come, del resto, si può anche direttamente dedurre dalla definizione stessa della funzione Γ. Ciò premesso, si ha

$$\lim_{h=0} h \log \Gamma(h)\Gamma(2h)\ldots\Gamma(nh) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1) \log \sqrt{2\pi} - \log \sqrt{n} \right\} ,$$

e per conseguenza

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \log \sqrt{2\pi} .$$

---

*) « *Analisi algebrica* » p. 485.

www.rcin.org.pl

Ora si può, seguendo Lerch, calcolare, più generalmente, il medesimo integrale fra i limiti μ e $\mu+1$. Designiamone il valore con $f(\mu)$, ed osserviamo che

$$f(\mu)=\int_a^{\mu+1}-\int_a^{\mu}\,,\quad f'(\mu)=\log\Gamma(\mu+1)-\log\Gamma(\mu)=\log\mu\,.$$

Ne segue, in virtù d'un risultato precedente, $f(\mu)=\mu(\log\mu-1)+f(0)$, e si giunge così alla *formola di Raabe*

$$\int_{\mu}^{\mu+1}\log\Gamma(x)\,dx=\mu\log\mu-\mu+\log\sqrt{2\pi}\,.$$

11. **Integrazione immediata.** Il metodo indicato e svolto nei paragrafi precedenti è, nella maggior parte dei casi, praticamente inattuabile, in quanto che ci manda incontro a difficoltà (*ricerche di somme*), per superare le quali occorre appunto *) la conoscenza della funzione primitiva F della funzione f da integrare. I vantaggi che sembra presentare la doppia arbitrarietà del modo di spezzare l'intervallo d'integrazione in parti infinitesime, e della scelta dei valori della funzione, sono puramente illusorii. Infatti, qualunque legge si segua per la divisione dell'intervallo, è ovvio che il *miglior* modo di scegliere i valori di f consisterebbe proprio nel prendere, per ciascun intervallo parziale, quel valore di f, il cui prodotto per la grandezza dell'intervallo è uguale all'incremento che subisce F da un estremo all'altro dell'intervallo stesso, giacchè in tal modo la somma di cui si dovrebbe cercare il limite risulterebbe immediatamente uguale al valore dell'integrale. Con ciò si vede che quel metodo, per l'eccessiva generalità sua, non ci fornisce un mezzo preciso per vincere la difficoltà essenziale, che risiede appunto nella conoscenza della funzione primitiva F. Miglior consiglio è dunque affidarsi alle conoscenze già acquistate nel calcolo delle derivate, e scrivere immediatamente

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,,\quad \int\frac{dx}{x}=\log x+C\,,\quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C\,,$$

$$\int\cos x\,dx=\operatorname{sen}x+C\,,\quad \int\operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+C\,,\quad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C\,,$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C\,,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arcsen}x+C\,;$$

poi, tenendo sempre presenti i valori di questi otto integrali, cercare di ridurre ad essi, con opportuni artificii, tutti gli altri che si ha l'occasione di incontrare nella pratica del calcolo.

12. **Esempii**: *a)* Spesso s'incontrano integrali della forma

$$\int\frac{du}{u}=\log u+C\,.$$

*) « *Analisi algebrica* » p. 287.

www.rcin.org.pl

Per esempio

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log\cos x + C = \log\frac{a}{\cos x}\ ,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{{}^1/_2 dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\ ,$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int\left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x - \log(1+e^x) + C\ ;$$

b) Sono anche frequentissimi gli integrali della forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C\ .$$

Per esempio

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C\ ,$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x - \sqrt{1-x^2} + C\ .$$

Similmente, se si osserva che $\int u\,du = {}^1/_2 u^2 + C$, si ottengono i risultati

$$\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = {}^1/_2(\operatorname{arc\,sen} x)^2 + C\ ,\quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx = {}^1/_2(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C\ ;$$

c) Altri esercizii:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C\ ,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = {}^1/_2 \int (1+\cos 2x)\,dx = {}^1/_2 x + {}^1/_2 \int \cos 2x\,dx = {}^1/_2(x + \operatorname{sen} x\cos x) + C\ .$$

Più generalmente, fondandosi sulla formola di trigonometria

$$\cos mx \cos nx = {}^1/_2\big(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\big)\ ,$$

si può calcolare qualunque integrale della forma $\int \cos\alpha x . \cos\beta x . \cos\gamma x \ldots dx$. Per esempio, dato a calcolare $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx$, si ha

$$\cos x \cos 2x = {}^1/_2(\cos x + \cos 3x)\ ;$$

quindi

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = {}^1/_4(1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)\ ;$$

finalmente

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx = {}^1/_4(x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_4 \operatorname{sen} 4x + {}^1/_6 \operatorname{sen} 6x) + C\ .$$

13. **Integrazione per sostituzione.** Per calcolare $\int f(x)dx$ è spesso conveniente assumere un' altra variabile $t = \varphi(x)$. Se da questa relazione si può ricavare $x = \psi(t)$, dimodochè $dx = \psi'(t)dt$, è chiaro che

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt\ ,$$

www.rcin.org.pl

e può darsi che questo secondo integrale sia più facile a calcolare. Se la prima integrazione si estende fra i limiti a e b, la seconda dovrà estendersi da $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$, purchè t varii, fra questi limiti, sempre in un senso, e si mantenga continua, nel qual caso si potrà evidentemente scrivere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \mathrm{F}(t)\,dt\ , \tag{8}$$

rappresentando, per brevità, con $\mathrm{F}(t)$ la funzione $f(\psi(t))\psi'(t)$. Se, invece, mentre x varia sempre in un senso da a fino a b, t varia prima in un senso fino ad $x = c_1$, poi in senso opposto fino ad $x = c_2$, *ecc.*, bisogna scindere la seconda integrazione in due o più integrazioni, estese ad intervalli, in ciascuno dei quali sia soddisfatta la condizione che t varia, con continuità, sempre in un senso; e si avrà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c_1)} \mathrm{F}_1(t)\,dt + \int_{\varphi(c_1)}^{\varphi(c_2)} \mathrm{F}_2(t)\,dt + \cdots\ ,$$

chiamando $\mathrm{F}_1(t)$ la $\mathrm{F}(t)$, calcolata in base all'espressione $\psi_1(t)$ di x nell'intervallo (a, c_1), come $\mathrm{F}_2(t)$ è calcolata in base all'espressione $\psi_2(t)$ di x in (c_1, c_2), e così via. Per esempio, se t, nel variare di x da a fino a b, partendo dal valore $\alpha = \varphi(a)$ ritorna a questo valore $\alpha = \varphi(b)$ passando (necessariamente) per un minimo o per un massimo $\beta = \varphi(c)$, è chiaro che i valori di x nell'intervallo (a, c) saranno rappresentati da una funzione $\psi_1(t)$, e da un'altra funzione $\psi_2(t)$ nell'intervallo (c, b), giacchè ad ogni valore di t, compreso fra α e β, debbono corrispondere due valori di x. Ne segue

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \mathrm{F}_1(t)\,dt + \int_\beta^\alpha \mathrm{F}_2(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (\mathrm{F}_1(t) - \mathrm{F}_2(t))\,dt\ ,$$

mentre, se non si avesse cura di fare questa osservazione, si potrebbe essere condotti ad affermare erroneamente che l'integrale è nullo, perchè $\int_\alpha^\alpha = 0$.

Ciò valga a mostrare la necessità, quando si vogliono stabilire i limiti della nuova integrazione, di studiare attentamente il modo di variare della nuova variabile. Se poi questa avesse discontinuità, per esempio una discontinuità ordinaria nel punto $x = c$, è chiaro che si dovrebbe scrivere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c-0)} \mathrm{F}(t)\,dt + \int_{\varphi(c+0)}^{\varphi(b)} \mathrm{F}(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \mathrm{F}(t)\,dt - \int_{\varphi(c-0)}^{\varphi(c+0)} \mathrm{F}(t)\,dt\ .$$

Ciò accade, in particolare, quando $\varphi(x)$, cambiando segno, diventa infinita per $x = c$, nel qual caso si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\pm\infty} \mathrm{F}(t)\,dt + \int_{\mp\infty}^{\varphi(b)} \mathrm{F}(t)\,dt\ ,$$

www.rcin.org.pl

pervenendo così ad un valore generalmente diverso da quello che si otterrebbe applicando ciecamente la (8), giacchè ne differisce per

$$\mathsf{F}(\pm\infty)-\mathsf{F}(\mp\infty)\ ,$$

se $\mathsf{F}(t)$ è l'integrale indefinito di $\mathrm{F}(t)dt$.

14. **Esempii**: *a)* Ponendo successivamente $x=at$, $a:t$, $a(1-t)$, $\log t$, si calcolano i seguenti integrali:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}t+\mathrm{C}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathrm{C}\ ,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\mp\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\frac{1}{a}\arccos t+\mathrm{C}=\pm\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+\mathrm{C}\ ,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\mp\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\arccos t+\mathrm{C}=\pm\arccos\frac{a-x}{a}+\mathrm{C}\ ,$$

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t+\mathrm{C}=\operatorname{arctg}e^x+\mathrm{C}\ .$$

Nel penultimo esempio si debbono prendere i segni superiori o i segni inferiori secondo che a è positivo o negativo. Lo stesso si deve fare nel precedente, secondo che si vuole estendere l'integrazione a valori positivi o a valori negativi di x; e del resto dall'uno all'altro di questi casi si passa cambiando x in $-x$, ed osservando che $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$. Il doppio segno si deve ai radicali quadratici, perchè questi si suppongono presi sempre col segno $+$, sicchè, per esempio, si ha $\sqrt{cx^2}=|x|\sqrt{c}$, e non $\sqrt{cx^2}=x\sqrt{c}$.

b) Mercè la sostituzione $x=\cos\theta$ si calcolano questi altri integrali:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=-2\int\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=-(\theta+\operatorname{sen}\theta)+\mathrm{C}=\operatorname{arcsen}x-\sqrt{1-x^2}+\mathrm{C}'\ ,$$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=-\int\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=-{}^1/_2(\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta)+\mathrm{C}={}^1/_2\left(\operatorname{arcsen}x+x\sqrt{1-x^2}\right)+\mathrm{C}'\ ,$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\cos^2\theta\,d\theta=-{}^1/_2(\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)+\mathrm{C}={}^1/_2\left(\operatorname{arcsen}x-x\sqrt{1-x^2}\right)+\mathrm{C}'\ .$$

c) Per calcolare $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ si può porre $x=\cot\theta$: l'integrale si trasforma in

$$-\int\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\log\cot\frac{\theta}{2}+\mathrm{C}=\log\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\mathrm{C}\ .$$

Dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\mathrm{C}\ .$$

d) Proponiamoci di calcolare $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$. Moltiplicando nu-

www.rcin.org.pl

meratore e denominatore per $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$, l'integrale si trasforma in

$$\tfrac{1}{2}\int(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})\frac{dx}{x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Di questi quattro integrali il primo ed il secondo si trasformano, mercè la sostituzione $x=1:t$, in

$$-\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=-\sqrt{t^2+1}+c' \quad , \quad -\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}=-\sqrt{t^2-1}+c'' \; ;$$

il terzo è stato calcolato precedentemente, ed il quarto vale $\operatorname{arc\,sen} x+c'''$. Dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2x}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})+\tfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})-\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x+C$$

e) Per calcolare $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ si ponga

$$(x^2-a^2):\operatorname{sen}^2\theta=(b^2-x^2):\cos^2\theta=b^2-a^2 \; ,$$

dimodochè

$$x^2=a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta \quad , \quad x\,dx=(b^2-a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta \; .$$

L'integrale dato si trasforma in $\int d\theta$, e però

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}}+C \; .$$

f) Il calcolo di $\displaystyle\int\frac{dx}{a\operatorname{sen} x+b\cos x}$ si esegue rapidamente ponendo

$$a:\cos\alpha=b:\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{a^2+b^2} \; .$$

L'integrale diventa

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}(x+\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+\alpha)+C \; ;$$

poi, sostituendo ad α il suo valore $\operatorname{arc\,tg}(b:a)$, si trova

$$\int\frac{dx}{a\operatorname{sen} x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{-a\cos x+b\operatorname{sen} x+\sqrt{a^2+b^2}}{a\operatorname{sen} x+b\cos x}+C \; .$$

g) Assumendo come variabile d'integrazione $\operatorname{tg} x$ o $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ si calcolano i seguenti integrali:

$$\int\frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)+C \; ,$$

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{sen} x}{a+b\cos x}+C \; .$$

www.rcin.org.pl

Dall'una all'altra forma del secondo integrale si passa facilmente mediante le note (III, 15, *e*) relazioni

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix} \quad , \quad \log x = 2i \operatorname{arc\,tg}\left(i\frac{1-x}{1+x}\right). \tag{9}$$

h) Per calcolare $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ supponiamo prima $q > {}^1/_4 p^2$, e facciamo $x + {}^1/_2 p = t\sqrt{q - {}^1/_4 p^2}$, dimodochè

$$dx = \sqrt{q - {}^1/_4 p^2}.dt \ , \ x^2 + px + q = (x + {}^1/_2 p)^2 + (q - {}^1/_4 p^2) = (q - {}^1/_4 p^2)(1+t^2) \ .$$

Si ottiene subito

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q - {}^1/_4 p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + {}^1/_2 p}{\sqrt{q - {}^1/_4 p^2}} + C \ .$$

Invece, se $q < {}^1/_4 p^2$, si ponga $x + {}^1/_2 p = t\sqrt{{}^1/_4 p^2 - q}$. L'integrale dato si trasforma in

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = {}^1/_2 \int \frac{dt}{t-1} - {}^1/_2 \int \frac{dt}{t+1} = {}^1/_2 \log \frac{t-1}{t+1} + C \ ,$$

diviso per $\sqrt{{}^1/_4 p^2 - q}$. Dunque

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2\sqrt{{}^1/_4 p^2 - q}} \log \frac{x + {}^1/_2 p - \sqrt{{}^1/_4 p^2 - q}}{x + {}^1/_2 p + \sqrt{{}^1/_4 p^2 - q}} + C \ .$$

Del resto le due forme dell'integrale si equivalgono in virtù delle (9).

i) Quasi senza calcolo si determinano i valori degli integrali

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx \quad , \quad \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos^2 x\, dx$$

se si osserva che ciascuno di essi si cambia nell'altro quando ad x si sostituisce ${}^1/_2\pi - x$, e che la loro somma è $\int_0^{{}^1/_2\pi} dx = {}^1/_2\pi$. Il comune valore dei due integrali è dunque ${}^1/_4\pi$.

j) In modo analogo si riesce a determinare l'integrale $\int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx$, già calcolato precedentemente. Si ha

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{{}^1/_2\pi} \log \cos x\, dx = {}^1/_2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \log(\operatorname{sen} x \cos x)\, dx \ ,$$

cioè, cambiando x in ${}^1/_2 x$ nell'ultimo integrale,

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx = {}^1/_4 \int_0^{\pi} \log({}^1/_2 \operatorname{sen} x)\, dx = -{}^1/_4 \pi \log 2 + {}^1/_4 \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx \ .$$

Se poi, cambiando x in $\pi - x$, si osserva che $\int_{{}^1/_2\pi}^{\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx$, si può anche scrivere

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx = -{}^1/_4 \pi \log 2 + {}^1/_2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx \ ,$$

www.rcin.org.pl

d'onde si trae

$$\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx = -{}^1/_2 \pi \log 2 .$$

k) Similmente si ha, mercè il cambiamento di x in $1-x$,

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \int_0^1 \log \Gamma(1-x)\, dx = {}^1/_2 \int_0^1 \log \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}\, dx = {}^1/_2 \log \pi - {}^1/_2 \int_0^1 \log \operatorname{sen} \pi x\, dx .$$

L'ultimo integrale, se vi si pone $\pi x = \theta$, diventa

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \theta\, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} \theta\, d\theta = -\log 2 .$$

Dunque

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log \sqrt{2\pi} .$$

l) È facile porre la funzione di Kronecker (I, 4, *d*) sotto forma d'integrale definito. Infatti, se si cambia x in $\pm kx$, secondo che k è positivo o negativo, si ottiene

$${}^1/_2 \pi = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \pm \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{x}\, dx ;$$

e poichè, per $k=0$, il secondo integrale è nullo, si vede che

$$\operatorname{sgn} k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{x}\, dx .$$

In modo analogo si dimostra che

$$|k| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 kx}{x^2}\, dx .$$

m) Per mostrare come si debba andar cauti, quando si cambia la variabile d'integrazione, nel fissare i nuovi limiti, osserviamo che, se si tenesse conto unicamente dei valori estremi della nuova variabile, si correrebbe il rischio di pervenire a risultati assurdi come questo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 0 .$$

Evidentemente il valore dell'integrale è $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = {}^1/_2 \pi$. L'errore sta in ciò che, quando si cambia x in $\frac{1}{x}$, l'intervallo $(-1, 1)$ non si trasforma in sè stesso, sì bene in $(-1, -\infty) + (\infty, 1)$, dimodochè si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{-\infty} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} + \int_{\infty}^{1} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} ;$$

www.rcin.org.pl

quindi, cambiando anche x in $-x$ nel primo dei due integrali del secondo membro,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\,.$$

n) Quando si presenta un integrale della forma

$$\int_{a}^{b}\frac{\varphi'(x)dx}{1+\varphi^2(x)}\,, \tag{10}$$

si è naturalmente condotti ad assumere come nuova variabile $t=\varphi(x)$. Così, purchè $\varphi(x)$ si mantenga finita e continua in (a,b), si ha subito, come valore dell'integrale,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tg}\varphi(b)-\operatorname{arc\,tg}\varphi(a)\;;$$

ma, quando $\varphi(x)$ soffre discontinuità fra i limiti dell'integrazione, bisogna ricordarsi delle osservazioni fatte in fine del precedente paragrafo. Se, per esempio, in un sol punto c, fra a e b, la funzione φ cambia segno passando per l'infinito, l'integrale proposto si scinde in

$$\int_{\varphi(a)}^{\pm\infty}d\operatorname{arc\,tg}t+\int_{\mp\infty}^{\varphi(b)}d\operatorname{arc\,tg}t$$

$$=(\pm{}^1/_2\pi-\operatorname{arc\,tg}\varphi(a))+(\operatorname{arc\,tg}\varphi(b)\pm{}^1/_2\pi)=\operatorname{arc\,tg}\varphi(b)-\operatorname{arc\,tg}\varphi(a)\pm\pi\;;$$

e però, più generalmente, se nel crescere continuo di x da a fino a b accade che $\varphi(x)$ diventa infinita k volte passando dal positivo al negativo, e k' volte passando dal negativo al positivo, si ha

$$\int_{a}^{b}\frac{\varphi'(x)dx}{1+\varphi^2(x)}=\operatorname{arc\,tg}\varphi(b)-\operatorname{arc\,tg}\varphi(a)+(k-k')\pi\,.$$

o) Nel medesimo tipo (10) si può far rientrare l'integrale

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+(x-[x])^2}\,,$$

giacchè la funzione $\varphi(x)=x-[x]$ ha la derivata $\varphi'(x)=1$, esclusa la sinistra di ciascun valore intero di x, dove cessa la continuità di φ. A tali discontinuità si deve se, per $x\geqq 1$, il valore dell'integrale non è $\operatorname{arc\,tg}(x-[x])$, come si può facilmente constatare scrivendo

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+(x-[x])^2}=\sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1}\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{1+(x-\nu)^2}+\int_{[x]}^{\infty}\frac{dx}{1+(x-[x])^2}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{x-[x]}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}(x-[x])+{}^1/_4\pi[x]\,.$$

www.rcin.org.pl

p) Se per tentare il calcolo dell'integrale $\int_0^1 x^x dx$ si pensa alla sostituzione $x^x = e^{-t}$, bisogna prima osservare che, quando x va da 0 ad 1, t cresce da 0 ad $\frac{1}{e}$ $\left(\text{valore che raggiunge per } x = \frac{1}{e}\right)$, ma va poi decrescendo fino a 0. A ciascun valore di t, fra 0 ed $\frac{1}{e}$, corrispondono dunque nell'intervallo (0,1) due valori di x, uno x' fra 0 ed $\frac{1}{e}$, l'altro x'' fra $\frac{1}{e}$ ed 1. Ciò premesso, ricordando le osservazioni fatte nel paragrafo precedente, si vede che l'integrale proposto si trasforma in

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \left(\frac{x'}{t-x'} + \frac{x''}{x''-t}\right) e^{-t} dt \ .$$

Per continuare il calcolo bisogna saper determinare x in funzione di t, distinguendo x' da x'', per la qual cosa occorrono sviluppi in serie; ma con questi si entra nel dominio d'un altro procedimento di calcolo, che sarà svolto in ultimo, e che d'altronde ci condurrà per una via più breve al valore dell'integrale proposto.

15. **Integrazione per parti**. Siano u e v due funzioni di x. Dalla formola $d\,uv = u dv + v du$ si deduce, integrando,

$$\int u dv = uv - \int v du \ .$$

Questa formola permette di calcolare $\int u dv$ quando è noto $\int v du$: ciò si chiama *integrare per parti*. Proposta un'integrazione, si può in infiniti modi porre la funzione da integrare sotto la forma $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ in guisa che $\psi(x)dx$ sia il differenziale d'una funzione *nota* v; ma bisogna aver cura di scegliere $\psi(x)$ in modo che l'integrazione di $v\varphi'(x)dx$ si presenti più facile di quella di $f(x)dx$.

16. **Esempii**: *a)* Si calcola facilmente l'integrale $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ scrivendolo sotto la forma

$$\int \sqrt{1-x^2}\, d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \int \frac{1}{x} d\sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ ;$$

quindi

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \text{arcsen}\, x + C \ .$$

b) Similmente

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \ ;$$

poi

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2} dx = {}^1/_2 (x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen}\, x) + C \ .$$

www.rcin.org.pl

c) Per calcolare gli integrali

$$\int \operatorname{sen}\log x\,dx \quad , \quad \int \cos\log x\,dx \ ,$$

si noti che l'integrazione per parti, applicata ad entrambi, dà

$$\int \operatorname{sen}\log x\,dx = x\operatorname{sen}\log x - \int \cos\log x\,dx \ , \ \int \cos\log x\,dx = x\cos\log x + \int \operatorname{sen}\log x\,dx \ ,$$

d'onde si trae

$$\int \operatorname{sen}\log x\,dx = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}\log x - \cos\log x) + C \ , \ \int \cos\log x\,dx = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}\log x + \cos\log x) + C \ .$$

d) Similmente, l'integrazione per parti, applicata agli integrali

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx \quad , \quad \int e^x \cos x\,dx$$

dà

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \quad , \quad \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \ ;$$

quindi

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = {}^1/_2 e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C \quad , \quad \int e^x \cos x\,dx = {}^1/_2 e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C \ .$$

Del resto questi integrali non differiscono sostanzialmente dai precedenti, ai quali si riducono infatti mercè la sostituzione $x = \log t$.

e) Analogamente si ha

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,d\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx = {}^1/_2(x + \operatorname{sen} x \cos x) + C \ ,$$

$$\int x \cos x\,dx = \int x\,d\operatorname{sen} x = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C \ ,$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx = 2x\operatorname{sen} x + (2 - x^2)\cos x + C \ ,$$

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\,dx = x^n \operatorname{sen} x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1)\int x^{n-2} \cos x\,dx \ , \ ecc.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1 + x^2} = x \operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1 + x^2} + C \ ,$$

$$\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,x\,dx = \int \operatorname{arc\,sen} x\,d(-\sqrt{1 - x^2}) = -\sqrt{1 - x^2}\operatorname{arc\,sen} x + x + C \ ,$$

$$\int x^{n-1} \log x\,dx = \int \log x\,d\frac{x^n}{n} = \frac{x^n}{n}\log x - \frac{1}{n}\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}\left(\log x - \frac{1}{n}\right) + C \ ,$$

$$\int \log(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C \ ,$$

$$\int \log(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x})\,dx = x \log(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) + \operatorname{arc\,sen} x - x + C \ .$$

f) Quando si sa (§ 10, *f*; 14, *l*) che l'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ vale ${}^1/_2\pi$, se ne deduce subito, integrando per parti,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}^2 x\,d\left(-\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\right)_\infty^0 + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,dx = {}^1/_2\pi \ .$$

www.rcin.org.pl

g) Proponiamoci di calcolare $\int_0^1 x^m \log^n x . dx$, nell'ipotesi che sia $m > -1$ ed n intero, non negativo. Integrando per parti si ha

$$\int x^m \log^n x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \log^{n-1} x\, dx \ .$$

È chiaro che, per $m > -1$ ed $n > 0$, il prodotto $x^{m+1} \log^n x$, nullo per $x = 1$, tende ad annullarsi alla destra di 0. Dunque

$$\int_0^1 x^m \log^n x\, dx = -\frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m \log^{n-1} x\, dx = \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} \int_0^1 x^m \log^{n-2} x\, dx = \dots ,$$

e finalmente

$$\int_0^1 x^m \log^n x\, dx = \frac{(-1)^n . n!}{(m+1)^n} \int_0^1 x^m dx = \frac{(-1)^n . n!}{(m+1)^{n+1}} \ . \tag{11}$$

h) Dato a calcolare $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ per n intero, non negativo, si scriva successivamente, integrando per parti,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (x^n e^{-x})_\infty^0 + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n(n-1) \int_0^\infty x^{n-2} e^{-x} dx = \dots ,$$

dopo avere osservato (II, 31, *a*) che, per $n > 0$,

$$(x^n e^{-x})_\infty^0 = -\lim_{x=\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \ .$$

Ne segue

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \int_0^\infty e^{-x} dx = n! (e^{-x})_\infty^0 = n! \tag{12}$$

Quando è noto questo risultato è facile servirsene per calcolare l'integrale (11) mercè la sostituzione $x = e^{-\frac{t}{m+1}}$. Si ottiene infatti

$$\int_0^1 x^m \log^n x\, dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \frac{(-1)^n . n!}{(m+1)^{n+1}} \ .$$

Del resto la formola (12) è inclusa in un'altra dimostrata (§ 10, *g*) precedentemente, giacchè $n!$ è il valore di $\Gamma(n+1)$ per n intero.

i) L'integrazione per parti, applicata agli integrali

$$\mathfrak{A}_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} \cos x\, dx \quad , \quad \mathfrak{B}_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx \ ,$$

dà

$$\mathfrak{A}_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} d \operatorname{sen} x = (x^n e^{-x} \operatorname{sen} x)_0^\infty - \int_0^\infty (n x^{n-1} - x^n) e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx \ ,$$

$$\mathfrak{B}_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} d(-\cos x) = (x^n e^{-x} \cos x)_\infty^0 + \int_0^\infty (n x^{n-1} - x^n) e^{-x} \cos x\, dx \ ,$$

www.rcin.org.pl

ossia

$$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_n - n\mathfrak{B}_{n-1} \quad , \quad \mathfrak{B}_n = -\mathfrak{A}_n + n\mathfrak{A}_{n-1} \, . \tag{13}$$

Da queste relazioni si deduce

$$\mathfrak{A}_n = n\mathfrak{A}_{n-1} - {}^1/_2 n(n-1)\mathfrak{A}_{n-2} \, , \; \mathfrak{B}_n = n\mathfrak{B}_{n-1} - {}^1/_2 n(n-1)\mathfrak{B}_{n-2} \, ,$$

e si ha così il mezzo di calcolare successivamente le $\mathfrak{A}$ e le $\mathfrak{B}$, tenendo conto dei valori iniziali $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1 = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{A}_1 = 0$. Del resto è facile trovare i valori generali di $\mathfrak{A}_n$ e $\mathfrak{B}_n$ ricorrendo al seguente artificio: posto $k_n = \mathfrak{A}_n + i\mathfrak{B}_n$, dove $i^2 = 1$, le (13) danno $k_n = {}^1/_2(1+i)nk_{n-1}$, e siccome k_0 è appunto uguale ad ${}^1/_2(1+i)$, si ha

$$k_n = n!\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} = n!\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} e^{(n+1)\frac{i\pi}{4}} \, .$$

Dunque

$$\mathfrak{A}_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cos\left(\frac{n+1}{4}\pi\right) \quad , \quad \mathfrak{B}_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{4}\pi\right) .$$

j) Ad interessanti risultati conduce il calcolo dell'integrale $\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x . dx$. L'integrazione per parti dà

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x\, d(-\cos x) = (n-1)\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx \, ,$$

d'onde si trae

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-4} x\, dx = \ldots .$$

Se n è un numero intero, positivo, si finisce per incontrare uno dei seguenti integrali

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} dx = {}^1/_2\pi \quad , \quad \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 1 \, ,$$

secondo che n è pari o dispari; quindi

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots n} \cdot \dfrac{\pi}{2} & , \text{ se } n \text{ è } \textit{pari}; \\[2ex] \dfrac{2.4.6\ldots(n-1)}{3.5.7\ldots\ldots\ldots n} & , \text{ se } n \text{ è } \textit{dispari}. \end{array} \right. \tag{14}$$

Di qui è facile dedurre la *formola di Wallis*, facendo uso delle disuguaglianze evidenti

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{2n+1} x . dx < \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{2n} x . dx < \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{2n-1} x . dx \, ,$$

che ora si possono trasformare in queste altre:

$$\frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)} < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)} .$$

www.rcin.org.pl

Ne segue

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}.$$

Dunque, osservando che, per n infinito, $\frac{2n}{2n+1}$ tende all'unità,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots\cdots$$

È questa la formola di Wallis, che non differisce dalla nota (III, 24, c) eguaglianza

$$\lim_{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{15}$$

Dopo ciò è facile constatare che le due espressioni (14) tendono ad assumere la forma unica $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, vale a dire che si ha

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\int_0^{{}^1/_2\pi}\operatorname{sen}^n x.dx=\sqrt{{}^1/_2\pi}.$$

Finalmente si osservi che l'eguaglianza (15) si trova qui stabilita indipendentemente dalla formola di Stirling (III, 18, b), e può, per conseguenza, servire appunto a determinare il valore della costante a in tale formola: $n!=an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$. Infatti il primo membro di (15) è

$$\lim_{n=\infty}\frac{(2n)!\sqrt{n}}{(n!)^2 4^n}=\frac{\sqrt{2}}{a}\lim_{n=\infty}e^{\frac{\theta-4\theta'}{24n}}=\frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Dunque $a=\sqrt{2\pi}$.

k) L'integrale $\mathfrak{J}_n=\int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx$ ci è noto (§ 10, e) per $n=0$, e si calcola facilmente per $n=1$, giacchè si ha

$$\mathfrak{J}_1={}^1/_2\int_0^\infty e^{-x^2}d(x^2)={}^1/_2(e^{-x^2})_\infty^0=\frac{1}{2}.$$

Del resto, qualunque sia n, il cambiamento di x in $\sqrt{x}$ dà $\mathfrak{J}_n={}^1/_2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Ma, supponendo ignorata questa relazione, il valore di $\mathfrak{J}_n$, per n intero, si può calcolare per parti, nel seguente modo:

$$\mathfrak{J}_n={}^1/_2\int_0^\infty x^{n-1}d(-e^{-x^2})={}^1/_2(x^{n-1}e^{-x^2})_\infty^0+\frac{n-1}{2}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x^2}dx=\frac{n-1}{2}\mathfrak{J}_{n-2},$$

$$\mathfrak{J}_n=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{1.3.5\ldots(n-1)}{2^{\frac{n}{2}}}\mathfrak{J}_0, & \text{se } n \text{ è } \textit{pari};\\[2ex] \dfrac{2.4.6\ldots(n-1)}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{se } n \text{ è } \textit{dispari}.\end{array}\right. \tag{16}$$

www.rcin.org.pl

Ciò premesso, per calcolare $\mathfrak{J}_0$, si osservi *) che l'espressione

$$\mathfrak{J}_{n+1}+2\alpha\mathfrak{J}_n+\alpha^2\mathfrak{J}_{n-1}=\int_0^\infty x^{n-1}(x+\alpha)^2e^{-x^2}dx$$

è positiva per tutti i valori reali di α, e ciò richiede che sia $\mathfrak{J}_{n-1}\mathfrak{J}_{n+1}>\mathfrak{J}_n^2$, cioè

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n}>\frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}}\ ,\quad \text{mentre}\quad \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_{n+1}}=\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n}\cdot\frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}}=\frac{2}{n}\ .$$

Dunque si ha

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n}>\sqrt{\frac{2}{n}}>\frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}}\ ,$$

e per conseguenza, successivamente,

$$\sqrt{\frac{2}{n}}>\frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}}>\sqrt{\frac{2}{n+1}}\ ,\quad \lim_{n=\infty}\frac{\mathfrak{J}_n\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{n+1}}=\sqrt{2}\ ,\quad \lim_{n=\infty}\frac{\mathfrak{J}_{2n}\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{2n+1}}=1\ .$$

Basta ora sostituire le espressioni (16) nell'ultima eguaglianza per ottenere, in virtù di (15),

$$\mathfrak{J}_0={}^1/_2\lim\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}={}^1/_2\sqrt{\pi}\ .$$

È poi facile constatare che le (16) tendono a confondersi, per n infinito, nell'unica forma assintotica

$$\mathfrak{J}_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2e}\right)^n}\ .$$

17. **Integrazione per serie.** *Se in un dato intervallo finito* (a, b) *la serie di funzioni continue*

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots\cdots$$

converge uniformemente, si ha

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\int_a^b u_3(x)dx+\cdots$$

Sappiamo infatti (III, 6) che, nelle condizioni dell'enunciato, $f(x)$ è, come le $u(x)$, una funzione continua, e per conseguenza (§ 8) integrabile, dimodochè, chiamato $\varphi_n(x)$ il *resto* della serie data, si può scrivere

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)dx+\int_a^b \varphi_n(x)dx\ .$$

Ora, dato ε positivo e piccolo quanto si vuole, si sa che si può trovare un numero tale, che per *tutti* i valori di n superiori a questo numero, e *qualunque sia* x, si abbia $|\varphi_n(x)|<\varepsilon$. Dunque si avrà pure, immaginando spez-

*) Stieltjes « *Nouvelles Annales de Mathématiques* » (1890, p. 479).

www.rcin.org.pl

zato (a, b) in tanti intervalli dalle radici di $\varphi_n(x)$,

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \leqq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\,\varepsilon\ ,$$

e conseguentemente

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = 0\quad,\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots\ .$$

In particolare si noti che l'integrazione termine a termine è sempre applicabile alle serie di potenze.

18. **Esempii**: *a)* L'integrazione per serie si può adoperare per isvolgere una funzione in serie di potenze, quando è noto lo sviluppo della sua derivata. Per esempio

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots\ ,$$

$$\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots\ ,$$

purchè non sia, nei secondi membri, $x^2 > 1$.

b) Per calcolare certi integrali definiti è spesso utile l'integrazione per serie. Così, per esempio, il valore (*cfr.* § 14, *p*) di $\int_0^1 x^x dx$ si calcola rapidamente facendo uso dello sviluppo

$$x^x = e^{x\log x} = 1 + \frac{x\log x}{1} + \frac{x^2\log^2 x}{1.2} + \frac{x^3\log^3 x}{1.2.3} + \cdots\ .$$

Integrando, infatti, e ricordando il risultato (11), si ottiene subito

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \log^n x\, dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\ ,$$

cioè

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots = 0{,}783\ldots\ .$$

c) Inversamente si può far servire l'integrazione per serie al calcolo della somma di talune serie, col dare a queste la forma d'integrali definiti. Per esempio, se si vuol conoscere la somma $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$, basterà osservare che il suo valore è quello dell'integrale

$$\int_0^1 (1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + \cdots)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1-2x}{\sqrt{3}}\right)_1^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

Dunque

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

www.rcin.org.pl

Similmente la somma della serie $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\dots$ è data dall'integrale

$$\int_0^1 (x-x^2+x^4-x^5+\dots)dx=\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+x^2}=\left(\log\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)_0^1,$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\dots=\log\sqrt{3}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

d) Il primo dei due risultati or ora ottenuti è incluso, per $\alpha={}^1/_3\pi$, nella nota formola (I, 22, *e*)

$$\operatorname{sen}\alpha+{}^1/_2\operatorname{sen}2\alpha+{}^1/_3\operatorname{sen}3\alpha+\dots\dots=\frac{\pi-\alpha}{2}+\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]\pi, \qquad (17)$$

che si può stabilire nello stesso modo, cioè integrando fra 0 ed 1 i due membri dell'eguaglianza

$$\operatorname{sen}\alpha+x\operatorname{sen}2\alpha+x^2\operatorname{sen}3\alpha+\dots\dots=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Così la somma della serie proposta, purchè si escludano i valori di α, che annullano $\operatorname{sen}\alpha$, si può esprimere nel seguente modo:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\alpha dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)_0^1=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}(\cot\alpha).$$

Essa (I, 4, *c*) vale dunque $\operatorname{arc\,tg}\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)$, giacchè $\cot\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<1$. L'espressione così ottenuta non differisce dalla (17), e rappresenta la somma della serie anche se α è un multiplo dispari di π, ma non ha significato quando α è un multiplo pari di π, nel qual caso, come si sa, anche la (17) cessa di esser valida.

e) Con successive integrazioni dalla (17) si deducono infinite altre formole. Per eseguire tali integrazioni è utile osservare che, se si pone $\rho(x)=x-[x]$, si ha (*cfr.* § 14, *o*)

$$\int_0^x f(\rho(x))dx=\int_0^{\rho(x)} f(x)dx+[x]\int_0^1 f(x)dx. \qquad (18)$$

Ciò premesso, l'integrale del secondo membro di (17) è

$$\pi\int_0^\alpha\left(\frac{1}{2}-\rho\right)d\alpha=\pi^2\rho(1-\rho),$$

dove con ρ si vuol designare brevemente $\rho\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)$. L'integrale del primo membro, fra gli stessi limiti, è

$$\frac{1-\cos\alpha}{1^2}+\frac{1-\cos2\alpha}{2^2}+\frac{1-\cos3\alpha}{3^2}+\dots.$$

Ora, uguagliando fra loro i valori di queste due espressioni per $\rho=\frac{1}{2}$, si trova $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots=\frac{\pi^2}{8}$; e poichè

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right),$$

www.rcin.org.pl

si ha pure

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{6}\,;$$

quindi

$$\frac{\cos\alpha}{1^2}+\frac{\cos 2\alpha}{2^2}+\frac{\cos 3\alpha}{3^2}+\cdots=\pi^2\left(\frac{1}{6}-\rho+\rho^2\right).$$

Con un'altra integrazione si ottiene, osservando (18),

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^3}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^3}+\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{3}\rho(1-\rho)(1-2\rho)\,,$$

ed in particolare, per $\rho=\frac{1}{4}$,

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}\,;\ \textit{ecc.}$$

Così proseguendo si giunge a scoprire le formole generali

$$\frac{\cos\alpha}{1^p}+\frac{\cos 2\alpha}{2^p}+\frac{\cos 3\alpha}{3^p}+\cdots=\pm 2^{p-1}\frac{\pi^p}{p!}(\mathrm{B}-\rho)^p\ ,\quad (p=2,4,6,\ldots)$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^p}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^p}+\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3^p}+\cdots=\mp 2^{p-1}\frac{\pi^p}{p!}(\mathrm{B}-\rho)^p\ ,\quad (p=3,5,7,\ldots)$$

dove s'intende che alle potenze $\mathrm{B}^1, \mathrm{B}^2, \mathrm{B}^3, \mathrm{B}^4, \ldots$, nello sviluppo di $(\mathrm{B}-\rho)^p$, debbansi sostituire i *numeri* *) *di Bernoulli*:

$$\mathrm{B}_1=\frac{1}{2}\ ,\ \mathrm{B}_2=\frac{1}{6}\ ,\ \mathrm{B}_3=0\ ,\ \mathrm{B}_4=-\frac{1}{30}\ ,\ \mathrm{B}_5=0\ ,\ \mathrm{B}_6=\frac{1}{42}\ ,\ \ldots\ldots$$

f) Se si osserva che l'integrale

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,.\,dx$$

è generalmente nullo, tranne quando $m=\pm n$, nel qual caso il suo valore è $\pm{}^1/_2\pi$, si dimostra facilmente, dopo aver posto

$$\varphi(x)=a_1\operatorname{sen}x+a_2\operatorname{sen}2x+a_3\operatorname{sen}3x+\cdots\,,\ \psi(x)=b_1\operatorname{sen}x+b_2\operatorname{sen}2x+b_3\operatorname{sen}3x+\cdots\,,$$

che

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\psi(x)\,dx\ .$$

Per esempio, se si fa $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^3}$, e si prende come variabile d'integrazione $t=1-2\rho$, dimodochè $\varphi=\frac{\pi}{2}t, \psi=\frac{\pi^3}{12}t(1-t^2)$, si ottiene subito

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{12}\int_0^1(t^2-t^4)\,dt=\frac{\pi^4}{90}\,.$$

---

*) « *Analisi algebrica* » p. 280.

www.rcin.org.pl

g) Il valore (*cfr.* § 10, *f*) di $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ si può calcolare raccogliendo tutti gli elementi che corrispondono ad uno stesso valore assoluto di $\operatorname{sen} x$. Così, preso x fra 0 ed $^1/_2\pi$, per gli archi $\pi - x, 2\pi + x, 3\pi - x, 4\pi + x, \ldots$ si avrà un valore unico del seno, e per gli archi $\pi + x, 2\pi - x, 3\pi + x, 4\pi - x, \ldots$ si avrà il medesimo valore, cambiato di segno. Ne segue che l'integrale proposto si può scrivere nel seguente modo:

$$\int_0^{^1/_2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \ldots\right) \operatorname{sen} x\, dx .$$

D'altra parte dalla nota formola *)

$$^1/_2 \cot \frac{x}{2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{4\pi - x} + \frac{1}{4\pi + x} - \frac{1}{6\pi - x} + \ldots$$

si deduce, cambiando x in $\pi - x$,

$$^1/_2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x} + \frac{1}{5\pi - x} - \frac{1}{5\pi + x} + \ldots ,$$

poi, sommando,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x} - \ldots .$$

Dunque

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^{^1/_2\pi} dx = {}^1/_2\pi .$$

È facile **) porre questo calcolo al sicuro da ogni obbiezione.

Integrazione multipla.

19. **Integrazione indefinita.** Da quanto si è venuto fin qui esponendo apparisce chiaro che il problema della semplice integrazione consiste, in fondo, nel determinare y, se si può, quando è nota la funzione $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Non si ha un problema sostanzialmente nuovo se la funzione incognita dipende da più variabili, come quando si vuol determinare, per esempio, una funzione z delle variabili indipendenti x ed y conoscendo $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)$, giacchè, nel prenderne la derivata parziale rispetto ad x, la z si considera come funzione della sola x, e tale si dovrà, per conseguenza, considerare anche nell'integrarla, vale a dire che si avrà $z = \int f(x, y)\, dx$, intendendo che, nell'integrazione, si deve trattare la y come costante, ed avendo perciò cura di osservare che per *costante* arbitraria, in questa integrazione, si

*) «*Analisi algebrica*» p. 480.

**) Vedi il «*Calcolo integrale*» di d'Arcais, p. 198.

www.rcin.org.pl

deve intendere una quantità arbitraria *indipendente da* x, che potrà dunque dipendere da y, e propriamente sarà una *funzione arbitraria* di y. Altrettanto dicasi della determinazione di y quando si conosce $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$, o di z quando è data, per esempio, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f(x,y)$ o qualunque altra derivata, presa sempre rispetto ad una sola variabile. Due o più integrazioni semplici, eseguite successivamente, condurranno in ogni caso al risultato, senza che vi sia nulla da aggiungere alle cose già dette. Il primo problema veramente nuovo che ci si presenta è la determinazione di z quando è data la funzione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f(x,y)\ . \tag{19}$$

Siccome il primo membro è la derivata, rispetto ad x, di $\frac{\partial z}{\partial y}$, *ottenuta supponendo* y *costante*, si ha $\frac{\partial z}{\partial y}=\int f(x,y)dx$; poi, integrando nuovamente, *nell'ipotesi che* x *si mantenga costante*, $z=\int dy \int f(x,y)dx$. Considerando invece il primo membro di (19) come la derivata, rispetto ad y, di $\frac{\partial z}{\partial x}$, si ottiene $z=\int dx \int f(x,y)dy$. Il comune risultato di queste coppie di successive integrazioni semplici, fatte rispetto a variabili diverse, indipendenti fra loro, si chiama *integrale doppio*, e si rappresenta così:

$$z=\int\int f(x,y)dx\,dy\ . \tag{20}$$

Se in ciascuna integrazione semplice si ha cura di mettere in evidenza la parte arbitraria, si riconosce che, nota una particolare funzione $z=\mathrm{F}(x,y)$ soddisfacente alla (19), tutte le funzioni soddisfacenti alla medesima equazione son date dalla formola

$$z=\mathrm{F}(x,y)+\varphi(x)+\psi(y)\ ,$$

dove φ e ψ sono simboli di funzioni arbitrarie, indipendenti. Ciò che nell'integrazione doppia prende il posto della costante arbitraria dell'integrazione semplice è dunque la somma di due funzioni arbitrarie, una della sola x, l'altra della sola y.

20. **Integrazione definita.** Nell'integrazione definita semplice la limitazione imposta alla variabile si può esprimere mediante la disuguaglianza $(x-a)(x-b)\leqq 0$, che definisce appunto l'intervallo (a,b); e, più generalmente, qualunque disuguaglianza $g(x)\leqq 0$ può rappresentare uno o più intervalli, costituenti il campo d'integrazione. Similmente, se il calcolo dell'integrale (20) si esegue in guisa che le variabili x ed y, pur rimanendo indipendenti l'una dall'altra, abbiano i rispettivi campi di variazione vincolati in modo che debba essere costantemente soddisfatta una certa disuguaglianza

$$g(x,y)\leqq 0\ , \tag{21}$$

il risultato (20) della doppia integrazione si dice *definito*, e la disuguaglianza

www.rcin.org.pl

(21) definisce il campo dell'integrazione. Suppongasi, per fissare le idee, che, per un dato valore di x, dalla (21) si possa trarre $a(x) \leqq y \leqq b(x)$, e che questa limitazione permetta l'esistenza di y, purchè x resti compresa fra certi limiti α e β, che nei casi più ovvii sono radici dell'equazione $a(x) = b(x)$. Allora l'integrale (20), esteso al campo (21), va calcolato nel seguente modo:

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy \ . \tag{22}$$

In altri termini, se si trova che, nella supposizione di x costante, $F(x,y)$ è una funzione primitiva di $f(x,y)$, si ottiene per z il valore (costante)

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} \{ F(x, b(x)) - F(x, a(x)) \}\, dx \ .$$

21. **Esempio**: Se il campo dell'integrazione è definito dalla disuguaglianza $x^2 + y^2 \leqq 2x$, si deve avere $-\sqrt{2x - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x - x^2}$, e ciò è possibile solo per x compreso fra 0 e 2. Dunque l'integrale (20), esteso al detto campo, ha il valore

$$z = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy \ ;$$

ma si può anche, invertendo l'ordine delle integrazioni, osservare che, fissato y, dev'essere $1 - \sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{1-y^2}$, e però y non può cadere fuori dell'intervallo $(-1, 1)$. Quindi

$$z = \int_{-1}^{+1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \ .$$

Ne segue che, se $\varphi(x,y)$ è una funzione primitiva di $f(x,y)$, ottenuta supponendo costante x, e se $\psi(x,y)$ è un'altra funzione primitiva, ottenuta considerando invece y come costante, il valore dell'integrale $\iint f(x,y)\,dx\,dy$, esteso al campo $x^2 + y^2 \leqq 2x$, si può mettere sotto l'una o l'altra delle seguenti forme:

$$\int_0^2 \{ \varphi(t, \sqrt{2t - t^2}) - \varphi(t, -\sqrt{2t - t^2}) \}\, dt \ ,$$

$$\int_{-1}^{+1} \{ \psi(1 + \sqrt{1 - t^2}, t) - \psi(1 - \sqrt{1 - t^2}, t) \}\, dt \ .$$

22. Poichè un integrale doppio si può considerare come il risultato dell'*integrazione d'un integrale*, è naturale domandarsi anche come si esegua la *derivazione d'un integrale* rispetto ad una variabile, indipendente dalla variabile d'integrazione. Il rapporto incrementale della funzione $\varphi(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$ è

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\, dy = \int_a^b f'_x(x + \theta h, y)\, dy \ ,$$

www.rcin.org.pl

dove θ è compreso fra 0 ed 1. Ora, se ad ogni numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può far corrispondere, *qualunque sia* y in (a,b), un numero δ, tale che per $|h|<\delta$ si abbia sempre $|f'_x(x+h,y)-f'_x(x,y)|<\varepsilon$, è chiaro che si avrà

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\int_a^b f'_x(x,y)\,dy\right|<(b-a)\varepsilon\ ,$$

e per conseguenza

$$\varphi'(x)=\lim_{h=0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\int_a^b f'_x(x,y)\,dy\ .$$

Qui è utile notare che la condizione precedente è sempre soddisfatta da f'_x quando esiste ed è finita la sua derivata f''_{xx}, giacchè mantenendosi questa, in valore assoluto, minore d'un certo numero μ, basterà prendere $|h|<\varepsilon:\mu$ perchè sia

$$|f'_x(x+h,y)-f'_x(x,y)|<\frac{\varepsilon}{\mu}|f''_{xx}(x+\theta h,y)|<\varepsilon\ .$$

Adunque per derivare un integrale rispetto ad una variabile, indipendente dalla variabile d'integrazione, *basta derivare la funzione sottoposta all'integrazione.* Se poi i limiti a e b sono funzioni di x, la derivata si ottiene considerando φ come una funzione composta (IV, 4), ed osservando che la derivata d'un integrale rispetto ad un suo limite è la funzione integranda, calcolata nel detto limite, e presa col suo segno o col segno opposto secondo che si tratta del limite superiore o del limite inferiore. In tal modo si ottiene subito

$$\varphi'(x)=b'f(x,b)-a'f(x,a)+\int_a^b f'_x(x,y)\,dy\ .$$

23. Ciò premesso, tornando all'integrazione, supponiamo nuovamente a e b costanti, e proponiamoci di trovar l'integrale, fra i limiti α e β, dell'integrale $\varphi(x)$. Evidentemente, posto

$$\psi(x,y)=\int_\alpha^x f(x,y)\,dx\quad,\quad F(x)=\int_a^b \psi(x,y)\,dy\ ,$$

si ha

$$F'(x)=\int_a^b \psi'_x(x,y)\,dy=\int_a^b f(x,y)\,dy=\varphi(x)\ ;$$

poi

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=F(\beta)-F(\alpha)=\int_a^b \psi(\beta,y)\,dy=\int_a^b dy\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\ .$$

Dunque, per integrare un dato integrale definito, rispetto ad una variabile indipendente dalla variabile d'integrazione, *basta integrare la funzione sot-*

www.rcin.org.pl

toposta alla data integrazione. In altri termini, ponendo per $\varphi(x)$ la sua espressione,

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \ .$$

Se poi i limiti dell'integrazione proposta sono anch'essi funzioni di x, è sempre possibile sostituir loro limiti costanti rispetto ad un'altra variabile d'integrazione: basta porre $y = a + (b-a)t$.

24. **Nuova definizione.** La precedente definizione dell'integrale doppio ha gli stessi inconvenienti della definizione d'integrale semplice, data in principio del Calcolo integrale: bisogna pertanto trasformarla in guisa che ci permetta di trovare le condizioni per l'esistenza dell'integrale, e ci mostri inoltre la via per calcolarne il valore. Supponiamo *finito* il campo di integrazione, vale a dire che sia possibile assegnare due intervalli finiti (α,β) e (γ,δ), nei quali debbano rimanere le variabili x ed y, rispettivamente, se si vuole che la limitazione (21) sia soddisfatta. Dividiamo (α,β) in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, e (γ,δ) in intervalli $k_1, k_2, \ldots, k_m$, tutti tendenti a zero (con m ed n crescenti necessariamente all'infinito), ma senza che alcun legame sussista fra loro. Supponiamo *finita* anche la funzione, e conveniamo di considerarla come nulla fuori del campo d'integrazione. Quando x ed y variano rispettivamente negli intervalli h_i e k_j, rimanendo sempre indipendenti l'uno dall'altro, i valori della funzione restano compresi fra il limite inferiore ed il limite superiore: entro questi limiti si scelga un numero f_{ij}, e si consideri la somma doppia

$$\sum_{i,j} h_i k_j f_{ij} = h_1 k_1 f_{11} + h_1 k_2 f_{12} + h_2 k_1 f_{21} + \cdots + h_n k_m f_{nm} \ .$$

Se questa, al crescere indefinito di m e di n, tende ad un limite che non dipende dalla legge seguìta per costruire gli intervalli h e k, nè dalla scelta dei valori f, al limite stesso si dà il nome d'*integrale definito* nel campo assegnato. Posta questa definizione, non è difficile trarne conseguenze analoghe a quelle che si sono avute per l'integrazione semplice, ed in particolare se ne può dedurre la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale; ma noi qui vogliamo limitarci alla definizione, rinviando il lettore ai trattati completi di Calcolo.

25. Ci resta tuttavia da far vedere che, se l'integrale esiste, il suo valore si può ottenere nel modo già indicato nel § 20. Infatti, ammessa *a priori* l'esistenza dell'integrale, ci sarà lecito far tendere all'infinito prima m, poi n, e scegliere il valore f_{ij} fra il limite inferiore ed il limite superiore dei valori che $f(x,y)$ assume quando, lasciando ferma la x nell'estremo inferiore dell'intervallo h_i, si fa variare y in k_j. Allora la doppia somma considerata precedentemente si scinde in n somme semplici, una delle quali è

$$h_i(k_1 f_{i1} + k_2 f_{i2} + k_3 f_{i3} + \cdots + k_m f_{im}) \ ,$$

www.rcin.org.pl

ed ha per limite

$$h_i \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)\,dy = h_i \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy = h_i \mathrm{F}_i \ ,$$

rappresentando con F_i il valore che una certa funzione di x prende nell'estremo inferiore dell'intervallo h_i. Ora, se facciamo crescere all'infinito anche n (fin qui mantenuto costante insieme alle h), troviamo come limite della doppia somma

$$\lim_{n=\infty}(h_1\mathrm{F}_1 + h_2\mathrm{F}_2 + h_3\mathrm{F}_3 + \cdots + h_n\mathrm{F}_n) = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy \ ,$$

cioè precisamente il doppio integrale (22). Dopo ciò è chiaro che invertire l'ordine delle integrazioni significa far crescere all'infinito prima n, poi m; ma infiniti altri modi di far tendere m ed n all'infinito si possono immaginare, ed essi debbono tutti fornire un valore unico per l'integrale perchè sia lecito dire che questo esiste. Se riflettiamo alle svariate forme che può assumere *) una somma doppia quando si tenta di ridurla ad una somma di somme semplici, riusciamo a spiegarci perchè la possibilità d'invertire l'ordine delle integrazioni sia tanto limitata. Questa inversione è tuttavia un prezioso mezzo di ricerca, che si adopera spesso con grande utilità; ma nel farne uso non bisognerà mai dimenticare che può condurre a risultati erronei, quando diventa infinita la funzione, o una sua prima derivata, o pure quando è infinito il campo stesso dell'integrazione.

26. **Cambiamento di variabili.** Supponiamo che nell'integrale $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ si voglia effettuare la sostituzione $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, assumendo u e v come nuove variabili (indipendenti) d'integrazione. Per la mutua indipendenza delle funzioni x ed y si richiede che sia diverso da zero il determinante

$$\mathrm{D} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Ciò premesso, sia $\mathrm{F}(u,v)$ ciò che diventa $f(x,y)$ per la predetta sostituzione, e scriviamo l'integrale nel seguente modo: $\int dy \int f(x,y)\,dx$. Nella prima integrazione y si suppone costante, e però si ha

$$\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = 0 \ ;$$

quindi

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v}}\right)du = \frac{\mathrm{D}}{\frac{\partial y}{\partial v}}\,du \ .$$

---

*) « *Analisi algebrica* » p. 170.

www.rcin.org.pl

Dunque l'integrale diventa

$$\int dy \int \mathrm{F}(u,v) \frac{\mathrm{D}}{\frac{\partial y}{\partial v}} du = \int du \int \mathrm{F}(u,v) \frac{\mathrm{D}}{\frac{\partial y}{\partial v}} dy \ .$$

Nell'integrazione attuale (rispetto ad y) è u che deve rimanere costante, e però

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \frac{\partial y}{\partial v} dv \ .$$

Dunque l'ultimo integrale doppio si trasforma in $\int du \int \mathrm{F}(u,v) \mathrm{D} dv$. Finalmente

$$\int\int f(x,y) dx dy = \int\int \mathrm{F}(u,v) \mathrm{D} du dv \ .$$

Più generalmente si può dimostrare che

$$\int\int \ldots \int f(x,y,z,\ldots) dx dy dz \ldots = \int\int \ldots \int \mathrm{F}(u,v,w,\ldots) \frac{\partial(x,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)} du dv dw \ldots \ .$$

27. **Esempii**: *a)* Passando, nel piano, dalle coordinate cartesiane alle polari, si ha $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\theta$, e

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \ .$$

Dunque

$$\int\int f(x,y) dx dy = \int\int f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta) r dr d\theta \ . \qquad (23)$$

b) Similmente, nello spazio, chiamando φ la *longitudine* e ψ la *latitudine*, si ha $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\psi$, $z = r\,\mathrm{sen}\psi$, e conseguentemente

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = r^2 \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \mathrm{sen}\varphi\cos\psi & \mathrm{sen}\psi \\ -\mathrm{sen}\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -\cos\varphi\,\mathrm{sen}\psi & -\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = r^2\cos\psi \ ;$$

quindi

$$\int\int\int f(x,y,z) dx dy dz = \int\int\int f(r\cos\varphi\cos\psi, r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\psi, r\,\mathrm{sen}\psi) r^2 \cos\psi dr d\varphi d\psi$$

28. **Esercizii**: *a)* Per vedere come l'ordine delle integrazioni possa influire sul risultato, si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \ , \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx = -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2} \ ,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \ , \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4} \ .$$

Si osservi che, in entrambi i casi, la funzione sottoposta all'integrazione diventa infinita nel punto $(0,0)$. Nondimeno esistono gli integrali indefiniti

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-y}{x+y} + \varphi(x) + \psi(y) \quad , \quad \mathrm{arc\,tg}\frac{x}{y} + \varphi(x) + \psi(y) \ ,$$

www.rcin.org.pl

ma sono discontinui nel detto punto, in quanto che possono assumere, intorno ad esso, qualunque valore arbitrariamente prestabilito.

b) Con procedimento molto in uso, e che non è, ma si può *) rendere rigoroso, si riesce a calcolare l'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, già considerato (§ 10, *f*; 18, *g*), osservando che, per x positivo,

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy ,$$

e conseguentemente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx \, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx .$$

Intanto, poichè (per $y > 0$)

$$(e^{-xy} \cos x)_0^\infty = -1 \quad , \quad (e^{-xy} \operatorname{sen} x)_0^\infty = 0 ,$$

l'integrazione per parti dà

$$\int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - y \int_0^\infty e^{-xy} \cos x \, dx = 1 - y^2 \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx ,$$

d'onde si trae

$$(1 + y^2) \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx = 1 .$$

Dunque

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = (\operatorname{arctg} y)_0^\infty = {}^1/_2 \pi .$$

c) Per calcolare il valore $\mathfrak{J}$ dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, già ottenuto precedentemente per altre vie (§ 10, *e*; 16, *k*), si consideri l'integrale doppio

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2 + y^2)} dx \, dy = \int_0^\infty \mathfrak{J} e^{-x^2} dx = \mathfrak{J}^2 , \tag{24}$$

e si cerchi di calcolarlo in altro modo. Si scriva

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy ,$$

e nella prima integrazione (rispetto ad y) si sostituisca ad y un'altra variabile t, definita così: $y = tx$. Si ottiene

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} x dx \int_0^\infty e^{-t^2 x^2} dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2} . x dx .$$

---

*) Vedi, per esempio, il « *Calculo integral* » di Gomes-Teixeira (*Primeira parte*, p. 94) o il « *Traité d'Analyse* » di Picard (t. I, p. 34).

www.rcin.org.pl

Intanto si ha subito

$$\int e^{-(1+t^2)x^2}.xdx = -\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{2(1+t^2)} + C \quad , \quad \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}.xdx = \frac{1}{2(1+t^2)} .$$

Dunque, successivamente, osservando che $\mathfrak{J}$ dev'essere positivo,

$$\mathfrak{J}^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \mathfrak{J} = {}^1/_2\sqrt{\pi} .$$

d) Al risultato precedente si perviene anche calcolando l'integrale (24) dopo averlo trasformato secondo la formola (23). Se si osserva che r va da 0 a $+\infty$, e θ da 0 ad ${}^1/_2\pi$, quando x ed y assumono, indipendentemente l'uno dall'altro, tutti i valori positivi, si ottiene subito

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty\int_0^{{}^1/_2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{4} \ , \ \mathfrak{J} = {}^1/_2\sqrt{\pi} .$$

Del resto questo procedimento *), privo di rigore, non differisce in sostanza dal precedente, come è facile riconoscere osservando che $t = \operatorname{tg}\theta$.

29. **Integrazione dei differenziali totali.** Il problema dell'integrazione multipla si presenta nel modo più naturale come l'estensione del problema trattato in principio (§ 1), quando si propone di determinare una funzione di *due o più variabili* indipendenti, il cui *differenziale totale* sia noto. Così, nel caso più semplice, data l'espressione differenziale $u(x,y)dx + v(x,y)dy$, domandiamoci, prima di tutto, se essa è, come si suol dire, un differenziale esatto, cioè se può rappresentare il differenziale di qualche funzione z delle variabili indipendenti x ed y. Ciò equivale a domandarsi se esiste la funzione z per la quale si ha

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u(x,y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = v(x,y) \ , \tag{25}$$

e si vede subito che per tale esistenza è necessario (IV, 3) che sia

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \ , \tag{26}$$

almeno nel caso, al quale vogliamo limitarci, che le funzioni u e v e le loro derivate prime siano continue. Ora noi, tentando l'effettiva determinazione di z, incontreremo la condizione *necessaria* (26), ma la troveremo anche *sufficiente* per l'esistenza di z. Integrando (§ 19) infatti la seconda delle (25), si ottiene $z = \int v dy + \varphi(x)$; poi, derivando questa uguaglianza rispetto ad x, e tenendo presente la prima delle (25), si vede (§ 22) che dev'essere ancora

$$\varphi'(x) = u(x,y) - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy \ ;$$

*) Indicato da Poisson ed emendato da Cayley nel « *Quarterly Journal of Mathematics* » (1872, p. 120). Vedi i « *Mélanges mathématiques* » di Mansion (p. 15) ed il « *Traité d'Analyse* » di Picard (t. I, p. 103).

www.rcin.org.pl

ed affinchè il secondo membro sia, come il primo, *indipendente da* y, è necessario e sufficiente che sia nulla la derivata

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u-\int\frac{\partial v}{\partial x}dy\right)=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x},$$

vale a dire che $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$ siano espresse da una stessa funzione $f(x,y)$. Se questa condizione è soddisfatta, si ha

$$z=\int vdy+\int\left(u-\int\frac{\partial v}{\partial x}dy\right)dx=\int udx+\int vdy-\iint fdxdy\ ;$$

e questo risultato si riduce subito alla forma (20) osservando che $\int u\,dx=\int vdy=\iint f\,dx\,dy$. Dunque: *affinchè* udx + vdy *sia un differenziale esatto occorre e basta che si abbia* $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$.

30. Per l'esistenza d'una funzione Φ delle variabili indipendenti x,y,z, che abbia il differenziale totale $d\Phi=udx+vdy+wdz$, sono necessarie e sufficienti le condizioni

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\ . \tag{27}$$

Infatti, se si comincia dall'integrare $\frac{\partial\Phi}{\partial z}=w$ (supponendo x ed y costanti), si ottiene $\Phi=\int wdz+\varphi(x,y)$; quindi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u-\int\frac{\partial w}{\partial x}dz\ ,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v-\int\frac{\partial w}{\partial y}dz\ .$$

Siccome $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ non contengono z, si vede subito che si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u-\int\frac{\partial w}{\partial x}dz\right)=0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(v-\int\frac{\partial w}{\partial y}dz\right)=0\ ,$$

cioè debbono essere soddisfatte le prime due condizioni (27). Poi, affinchè esista φ, è necessaria e sufficiente, per quanto si è detto nel precedente paragrafo, la condizione

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u-\int\frac{\partial w}{\partial x}dz\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v-\int\frac{\partial w}{\partial y}dz\right),$$

cioè precisamente la terza condizione (27). Se queste tre condizioni sono soddisfatte, si ha $\Phi=\int udx+\cdots-\iint\alpha\,dy\,dz-\cdots+\iiint f\,dx\,dy\,dz$, chiamando α,β,γ, le funzioni $\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial x}$, e ponendo $f=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$. Del resto è chiaro che la precedente espressione di Φ si riduce all'ultimo termine: $\Phi=\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. In modo analogo si dimostra, più general-

www.rcin.org.pl

mente, che, *date* n *funzioni* $u_1, u_2, \ldots$ *delle* n *variabili indipendenti* $x_1, x_2, \ldots$, *le* $^1/_2 n(n-1)$ *condizioni*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

sono necessarie e sufficienti perchè $u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + \ldots$ *sia un differenziale esatto.*

X. APPLICAZIONI AL CALCOLO DI TALUNE NOTEVOLI CLASSI D'INTEGRALI.

Integrazione dei differenziali razionali.

1. Quando la funzione da integrare è razionale, essa è sempre riducibile alla forma $f(x):g(x)$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni intere di x, prime fra loro. Se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono le radici di $g(x)$, dei gradi di molteplicità $r, s, t, \ldots$, rispettivamente, e se $\varphi(x)$ è la funzione intera, quoziente di $f(x)$ per $g(x)$, è noto (III, 34) che la frazione $f(x):g(x)$ si può decomporre in frazioni semplici, così:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x) + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{b_1}{x-\beta} + \frac{b_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{b_s}{(x-\beta)^s} + \cdots .$$

Quindi

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \varphi(x) dx + a_1 \log(x-\alpha) + b_1 \log(x-\beta) + c_1 \log(x-\gamma) + \cdots$$

$$- \frac{a_2}{x-\alpha} - \frac{a_3}{2(x-\alpha)^2} - \cdots - \frac{b_2}{x-\beta} - \frac{b_3}{2(x-\beta)^2} - \cdots ;$$

ed il primo integrale, nel secondo membro, si scinde subito in altri, calcolabili immediatamente. Dunque *gli integrali dei differenziali razionali si possono sempre esprimere con simboli algebrici e* (cfr. III, 15, *e*) *logaritmici, in numero finito.*

2. Se le radici non sono tutte reali, il secondo membro si presenta sotto forma immaginaria, sebbene sia reale quando nel differenziale i coefficienti sono reali. Si fanno sparire gli immaginarii ricordando ancora (III, 35) che le frazioni semplici, relative ad una coppia di radici conjugate di $g(x)$, danno luogo, nello sviluppo di $f(x):g(x)$, ad una somma di questa forma:

$$\frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2 x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{a_3 x + b_3}{(x^2 + px + q)^3} + \cdots + \frac{a_r x + b_r}{(x^2 + px + q)^r} .$$

www.rcin.org.pl

La questione è dunque ridotta al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)^n},$$

il quale ci è noto per $n=1$, perchè si scinde in

$$a\int \frac{(x+{}^1/_2 p)\,dx}{x^2+px+q} + (b-{}^1/_2 ap)\int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

dimodochè (IX, 14, g) si ha

$$\int \frac{(ax+b)\,dx}{x^2+px+q} = a\log\sqrt{x^2+px+q} + \frac{b-{}^1/_2 ap}{\sqrt{q-{}^1/_4 p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+{}^1/_2 p}{\sqrt{q-{}^1/_4 p^2}} + C.$$

Per $n>1$ bisogna ancora conoscere

$$u_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

giacchè

$$\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)^n} = a\int \frac{(x+{}^1/_2 p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} + (b-{}^1/_2 ap)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n};$$

poi, eseguendo la sostituzione $x+{}^1/_2 p = t\sqrt{q-{}^1/_4 p^2}$ nell'ultimo integrale,

$$\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)^n} = -\frac{a}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{(b-{}^1/_2 ap)\,u_n}{(\sqrt{q-{}^1/_4 p^2})^{2n-1}}.$$

Dunque tutto si riduce a calcolare u_n. Ora, integrando per parti, si ha subito

$$u_{n-1} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} = \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + (n-1)\int \frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + (2n-2)(u_{n-1}-u_n);$$

quindi

$$u_n = \frac{2n-3}{2n-2}u_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}, \quad \left(t = \frac{x+{}^1/_2 p}{\sqrt{q-{}^1/_4 p^2}}\right).$$

Così, partendo da $u_1 = \operatorname{arc\,tg} t + C$, si perviene successivamente ai risultati

$$u_2 = {}^1/_2\left(\operatorname{arc\,tg} t + \frac{t}{1+t^2}\right) + C, \quad u_3 = {}^3/_8\left(\operatorname{arc\,tg} t + \frac{t}{1+t^2}\right) + \frac{t}{4(1+t^2)^2} + C, \text{ ecc.}$$

3. **Esercizii**: *a)* Per calcolare $\int \frac{dx}{x^3-1}$ si cominci dal porre

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{c}{x-1} + \frac{ax+b}{x^2+x+1},$$

dimodochè debba essere, identicamente, $c(x^2+x+1)+(ax+b)(x-1)=1$. Basta fare $x=1$ per ottenere $c={}^1/_3$; poi, sostituendo a c il suo valore, risulta $ax+b=-{}^1/_3(x+2)$. Così l'integrale proposto si scinde in

$${}^1/_3\int \frac{dx}{x-1} - {}^1/_6\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} - {}^1/_2\int \frac{dx}{x^2+x+1};$$

quindi

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\log\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

www.rcin.org.pl

b) L'integrale $\int \frac{x^5 dx}{x^4-1}$ si scinde subito in $\int x\,dx + \int \frac{x\,dx}{x^4-1}$. Il primo vale $^1/_2 x^2 + \textit{costante}$, e nel secondo conviene assumere x^2 come variabile d'integrazione:

$$\int \frac{x dx}{x^4-1} = {}^1/_2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{4} \log \frac{t-1}{t+1} + C .$$

Dunque

$$\int \frac{x^5 dx}{x^4-1} = {}^1/_2 \left(x^2 + \log \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right) + C .$$

c) Facile è il calcolo dell'integrale

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} - \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2}$$

Ponendo $2x+1 = t\sqrt{3}$ nei primi due integrali del secondo membro, e calcolando immediatamente il terzo, questa espressione si trasforma in

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{x^2+x+1} .$$

cioè

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) + \frac{1}{x^2+x+1} + C ,$$

e finalmente

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)} + C .$$

d) Dato a calcolare l'integrale di $dx:(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1)$, bisogna cominciare dal porre il denominatore sotto la forma $(x+1)(x^2+1)^2$, e poi cercare di determinare le costanti c, a, b, a', b' in modo che si abbia identicamente

$$\frac{1}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1} = \frac{c}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{a'x+b'}{(x^2+1)^2} ,$$

ossia $c(x^2+1)^2 + (ax+b)(x^2+1)(x+1) + (a'x+b')(x+1) = 1$. Per $x^2 = -1$ si trova

$$a'x + b' = \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = -{}^1/_2 (x-1) ,$$

e l'eguaglianza fra il primo e l'ultimo membro, vera per un valore immaginario di x, sussiste qualunque sia x, giacchè a' e b' sono reali. Dopo ciò l'identità precedente si riduce a $c(x^2+1) + (ax+b)(x+1) = \frac{1}{2}$, e per $x^2 = -1$ dà $ax + b = {}^1/_2 (a'x + b')$; quindi, sostituendo, si trova $c = {}^1/_4$, come, del resto, si può immediatamente dedurre dall'identità primitiva, ponendovi $x = -1$. Ciò premesso, si vede subito che l'integrale proposto equivale a

$${}^1/_4 \int \frac{dx}{x+1} - {}^1/_4 \int \frac{x-1}{x^2+1} dx - {}^1/_2 \int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx ,$$

www.rcin.org.pl

cioè

$$\tfrac{1}{4}\log(x+1)-\tfrac{1}{8}\log(x^2+1)+\tfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4(x^2+1)}+\tfrac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C\,.$$

Dunque

$$\int\frac{dx}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}=\tfrac{1}{4}\left(\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+2\operatorname{arctg}x+\frac{x+1}{x^2+1}\right)+C\,.$$

e) Per calcolare l'integrale di $dx:(x^4+1)$ si osservi, in primo luogo, che

$$x^4+1=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)\,,$$

e si ponga

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{a'x+b'}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,,$$

ossia $(ax+b)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(a'x+b')(x^2+x\sqrt{2}+1)=1$. Facendo $x^2+1=\mp x\sqrt{2}$ si ottiene subito, rispettivamente,

$$ax+b=-\frac{1}{2x\sqrt{2}}=\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\quad,\quad a'x+b'=\frac{1}{2x\sqrt{2}}=-\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,;$$

quindi

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(x+\sqrt{2})\,dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(x-\sqrt{2})\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,,$$

e si vede che, posto $p=\pm\sqrt{2}$, basta calcolare l'unico integrale

$$\int\frac{(x+p)\,dx}{x^2+px+1}=\tfrac{1}{2}\int\frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+1}+\tfrac{1}{2}p\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\log\sqrt{x^2+px+1}+\frac{p}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+\frac{p}{\sqrt{2}}\right)+C\,,$$

ed osservare che

$$\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)=-\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+\textit{costante}\,,$$

per ottenere

$$\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}}-\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)+C\,.$$

f) Più facile ancora è il calcolo del seguente integrale:

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+C\,.$$

Se l'integrazione si estende da 0 ad 1, siccome $\lim\limits_{x=1-0}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}=-\tfrac{1}{2}\pi$, si ottiene $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ come valore dell'integrale definito; e però, sviluppando in serie di potenze la funzione integranda, si giunge alla formola

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,,$$

che si può anche dedurre dalla formola (17) del precedente capitolo per $\alpha=\tfrac{1}{4}\pi$.

www.rcin.org.pl

g) Dato a calcolare $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$, cominciamo dal notare che

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} = {}^1/_3\left(\frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}\right);$$

poi, cambiando x in x^2, ed osservando che

$$x^4-x^2+1 = (x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

si trova

$$\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{2}{3(x^2+1)} + {}^1/_6\left(\frac{1}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right).$$

D'altra parte, per $p = \pm\sqrt{3}$,

$$\int \frac{dx}{x^2+px+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = 2\,\mathrm{arc\,tg}(2x+p)+C.$$

Dunque l'integrale proposto vale

$${}^2/_3\,\mathrm{arc\,tg}\,x + {}^1/_3\,\mathrm{arc\,tg}(2x+\sqrt{3}) + {}^1/_3\,\mathrm{arc\,tg}(2x-\sqrt{3}) + C,$$

o, finalmente,

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = -{}^1/_3\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1} + C.$$

Lo sviluppo della funzione integranda in serie di potenze mostra che l'integrale definito fra 0 ed 1 vale quanto la somma della serie $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\ldots$, che noi possiamo d'altra parte calcolare mediante la formola citata nel precedente esempio. Infatti per $\alpha = {}^1/_6\pi$ quella formola dà

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\ldots\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right)=\frac{5\pi}{12},$$

d'onde si trae (IX, 18, *c*)

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\ldots=\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}.$$

Invece sembra che l'espressione da noi trovata per l'integrale indefinito fornisca 0 (risultato assurdo) come valore dell'integrale definito; ma (IX, 14, *n*) si deve notare che, nell'intervallo $(0,1)$, la funzione $3x(x^2-1):(x^4-4x^2+1)$ diventa infinita per $x=c=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, ed è negativa a sinistra, positiva a destra di c, dimodochè si ha

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = -{}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_0^{c-0} - {}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c+0}^{1}$$

$$= {}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0} = {}^1/_3\pi.$$

www.rcin.org.pl

Integrazione dei differenziali irrazionali.

4. Quando l'irrazionalità dell'integrando è unicamente dovuta a potenze della variabile d'integrazione x, con esponenti frazionarii, la sostituzione $x = t^m$, dove m è il minimo comune multiplo dei denominatori degli esponenti, farà subito sparire tale irrazionalità, e l'integrale, sotto la sua nuova forma, sarà calcolabile nel modo che si è visto. Appena però compariscono, nella funzione integranda, irrazionalità più complicate, l'integrazione è quasi sempre impossibile praticamente, nel senso che non esiste alcuna combinazione di segni algebrici e logaritmici, in numero finito, atta a rappresentare l'integrale proposto. Vi sono tuttavia talune eccezionali classi d'integrali, che si lasciano calcolare con facili artificii. Eccone dei casi particolari importanti:

a) Per calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ poniamo il radicale uguale a $t-x$, dimodochè

$$x = \frac{t^2-q}{2t+p}\ , \quad t-x = \frac{t^2+pt+q}{2t+p}\ , \quad dx = 2\,\frac{t^2+pt+q}{(2t+p)^2}\,dt\ . \qquad (1)$$

L'integrale si trasforma in

$$\int \frac{2dt}{2t+p} = \log(2t+p) + C'\ ;$$

quindi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \log\left(x + {}^1/_2 p + \sqrt{x^2+px+q}\right) + C\ .$$

b) Per calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$ osserviamo che

$$-x^2+px+q = -(x-{}^1/_2 p)^2 + q + {}^1/_4 p^2$$

(dove $q + {}^1/_4 p^2$ è necessariamente positivo, se si vuol rimanere nel campo dei numeri reali), e poniamo

$$x - {}^1/_2 p = t\sqrt{q+{}^1/_4 p^2}\ , \quad \text{dimodochè} \quad -x^2+px+q = (q+{}^1/_4 p^2)(1-t^2)\ .$$

L'integrale proposto diventa $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, e però

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x-{}^1/_2 p}{\sqrt{q+{}^1/_4 p^2}} + C\ .$$

c) L'integrazione per parti dà

$$\int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx = x\sqrt{\pm x^2+px+q} - \int \frac{x(\pm x + {}^1/_2 p)dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}\ .$$

D'altra parte si ha identicamente

$$x(\pm x + {}^1/_2 p) = (\pm x^2+px+q) \mp {}^1/_2 p(\pm x + {}^1/_2 p) - (q \mp {}^1/_4 p^2)\ ,$$

www.rcin.org.pl

e per conseguenza

$$\int \frac{x(\pm x + {}^1/_2 p)\,dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}}$$

$$= \int \sqrt{\pm x^2 + px + q}\,dx \mp {}^1/_2 p \sqrt{\pm x^2 + px + q} - (q \mp {}^1/_4 p^2) \int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}}\,.$$

Dunque

$$2\int \sqrt{\pm x^2 + px + q}\,dx$$

$$= x\sqrt{\pm x^2 + px + q} \pm {}^1/_2 p \sqrt{\pm x^2 + px + q} + (q \mp {}^1/_4 p^2) \int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}}\,.$$

e finalmente

$$\int \sqrt{x^2 + px + q}\,dx$$

$$= {}^1/_2 (x + {}^1/_2 p)\sqrt{x^2 + px + q} + {}^1/_2 (q - {}^1/_4 p^2) \log(x + {}^1/_2 p + \sqrt{x^2 + px + q}) + C\,,$$

$$\int \sqrt{-x^2 + px + q}\,dx$$

$$= {}^1/_2 (x - {}^1/_2 p)\sqrt{-x^2 + px + q} + {}^1/_2 (q + {}^1/_4 p^2) \operatorname{arc\,sen} \frac{x - {}^1/_2 p}{\sqrt{q + {}^1/_4 p^2}} + C\,.$$

5. Più generalmente sia $f(x,y)$ una funzione *razionale* di x e di y, e si consideri l'integrale $\int f(x, \sqrt{\pm x^2 + px + q})\,dx$. Per quanto complicata sia l'espressione da integrare, è facile convincersi che *si riesce sempre a renderla razionale*, mediante opportune sostituzioni, e per conseguenza *l'integrale è sempre esprimibile mediante un numero finito di segni algebrici e logaritmici.* Basta infatti assumere $t = x + \sqrt{x^2 + px + q}$ come variabile di integrazione, per vedere, in virtù delle (1), scomparire ogni irrazionalità in $f(x,y)$ quando $y = \sqrt{x^2 + px + q}$. Ciò non accade per $y = \sqrt{-x^2 + px + q}$; ma vi è un'altra sostituzione, che conviene anche al caso precedente tutte le volte che le radici di y sono reali; ed è questa una circostanza che si verifica certamente nel secondo caso, altrimenti y sarebbe immaginario per tutti i valori di x. Se α e β sono le radici di $\pm x^2 + px + q$, basta porre

$$x = \frac{\beta \mp \alpha t^2}{1 \mp t^2} \tag{2}$$

per trovare

$$y = \sqrt{\pm(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{(\beta - \alpha)t}{1 \mp t^2}\,, \quad dx = \pm \frac{2(\beta - \alpha)t\,dt}{(1 \mp t^2)^2}\,,$$

e convincersi che $f(x,y)\,dx$ prende in tal modo la forma $\varphi(t)\,dt$, con $\varphi(t)$ razionale e reale.

6. Del resto le sostituzioni precedenti servono soltanto a mostrare la possibilità, esente da eccezioni, di ridurre a forma razionale l'espressione da integrare, evitando gli immaginarii; ma nella pratica converrà invece cominciare dal semplificare, nel modo che segue, l'espressione proposta. La funzione *razionale* $f(x,y)$ si può sempre porre sotto la forma del quoziente

www.rcin.org.pl

di due funzioni intere; e se in ciascuna di queste, ordinata secondo le potenze di y, si sostituisce $(\pm x^2+px+q)^n$ ad ogni y^{2n}, e $(\pm x^2+px+q)^n y$ ad ogni y^{2n+1}, si ottiene

$$f(x,y)=\frac{\varphi_1(x)+y\psi_1(x)}{\varphi_2(x)+y\psi_2(x)},$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sono funzioni intere di x; quindi, moltiplicando numeratore e denominatore per $\varphi_2-y\psi_2$, e ponendo nuovamente

$$y^2=\pm x^2+px+q \quad , \quad y=\frac{\pm x^2+px+q}{y},$$

si trova

$$f(x,y)=\varphi(x)+\frac{\psi(x)}{y},$$

con φ e ψ funzioni *razionali* di x. Se poi $\psi(x)$ si decompone (*cfr.* § 1) in frazioni semplici, si vede che, a prescindere da integrali di differenziali razionali, il calcolo dell'integrale proposto si riduce al calcolo d'uno o più integrali dei seguenti tipi

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}} \quad , \quad \int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{\pm x^2+px+q}},$$

con n intero e positivo, ed a reale o immaginario. Mercè la sostituzione $x=a+\frac{1}{z}$ gli integrali del secondo tipo son sempre riducibili a quelli del primo, ed è facile vedere che questi ultimi si riducono finalmente all'unico $\int\frac{dx}{y}$, calcolato nel § 4. Infatti

$$\int x^n\frac{dx}{y}=\pm\int x^{n-1}(\pm x+{}^1/_2 p)\frac{dx}{y}\mp{}^1/_2 p\int x^{n-1}\frac{dx}{y},$$

dove, essendo $ydy=(\pm x+{}^1/_2 p)dx$, si ha

$$\int x^{n-1}(\pm x+{}^1/_2 p)\frac{dx}{y}=\int x^{n-1}dy=x^{n-1}y-(n-1)\int x^{n-2}(\pm x^2+px+q)\frac{dx}{y},$$

e per conseguenza, sostituendo nella precedente uguaglianza

$$n\int x^n\frac{dx}{y}=\pm x^{n-1}y\mp\left(n-\frac{1}{2}\right)p\int x^{n-1}\frac{dx}{y}\mp(n-1)q\int x^{n-2}\frac{dx}{y}.$$

Da questa *formola di riduzione* si deduce successivamente, per $n=1,2,3,\ldots$,

$$\int x\frac{dx}{y}=\pm y\mp{}^1/_2 p\int\frac{dx}{y} \quad , \quad \int x^2\frac{dx}{y}={}^1/_2(\pm x-{}^3/_2 p)y\mp{}^1/_2(q\mp{}^3/_4 p^2)\int\frac{dx}{y},$$

$$\int x^3\frac{dx}{y}={}^1/_3 y^3-({}^3/_4 px+q\mp{}^5/_8 p^2)y+{}^1/_4 p(3q\mp{}^5/_4 p^2)\int\frac{dx}{y}, \ldots.$$

7. Con procedimento analogo si può, più generalmente, semplificare l'integrazione di qualunque differenziale $f(x,y)dx$, la cui irrazionalità sia uni-

www.rcin.org.pl

camente dovuta al radicale quadratico

$$y = \sqrt{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m}\,.$$

Prima si osservi che, quando m è pari, il grado del polinomio sottoposto al radicale nell'espressione integranda si può sempre abbassare ad $m-1$: ciò si riconosce facilmente mercè la sostituzione $x = \alpha + \frac{1}{z}$, in cui α è una radice di y. Così, per esempio, tornando al caso di $y = \sqrt{\pm x^2 + px + q}$, se si rappresenta con β l'altra radice di y, si ottiene $yz = \sqrt{\mp(\beta - \alpha)z \pm 1}$; quindi, assumendo il nuovo radicale come variabile d'integrazione, si è condotti appunto alla sostituzione (2). Similmente il caso di $m=4$ è riducibile ad $m=3$; ma si cercherebbe invano di ridurre questo al caso di $m=2$, giacchè in uno studio più profondo di siffatti integrali, i quali diconsi *ellittici*, si dimostra che *non è possibile esprimerli con segni algebrici e logaritmici*, e che il tentarne la trasformazione in integrali di differenziali razionali è come se si cercasse, con deformazione continua, di ridurre a forma sferica la superficie d'un anello *). Mediante un calcolo simile a quello del paragrafo precedente si riesce soltanto a dimostrare che gli integrali ellittici son tutti riducibili ai seguenti

$$\int \frac{dx}{y}\,, \quad \int \frac{x\,dx}{y}\,, \quad \int \frac{dx}{(x-a)y}\,,$$

i quali si dicono di *prima*, *seconda* e *terza* specie; e si è poi condotti, con opportune sostituzioni, ad assumere come tipici nelle prime due specie gli integrali

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}\,, \quad \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}\,,$$

il primo dei quali, preso fra i limiti 0 e φ, si rappresenta con $F(k, \varphi)$, ed il secondo, fra gli stessi limiti, si può scrivere

$$\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{1 - (1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}\, d\varphi = \frac{1}{k^2}\left\{ F(k, \varphi) - E(k, \varphi) \right\}\,,$$

convenendo di rappresentare con $E(k, \varphi)$ l'integrale $\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi$. Il valore φ del limite superiore si chiama *amplitudine*, e k è il *modulo* degli integrali. Nelle applicazioni meccaniche e geometriche sono particolarmente importanti gli integrali F ed E, corrispondenti all'amplitudine $^1/_2\pi$. Essi diconsi integrali ellittici *completi*, e si rappresentano così:

$$F(k) = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}\,, \quad E(k) = \int_0^{1/2\pi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi\,.$$

*) Vedi, per $m > 4$, il « *Cours d'Analyse de l'École polytechnique* » di Hermite (pp. 291 a 297).

www.rcin.org.pl

8. Occupiamoci ora delle sostituzioni alle quali abbiamo soltanto accennato nel paragrafo precedente, e cerchiamo di eseguirle in guisa da evitare gli immaginarii. Prima supponiamo reali le radici α, β, γ di

$$y = \sqrt{\pm x^3 + ax^2 + bx + c} :$$

sia α la più piccola di esse, o la più grande, secondo che x^3 è preceduto dal segno $+$, o dal segno $-$; sia β la radice media, e si rappresenti con k^2 il rapporto di $\beta - \alpha$ a $\gamma - \alpha$, *sempre compreso fra* 0 *ed* 1. La sostituzione $x = \alpha + (\beta - \alpha)\operatorname{sen}^2\varphi$ dà

$$\pm x^3 + ax^2 + bx + c = |\gamma - \alpha|(\beta - \alpha)^2(1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi \ ;$$

quindi, a prescindere da un fattore costante, *reale*, il radicale y si trasforma nel prodotto di $\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$ per $\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$, e però

$$\frac{dx}{y} \quad \text{è proporzionale a} \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} .$$

Al medesimo risultato si giunge quando le radici non sono tutte reali, nella quale ipotesi, supponendo sempre reali i coefficienti, ad y^2 si può dare la forma $\pm(x - \alpha)(x^2 + px + q)$, con α, p e q reali. In questo caso si ponga $x = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. Un calcolo facile dà

$$\pm(x - \alpha)(x^2 + px + q) = (\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{3}{2}}(1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}} ,$$

dove il numero

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{\alpha + {}^1/_2 p}{\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}}\right)$$

è *sempre compreso fra* 0 *ed* 1, giacchè

$$\alpha^2 + p\alpha + q = (\alpha + {}^1/_2 p)^2 + (q - {}^1/_4 p^2) > (\alpha + {}^1/_2 p)^2 .$$

Così in entrambi i casi $\int \frac{dx}{y}$ si trasforma in $F(k, \varphi)$; ma il calcolo di $\int \frac{x\,dx}{y}$ si riduce al calcolo dell'uno o dell'altro degli integrali

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} , \quad \int \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} ,$$

secondo che le radici di y sono, o pur no, tutte reali. Abbiamo visto che il primo è riducibile agli integrali F ed E; ed ora, per mostrare che altrettanto si può affermare del secondo, osserviamo che

$$d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\right) = \left\{ {}^1/_2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) - k^2\operatorname{sen}^2\varphi \right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} ,$$

d'onde segue, integrando,

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = F(k, \varphi) - 2E(k, \varphi) + 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi} .$$

www.rcin.org.pl

Quando poi y^2 è un polinomio del quarto grado, abbiamo già detto che, se α è una sua radice, basta la sostituzione $x = \alpha + \frac{1}{z}$ per essere ricondotti al caso precedente; ma se il polinomio non ha radici reali, conviene ricorrere ad un'altra sostituzione, che noi qui ci limitiamo a segnalare, tralasciando la discussione *) che vi conduce. Sia dunque

$$y^2 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q'),$$

e si supponga *essenzialmente positivo* ciascun fattore del secondo membro. Se si pone

$$(p - p')\lambda = q - q' - \sqrt{(q - q')^2 + (p - p')(pq' - qp')},$$

$$(p - p')\mu = q - q' + \sqrt{(q - q')^2 + (p - p')(pq' - qp')},$$

la sostituzione da adoperare è

$$x = \frac{\lambda + \mu m \operatorname{tg}\varphi}{1 + m \operatorname{tg}\varphi},$$

dove m rappresenta il più piccolo dei numeri

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 - p\lambda + q}{\mu^2 - p\mu + q}}, \quad \sqrt{\frac{\lambda^2 - p'\lambda + q'}{\mu^2 - p'\mu + q'}}.$$

9. La possibilità d'integrare $f(x,y)dx$ con segni algebrici e logaritmici, nell'ipotesi $y^2 = \pm x^2 + px + q$, è tutta dovuta al fatto che questa equazione rappresenta una conica, la quale (VI, 30) è una curva *unicursale* o di *genere zero*. Più generalmente, se in $f(x,y)$ si suppone y vincolato ad x mediante l'equazione $F(x,y) = 0$ d'una curva unicursale qualunque, è chiaro che $f(x,y)dx$ si potrà rendere razionale assumendo come nuova variabile d'integrazione quel parametro t, in funzione del quale x ed y sono esprimibili razionalmente. E così accade che innumerevoli differenziali, la cui irrazionalità è in apparenza assai più complicata di quella dei differenziali ellittici, si lascino agevolmente ridurre a forma razionale, e quindi integrare. Di gran lunga più difficile è la dimostrazione della proposizione contraria: *se la curva* $F(x,y) = 0$ *non è unicursale, l'integrale* $\int f(x,y)dx$ *non si può rappresentare con soli segni algebrici e logaritmici, in numero finito.* Ci viene così rivelata l'intima causa dell'impossibilità già segnalata per gli integrali ellittici, giacchè la cubica $y^2 = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, generalmente priva di punto doppio, è del genere 1: essa non è unicursale se non quando ammette un punto doppio, per la qual cosa occorre che due delle tre radici di y coincidano in una ($\alpha = \beta$), ed allora basta porre $x = \gamma + t^2$ per rendere razionale la funzione integranda. Un po' più generalmente, tutte le

*) Schloemilch « *Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques* » (trad. Graindorge, pp. 3-6).

www.rcin.org.pl

volte che y si trova vincolata ad x mediante l'equazione

$$ay^n + bxy^{n-1} + cx^2y^{n-2} + \dots = a'y^{n-1} + b'xy^{n-2} + c'x^2y^{n-3} + \dots ,$$

basta porre $y = tx$ per trovare

$$x = \frac{a't^{n-1} + b't^{n-2} + \dots}{at^n + bt^{n-1} + \dots} , \quad y = \frac{a't^n + b't^{n-1} + \dots}{at^n + bt^{n-1} + \dots} ,$$

e così trasformare $f(x,y)dx$ in $\varphi(t)dt$, con $\varphi(t)$ razionale.

10. **Differenziali binomii.** Si chiamano così i differenziali che hanno la forma $x^p(a+bx^m)^q dx$. Rappresentandone brevemente l'integrale con $\mathfrak{J}(p,q)$, osserviamo che la sostituzione $a+by^m = t$ dà

$$\mathfrak{J}(p,q) = \frac{1}{mb}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m}-1} t^q dt ,$$

ed il secondo membro si sa calcolare quando $\frac{p+1}{m}$ è un numero intero. L'integrazione è immediata se questo intero è positivo; nel caso opposto basterà eseguire la sostituzione $t = \theta^n$, scegliendo il numero intero n in modo che nq sia intero, e riducendo così il differenziale a forma razionale. Se poi $x^p(a+bx^m)^q$ si mette sotto la forma $x^{p+mq}(b+ax^{-m})^q$, si vede, applicando la condizione precedente, che l'integrale dato si calcola subito (mercè la sostituzione $b+ax^{-m} = t$) anche quando è intero il numero $\frac{p+mq+1}{-m}$. Dunque, *quando è intero uno dei numeri*

$$\frac{p+1}{m} , \quad \frac{p+1}{m} + q ,$$

l'integrale proposto è trasformabile in un integrale di differenziale razionale. È stato inoltre dimostrato *) da Tchébychew che *son questi i soli casi, nei quali il differenziale binomio è integrabile con segni algebrici e logaritmici.* Qui si sottintende che il differenziale non sia già razionale (e quindi che p, q, m non siano tutti interi), o che non sia immediatamente riducibile a forma razionale con una sostituzione $x = t^n$, come (*cfr.* § 4) si può fare quando p ed m sono frazionarii, e q intero. Esclusi questi casi, si suppone dunque q frazionario, p ed m interi, ed inoltre $m > 0$, come sempre si può, ponendo, se occorre, $x = 1:t$.

11. Per calcolare o soltanto per semplificare un integrale di differenziale binomio si cerca di esprimerlo mediante integrali analoghi, ma più semplici. A ciò si riesce osservando, in primo luogo, che *si può sempre ridurre* q *ad essere compreso fra* 0 *ed* 1. Infatti, se si suppone $p+1 \gtrless 0$, l'integrazione per parti dà

$$\mathfrak{J}(p,q) = \int (a+bx^m)^q d\frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{x^{p+1}}{p+1}(a+bx^m)^q - \frac{mqb}{p+1}\mathfrak{J}(p+m, q-1) .$$

*) « *Journal de Liouville* » (1853, p. 108).

www.rcin.org.pl

D'altronde si ha identicamente

$$b\mathfrak{J}(p+m,q-1)=\mathfrak{J}(p,q)-a\mathfrak{J}(p,q-1)\ .$$

Dunque

$$(p+mq+1)\mathfrak{J}(p,q)=x^{p+1}(a+bx^m)^q+mqa\mathfrak{J}(p,q-1)\ . \qquad (3)$$

Da questa formola si ricava $\mathfrak{J}(p,q)$ o $\mathfrak{J}(p,q-1)$ secondo che q è positivo o negativo; ed operando più volte di seguito si riesce a sottrarre da $q>0$, o ad aggiungere a $q<0$ tante unità quante si vogliono. Si noti che, quando uno dei coefficienti di $\mathfrak{J}(p,q)$ o di $\mathfrak{J}(p,q-1)$ è nullo, si è in uno dei casi d'integrabilità, ed è la stessa formola (3) che dà il valore di $\mathfrak{J}(p,q-1)$ o di $\mathfrak{J}(p,q)$. Similmente *si può sempre ridurre* p *ad essere compreso fra* 0 *ed* m. Infatti l'integrazione per parti, condotta in altro modo, dà, supponendo $q+1\gtrless 0$,

$$\mathfrak{J}(p,q)=\int x^{p-m+1}d\,\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb}=x^{p-m+1}\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb}-\frac{p-m+1}{(q+1)mb}\mathfrak{J}(p-m,q+1)\ .$$

D'altra parte

$$\mathfrak{J}(p-m,q+1)=a\mathfrak{J}(p-m,q)+b\mathfrak{J}(p,q)\ ;$$

quindi

$$(p+mq+1)b\mathfrak{J}(p,q)=x^{p-m+1}(a+bx^m)^{q+1}-(p-m+1)a\mathfrak{J}(p-m,q)\ . \quad (4)$$

Da questa relazione si ricava $\mathfrak{J}(p,q)$ o $\mathfrak{J}(p-m,q)$ secondo che p è positivo o negativo. Adunque si vede che, mercè l'applicazione delle formole (3) e (4), il calcolo dell'integrale di qualunque differenziale binomio è sempre riducibile al caso in cui si ha

$$p \text{ ed } m \text{ interi}\ ,\quad m>0\ ,\quad 0<q<1\ ,\quad 0<p<m\ .$$

12. **Esercizii**: *a)* Per calcolare $\int\sqrt{x^2+2x-1}\,\frac{dx}{x}$ si ponga il radicale uguale a $t-x$, dimodochè

$$x=\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t+1}\ ,\quad \sqrt{x^2+2x-1}=t-x=\frac{t^2+2t-1}{2(t+1)}\ ,\quad dx=\frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2}dt\ .$$

L'integrale proposto si trasforma in

$$\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t-1)^2dt}{(t+1)^2(t^2+1)}=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt\ ;$$

quindi si ottiene, con un calcolo facile,

$$\int\sqrt{x^2+2x-1}\,\frac{dx}{x}$$

$$=\sqrt{x^2+2x-1}+\log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right)-2\operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)+C\ .$$

Più rapidamente si giunge al risultato scindendo l'integrale proposto in

$$\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}\ ,$$

www.rcin.org.pl

ed osservando che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \mp \int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}} = \pm \operatorname{arc\,sen} \frac{x-1}{x\sqrt{2}} + C ,$$

dove (*cfr.* IX, 14, *a*) bisogna prendere i segni superiori o i segni inferiori secondo che x è positivo o negativo. La prima forma è preferibile appunto perchè non vi è ambiguità nei segni. Del resto l'equivalenza delle due forme risulta dall'identità

$$\pm \operatorname{arc\,sen} \frac{x-1}{x\sqrt{2}} = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right) - (1 \pm 2)\frac{\pi}{4} .$$

b) In modo analogo si calcola $\int \sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}$; ma questo si può anche considerare come l'integrale d'un differenziale binomio, per cui si ha $p=-1, m=2, q=\frac{1}{2}$. Ora, essendo $\frac{p+1}{m}=0$, è soddisfatta la prima condizione d'integrabilità (come sempre avviene quando $p=-1$, qualunque sia $m \gtrless 0$), e però si è condotti a porre $x^2-1=t^2$; quindi

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x} = \int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = t - \operatorname{arc\,tg} t + C = \sqrt{x^2-1} \pm \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{x} + C' .$$

c) Se si vuol calcolare l'integrale di $\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$, considerando questo come un differenziale binomio, si osservi prima che $p=-3, m=1, q=-{}^1/_2$. Soddisfatta la prima condizione d'integrabilità (come sempre accade per $m=\pm 1$, quando p è intero), basta porre $x-1=t^2$ per rendere razionale il differenziale, e trovare, con una facile integrazione,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}} = {}^3/_4 \arccos\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1} + C .$$

d) Nell'integrale $\int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ si ha $p=4, m=2, q=-{}^3/_2$, ed è soddisfatta la seconda condizione d'integrabilità, giacchè $\frac{p+1}{m}+q=1$. Bisogna dunque porre $x^{-2}-1=t^{-2}$, cioè

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad dx = \frac{dt}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3} ;$$

ma, nel caso attuale, si giunge più rapidamente al risultato eseguendo prima una integrazione per parti:

$$\int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int x^3 d(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - 3\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x-x^3}{2\sqrt{1-x^2}} - {}^3/_2 \operatorname{arc\,sen} x + C .$$

Ciò equivale ad applicare la formola (4).

e) Per l'integrale di $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ si ha $p=-\frac{1}{2}, m=\frac{1}{4}, q=\frac{1}{3}$; e

www.rcin.org.pl

poichè $\frac{p+1}{m}=2$, è soddisfatta la prima condizione d'integrabilità. Si è dunque sicuri di giungere al risultato assumendo come variabile $t=1+\sqrt[4]{x}$. Così l'integrale proposto si trasforma in

$$4\int(t-1)t^{\frac{1}{3}}dt={}^3/_7(4t-7)t^{\frac{4}{3}}+C\ ;$$

quindi

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx={}^3/_7(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C\ .$$

f) Dato a calcolare $\int\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ si cominci dall'osservare che, essendo

$$\frac{p+1}{m}=\frac{n+1}{2}\ ,\quad \frac{p+1}{m}+q=\frac{n}{2}\ ,$$

la riduzione ad integrale di funzione razionale è possibile solo quando n è intero. Secondo che n è dispari o pari, l'integrale è riducibile ad una delle seguenti forme

$$-\int(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt\ ,\quad \int\frac{t^n dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}}\ ,$$

ponendo (rispettivamente) $x=\sqrt{1-t^2}$ o $x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Del resto l'integrazione per parti dà la formola

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

che permette di ridurre l'integrale proposto, secondo che n è dispari o pari, ad uno degli integrali

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C\ ,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,sen}x+C\ .$$

Se si estende l'integrazione da 0 ad 1 si ricade su risultati già noti (IX, 16, *j*), come facilmente si riconosce mediante la sostituzione $x=\operatorname{sen}\theta$.

g) Se si vuol calcolare l'integrale *)

$$\int\left(\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}\right)dx\ ,$$

basta osservare che il coefficiente di dx è, in virtù della formola di Tartaglia, radice dell'equazione $y^3+3xy-2x^3=0$, per essere subito condotti, ricordando l'osservazione fatta in fine del § 9, ad eseguire la sostituzione $x=\frac{3t}{2-t^3}$, che

*) Hermite « *Cours d'Analyse* » p. 242.

www.rcin.org.pl

trasforma l'integrale dato in $18\int\frac{(1+t^3)t^2dt}{(2-t^3)^3}$; poi, per $2-t^3=3\theta$, in

$$2\int\frac{\theta-1}{\theta^3}d\theta=\frac{1-2\theta}{\theta^2}+C=\frac{x^2}{y^2}(x^2-2y)+C\ ;$$

quindi

$$\int\left(\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}\right)dx=\frac{x^3\left(\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}\right)-2x^2}{\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}+2x^2}+C$$

Integrazione dei differenziali trascendenti.

13. Rarissimi sono i casi d'integrabilità (mediante i segni funzionali noti) dei differenziali trascendenti; e nei casi più semplici si ricorre a particolari artificii piuttosto che a regole generali. Sono tuttavia da notare i seguenti: se f è simbolo di funzione razionale, si possono *sempre* calcolare gli integrali

$$\int f(e^x)dx\ ,\quad \int f(\operatorname{tg}x)dx\ ,\quad \int f(\operatorname{sen}x\,,\cos x)dx\ ,$$

assumendo come nuova variabile, in ciascun caso, $t=e^x$, $t=\operatorname{tg}x$, $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Così si ottiene

$$\int f(e^x)dx=\int f(t)\frac{dt}{t}\ ,\quad \int f(\operatorname{tg}x)dx=\int\frac{f(t)\,dt}{1+t^2}\ ,$$

$$\int f(\operatorname{sen}x\,,\cos x)dx=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}\,,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}\ ;$$

ed i secondi membri si calcolano facilmente come integrali di differenziali razionali. Le medesime sostituzioni sono spesso utili anche quando f non è simbolo di funzione razionale.

14. **Esercizii**: *a)* Mercè la sostituzione $e^x=t$ si giunge facilmente ai seguenti risultati:

$$\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\log(e^x+e^{-x}+2)+C\ ,\quad \int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}}={}^2/_3(e^x-2)\sqrt{1+e^x}+C\ .$$

b) Ponendo $\operatorname{tg}x=t$ si ottiene

$$\int\frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}={}^1/_2(x+\log(\operatorname{sen}x+\cos x))+C\ .$$

c) Similmente si riduce subito il calcolo di $\int\operatorname{tg}^n x dx$ a quello di $\int\frac{t^n dt}{1+t^2}$; ma si può anche, quando n è un numero intero positivo, procedere con successive applicazioni della seguente formola:

$$\int\operatorname{tg}^n x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx=\frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx\ .$$

www.rcin.org.pl

In tal modo si finisce per cadere, secondo che n è dispari o pari, sopra uno dei seguenti integrali:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\log \cos x + C \quad , \quad \int dx = x + C \; .$$

Il medesimo procedimento può servire quando n è negativo; ma in questo caso è preferibile osservare che

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} = \int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx \; ; \; ecc.$$

d) Per calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ si ponga $\operatorname{tg} x = t^2$. L'integrale proposto si trasforma così nell'altro $2\int \frac{dt}{1+t^4}$, già calcolato (§ 3, *e*); quindi si ottiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\operatorname{sen} x + \cos x + \sqrt{\operatorname{sen} 2x}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C \; .$$

e) Spesso negli integrali della terza forma indicata nel § 13 si può evitare la sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, o qualsiasi altra, mediante l'integrazione per parti, accompagnata da opportuni artificii, fra i quali è notevole la moltiplicazione del differenziale per $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Per esempio

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \cot x + C \; .$$

f) Similmente si può calcolare

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x} = -\frac{\cot x}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{3}{2 \operatorname{sen} x}\right) + \frac{3}{8} \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

facendo uso della sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$; ma è più conveniente ridurre l'integrale ad uno dei seguenti (*cfr.* IX, 12, *a*)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \; .$$

come sempre si può quando si tratta d'integrali della forma $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x}$, con n intero e positivo. Infatti si ha

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^n x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \int \cos x\, d \frac{1}{\operatorname{sen}^{n-1} x} \; ;$$

quindi, integrando per parti,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x} = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} \; .$$

Analogamente si calcola $\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

g) La sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ dà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}} \; .$$

www.rcin.org.pl

Ci troviamo dunque in presenza d'un integrale ellittico, che si può anche considerare come l'integrale d'un differenziale binomio, per cui è

$$p=-\frac{1}{2}\,,\ m=2\,,\ q=-\frac{1}{2}\,,\ \frac{p+1}{m}=\frac{1}{4}\,,\ \frac{p+1}{m}+q=-\frac{1}{4}\,.$$

Pertanto (§ 10) è vano sperare che si possa giungere, per qualsiasi via, ad esprimere $\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}$, in forma finita, con segni algebrici e logaritmici.

h) Nemmeno occorrono sostituzioni per calcolare integrali come $\int\operatorname{sen}^3x\,dx$, $\int\cos^4x\,dx$, *ecc.* La trigonometria fornisce le relazioni

$$\operatorname{sen}^3x=\frac{3}{4}\operatorname{sen}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}3x\quad,\quad\cos^4x=\frac{1}{8}\cos4x+\frac{1}{2}\cos2x+\frac{3}{8}\,,$$

dalle quali segue subito

$$\int\operatorname{sen}^3x\,dx=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos3x+C\,,\ \int\cos^4x\,dx=\frac{1}{32}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{3}{8}x+C\,.$$

i) Similmente, dato a calcolare $\int\operatorname{sen}^3x\cos^4x\,dx$, si comincerà dallo stabilire le due formole trigonometriche precedenti, per dedurne, mediante moltiplicazione (*cfr.* IX, 12, *c*),

$$32\operatorname{sen}^3x\cos^4x$$

$$=3\operatorname{sen}x\cos4x+12\operatorname{sen}x\cos2x-\operatorname{sen}3x\cos4x-4\operatorname{sen}3x\cos2x+9\operatorname{sen}x-3\operatorname{sen}3x$$

$$={}^1/_2(3\operatorname{sen}x+3\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}5x-\operatorname{sen}7x)\ ;$$

poi, integrando,

$$\int\operatorname{sen}^3x\cos^4x\,dx=\frac{1}{64}(-3\cos x-\cos3x+{}^1/_5\cos5x+{}^1/_7\cos7x)+C\,.$$

In modo analogo si calcola qualunque integrale del tipo $\int\operatorname{sen}^mx\cos^nx\,dx$; ma si può anche adoperare una formola di riduzione, che si ottiene mercè l'integrazione per parti:

$$(m+n)\int\operatorname{sen}^mx\cos^nx\,dx=\operatorname{sen}^{m+1}x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\operatorname{sen}^mx\cos^{n-2}x\,dx\ ;\ ecc.$$

j) Basta talvolta la sola integrazione per parti per fare scomparire le trascendenti sotto il segno d'integrazione. Così, per qualunque funzione razionale f, si ha

$$\int x^n\log f(x)\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log f(x)-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\frac{f'(x)}{f(x)}dx\,,$$

e l'ultimo integrale è sempre calcolabile. Per esempio (*cfr.* § 3, *b*)

$$\int x\log(x^4-1)\,dx={}^1/_2x^2\log(x^4-1)-2\int\frac{x^5dx}{x^4-1}$$

$$=(x^2-1)\log\sqrt{x^2-1}+(x^2+1)\log\sqrt{x^2+1}-x^2+C\,,$$

k) Per finire richiamiamo l'attenzione del lettore sull'esistenza di semplicissimi integrali *), contro i quali s'infrangono tutte le regole d'integrazione. È

*) Hermite, *loc. cit.*, p. 260.

www.rcin.org.pl

facile ottenere, per esempio,

$$d\,\mathrm{tg}\left(x+\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2dx}{(x\cos x-\mathrm{sen}\,x)^2},$$

e si è, per conseguenza, in diritto di scrivere

$$\int\frac{x^2dx}{(x\cos x-\mathrm{sen}\,x)^2}=\mathrm{tg}\left(x+\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)+C\ ;$$

ma, se si vuol ritrovare questo risultato mediante il calcolo del primo membro, le attuali risorse del Calcolo integrale sono e saranno ancora per lungo tempo insufficienti.

Integrali definiti notevoli.

15. **Integrali ellittici.** L'integrale ellittico completo (§ 7) di *prima* specie, $F(k)$, è facilmente calcolabile per serie, giacchè si ha

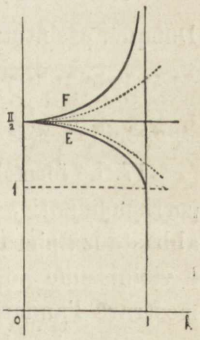
$$F(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1+\frac{1}{2}k^2\mathrm{sen}^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}k^4\mathrm{sen}^4\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\mathrm{sen}^6\varphi+\cdots\right)d\varphi\ ;$$

quindi, richiamando la formola (14) del precedente capitolo,

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2+\cdots\right\}. \qquad (5)$$

Facile è lo studio del modo di variare di $F(k)$ quando k va da 0 ad 1. Evidentemente $F(k)$ cresce sempre, da $F(0)={}^1/_2\pi$ fino ad

$$F(1)=\lim_{\varphi={}^1/_2\pi}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\lim_{\varphi={}^1/_2\pi}\log\frac{1+\mathrm{tg}\,{}^1/_2\varphi}{1-\mathrm{tg}\,{}^1/_2\varphi}=\infty\ .$$



A destra di $k=0$ la funzione cresce lentamente, giacchè la sua linea rappresentativa si comporta come la parabola $y={}^1/_8\pi x^2$ a destra del vertice; ma finisce poi per crescere rapidamente, tanto che la detta linea diventa assintotica alla retta $k=1$. Per vedere come si comporta la funzione in vicinanza di questo valore di k, osserviamo che il coefficiente di k^{2n} nello sviluppo di $F(k)$ è assintotico, in virtù della formola (15) del precedente capitolo, ad $\frac{1}{2n}$, d'onde segue (III, 21) che, alla sinistra del valore $k=1$, tende ad esser vera l'eguaglianza

$$F(k)=\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ . \qquad (6)$$

16. Similmente si calcola l'integrale ellittico completo $E(k)$, di *seconda* specie, scrivendo

$$E(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1-\frac{1}{2}k^2\mathrm{sen}^2\varphi-\frac{1}{2.4}k^4\mathrm{sen}^4\varphi-\frac{1.3}{2.4.6}k^6\mathrm{sen}^6\varphi-\cdots\right)d\varphi\ ,$$

www.rcin.org.pl

ed integrando termine a termine:

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2-\cdots\right\}. \quad (7)$$

Quando k cresce da 0 ad 1, questa funzione, decrescendo sempre, va da $^1/_2\pi$ fino ad

$$E(1)=\int_0^{^1/_2\pi}\cos\varphi\, d\varphi=1 .$$

A destra di $k=0$ la sua linea rappresentativa si comporta come la parabola $y=-{}^1/_8\pi x^2$, mentre per $k=1$ essa tocca la retta $k=1$. Per convincersi di ciò basta calcolare la derivata

$$E'(k)=-\frac{\pi}{k}\left\{\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2+\cdots\right\},$$

ed osservare che

$$kE'(k)=E(k)-F(k) ,$$

d'onde segue $\lim\limits_{k=1-0}E'(k)=-\infty$. Per sapere poi, con maggior precisione, come si comporta $E(k)$ a sinistra dell'unità, si noti che, per k tendente ad 1, il teorema di l'Hospital dà

$$\lim\frac{1-E(k)}{(1-k^2)\log\sqrt{1-k^2}}=\frac{1}{2}\lim\frac{E'(k)}{\log\sqrt{1-k^2}}=-\frac{1}{2}\lim\frac{F(k)}{\log\sqrt{1-k^2}}=\frac{1}{2}.$$

Dunque, assintoticamente,

$$E(k)=1+\frac{1-k^2}{2}\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} . \quad (8)$$

17. Le formole (5) e (7), molto utili per calcolare i valori di F e di E, corrispondenti a valori piccolissimi di k, sono inservibili quando k non è abbastanza piccolo, perchè le serie (5) e (7) convergono lentamente. Se k è vicinissimo ad 1, le formole assintotiche (6) ed (8) servono soltanto a mostrare l'andamento generale di F e di E; ma per calcolare i valori di queste funzioni bisogna rendere più complete le stesse formole, in guisa da poter contare sopra una sufficiente approssimazione. Noi qui vogliamo limitarci a far vedere come il calcolo degli integrali F ed E si possa sempre ridurre al calcolo di analoghi integrali, *corrispondenti a valori del modulo, piccoli quanto si vuole.* Questo scopo si raggiunge mercè la *sostituzione di Landen*

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{(1+\mu)\operatorname{sen}\psi}{1+\mu\operatorname{sen}^2\psi} , \quad (9)$$

in cui la costante μ (compresa fra 0 ed 1) è definita dall'eguaglianza

$$k=\frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu} .$$

www.rcin.org.pl

Un calcolo facile dà

$$\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\frac{1-\mu\operatorname{sen}^2\psi}{1+\mu\operatorname{sen}^2\psi}\quad,\quad\cos\varphi=\frac{\sqrt{1-\mu^2\operatorname{sen}^2\psi}}{1+\mu\operatorname{sen}^2\psi}\cos\psi\ ;$$

quindi dalla (9) si trae, differenziando,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}=\frac{(1+\mu)d\psi}{\sqrt{1-\mu^2\operatorname{sen}^2\psi}}\ ,$$

e finalmente

$$\mathrm{F}(k)=(1+\mu)\mathrm{F}(\mu)\ , \tag{10}$$

dopo avere osservato che, quando ψ va da 0 ad $^1/_2\pi$, crescendo sempre, altrettanto fa la variabile primitiva φ. Un calcolo analogo, che per brevità omettiamo, conduce all'altra importante formola

$$\mathrm{E}(k)=\frac{2}{1+\mu}\mathrm{E}(\mu)-(1-\mu)\mathrm{F}(\mu)\ . \tag{11}$$

È chiaro che le due formole precedenti sussistono anche quando gli integrali non sono completi; ma le amplitudini φ e ψ hanno allora valori differenti, vincolati dalla (9). La (11) porta in luce questo notevole fatto: *ogni integrale ellittico di prima specie si può esprimere mediante due integrali ellittici di seconda specie.*

18. Torniamo agli integrali completi, e facciamo vedere come si possa utilizzare la (10) per calcolare $\mathrm{F}(k)$, anche quando k è vicinissimo ad 1 Partendo da k si costruisca una successione di numeri, tali che

$$k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}\quad,\quad k_1=\frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}\quad,\quad k_2=\frac{2\sqrt{k_3}}{1+k_3}\ ,\ \ldots:$$

in generale bisognerà prendere

$$k_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{1+\sqrt{1-k_n^2}}<\frac{1-(1-k_n)}{1+(1-k_n)}<k_n\ .$$

I numeri k_n, positivi e decrescenti al crescere di n, tendono dunque ad un limite $l<1$. Questo limite deve soddisfare all'equazione $l=\frac{2\sqrt{l}}{1+l}$, la quale, sbarazzata dalla radice $l=0$, e dall'altra, inammissibile, $l=1$, si riduce a $2+\sqrt{l}+l=0$, priva di radici reali. Dunque $l=0$. Ora l'applicazione ripetuta della formola (10) dà

$$\mathrm{F}(k)=(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots(1+k_n)\mathrm{F}(k_n)\ ,$$

dove k_n *è piccolo quanto si vuole*; e così, per n sufficientemente grande, si può calcolare prima $\mathrm{F}(k_n)$ mediante la (5), poi $\mathrm{F}(k)$. Crescendo n all'infinito si ha $\lim\mathrm{F}(k_n)=\mathrm{F}(0)={}^1/_2\pi$, e conseguentemente

$$\mathrm{F}(k)={}^1/_2\pi(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots\ldots$$

Costruita una tavola di valori di F, la formola (11) permette di calcolare

www.rcin.org.pl

analogamente i valori di E. Siffatte tavole, utilissime nelle applicazioni, sono state costruite da Legendre (anche per gli integrali non completi), e diconsi *tavole ellittiche* *). Qui ci limitiamo a ricavarne alcuni valori:

$$F\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}617\ldots\ ,\ F\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}685\ldots\ ,\ F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}854\ldots\ ,\ F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2{,}156\ldots\ ;$$

$$E\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}526\ldots\ ,\ E\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}467\ldots\ ,\ E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}350\ldots\ ,\ E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1{,}211\ldots\ .$$

19. **Esercizii:** *a)* Per l'integrale $\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}$, già trattato (§ 14, *g*) mediante la sostituzione $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, è preferibile la sostituzione più semplice $\operatorname{sen}x=t$, dalla quale si è poi condotti, mercè la sostituzione $t=\cos^2\varphi$ (indicata dalle considerazioni del § 8), all'espressione normale dell'integrale proposto:

$$-2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}=-\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}}\ .$$

In particolare

$$\int_0^{{}^1/_2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}=\sqrt{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2{,}622\ldots\ .$$

b) Analogamente si calcolano gli integrali $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ e $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ponendo $x=\cos\varphi$. Così essi si trasformano rispettivamente in

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}}-\sqrt{2}\int\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\ .$$

In particolare

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}311\ldots\ ,\quad \int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0{,}599\ldots\ .$$

c) Un po' meno facile è il calcolo degli integrali $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

La sostituzione $x=-1+\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, applicata al primo, dà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\ .$$

Al secondo bisogna invece applicare, in virtù delle cose dette in fine del § 8, la sostituzione

$$x=\frac{\operatorname{tg}\varphi-(1+\sqrt{2})}{\operatorname{tg}\varphi+(1+\sqrt{2})}\ .$$

---

*) Legendre, « *Traité des fonctions elliptiques* », t. II.

www.rcin.org.pl

Così l'integrale proposto si trasforma in

$$\int \frac{(2+\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^4\varphi + 6(3+2\sqrt{2})\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^4\varphi}}\,.$$

L'espressione sottoposta al radicale risulta dalla moltiplicazione di

$$\operatorname{sen}^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^2\varphi = (3+2\sqrt{2})^2\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\operatorname{sen}^2\varphi\right)$$

per $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Dunque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{(2-\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\operatorname{sen}^2\varphi}}\,.$$

Se poi si osserva che

$$\text{per} \quad k^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \quad \text{si ha} \quad \mu = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

si ottiene, applicando la formola (10),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{F}\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}927\ldots\,.$$

d) Un integrale ellittico può pur presentarsi con un modulo $k > 1$; ma è sempre possibile ridurlo ad un modulo compreso fra 0 ed 1. Si considerino, per esempio, gli integrali

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,, \quad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\,,$$

nei quali il limite superiore non può raggiungere il valore $^1/_2\pi$, ma può andare fino ad un valore massimo α, definito dall'eguaglianza $\operatorname{sen}\alpha = 1:k$. Quando φ va da 0 ad α, la variabile ψ, vincolata a φ dalla relazione $\operatorname{sen}\psi = k\operatorname{sen}\varphi$, cresce da 0 ad $^1/_2\pi$; e poichè

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{k^2-\operatorname{sen}^2\psi}}\,,$$

si ha

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{1}{k}\mathrm{F}\left(\frac{1}{k}\right)\,, \quad \int_0^\alpha \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{k}\mathrm{F}\left(\frac{1}{k}\right) + k\left\{\mathrm{E}\left(\frac{1}{k}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Per esempio

$$\int_0^{^1/_4\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2\varphi}} = 1{,}311\ldots\,, \quad \int_0^{^1/_4\pi} \sqrt{1-2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi = 0{,}599\ldots\,.$$

e) Per un pendolo semplice, di lunghezza l, si dimostra in Meccanica che

www.rcin.org.pl

la durata di un'oscillazione completa, di ampiezza 2α, è misurata dall'integrale

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}},$$

in cui g è l'accelerazione della gravità nel posto di osservazione. Questa importante formola serve appunto a calcolare g in ciascun luogo della superficie terrestre, e per conseguenza a far conoscere, mediante un gran numero di osservazioni, la forma della superficie stessa. Posto $k = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, e $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = k \operatorname{sen}\varphi$, si ha

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) = 2k^2\cos^2\varphi\ ;$$

poi, osservando che, quando θ varia da 0 ad α, φ va sempre crescendo da 0 ad $^1/_2\pi$,

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\,F(k) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}^4\frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256}\operatorname{sen}^6\frac{\alpha}{2} + \dots\right).$$

Se α è piccolissimo si può ridurre T al solo primo termine, *indipendente da* α, e si viene in tal modo a dimostrare l'isocronismo delle piccole oscillazioni. Per avere una maggiore approssimazione basta prendere un termine di più, nello sviluppo di T, o pure, applicando la formola (10), dopo avere osservato che nel caso attuale è $\mu = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$, si può scrivere

$$T = \frac{\pi}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

f) Un altro notevole integrale, che si presenta nello studio dei vortici, è

$$\Phi = \frac{ab}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta}}\,.$$

Cominciamo dal ridurre alla sola metà inferiore l'intervallo d'integrazione, osservando che la parte dell'integrale, riferentesi alla metà superiore, si trasforma nell'altra mercè il cambiamento di θ in $2\pi - \theta$. Si può inoltre supporre $ab > 0$, perchè, se fosse $ab < 0$, basterebbe cambiare θ in $\pi - \theta$ per essere ricondotti alla prima ipotesi. D'altra parte si noti che si ha

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta = (a+b)^2 + c^2 - 4ab\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{4ab}{k^2}\left(1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

ponendo

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2}\,.$$

Per conseguenza, se si prende come variabile d'integrazione $\varphi = {}^1/_2(\pi - \theta)$, si ottiene

$$\Phi = \frac{k}{2\pi}\sqrt{ab}\int_0^\pi \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = -\frac{k}{\pi}\sqrt{ab}\int_0^{^1/_2\pi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\ ;$$

www.rcin.org.pl

quindi, scrivendo $1-2\operatorname{sen}^2\varphi$ al posto di $\cos 2\varphi$,

$$-\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\Phi = kF(k) + \frac{2}{k}\left\{E(k) - F(k)\right\}. \tag{12}$$

Le formole (5) e (7) conducono poi all'espressione di Φ mediante una serie, che procede secondo le potenze ascendenti di k:

$$\Phi = \frac{\sqrt{ab}}{16}\left(k^3 + {}^3/_4 k^5 + \cdots\cdots\right).$$

Ad un'espressione più semplice si giunge passando dal modulo k al modulo

$$\mu = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{\sqrt{(a+b)^2+c^2} - \sqrt{(a-b)^2+c^2}}{\sqrt{(a+b)^2+c^2} + \sqrt{(a-b)^2+c^2}}$$

mercè le formole (10) ed (11). Infatti, se si osserva che

$$\frac{2}{k(1+\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\ , \quad {}^1/_2 k(1+\mu) - \frac{2}{k} = \sqrt{\mu} - \left(\sqrt{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\ ,$$

la (12) si trasforma in

$$-\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\Phi = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\left(E(\mu) - F(\mu)\right). \tag{13}$$

In altri termini l'integrale proposto si trova così ridotto alla forma tipica (§ 7) d'un integrale ellittico di seconda specie:

$$\Phi = \frac{2\mu}{\pi}\sqrt{\mu ab}\int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Svolgendo in serie il secondo membro di (13) si ottiene

$$\Phi = {}^1/_2\sqrt{\mu ab}\left(\mu + \frac{3}{8}\mu^3 + \frac{15}{64}\mu^5 + \cdots\cdots\right).$$

Quando k è piccolissimo, questo sviluppo è più conveniente di quello precedentemente dedotto dalla (12); ma per k vicinissimo ad 1 conviene invece applicare direttamente alla (12) la formola assintotica (6).

g) Con un calcolo un po' lungo, ma che non offre difficoltà di sorta *), si giunge al risultato

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{\log\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\, d\varphi = -{}^1/_2 F(k)\log k - {}^1/_4\pi F(k')\ ,$$

dove $k' = \sqrt{1-k^2}$; e da questo poi scaturiscono, per k vicinissimo ad 1, le formole a cui si è accennato in principio del § 17. Qui ci limitiamo ad osservare che, se il secondo membro si pone sotto la forma

$$-{}^1/_2\left(F(k) - {}^1/_2\pi\right)\log k - {}^1/_4\pi\left(F(k') + \log k\right)\ ,$$

---

*) Schlömilch, *loc. cit.*, p. 37. Vedi anche « *Bulletin de Darboux* » (1897, p. 109).

www.rcin.org.pl

e si fa tendere k a 0, si ottiene, ricordando (IX, 10, d) che $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$ vale $-\frac{1}{2}\pi \log 2$, e scambiando poi k con k',

$$\lim_{k=1} \left(F(k) + \log \sqrt{1-k^2}\right) = \log 4 \ .$$

Questa formola non solo include la (6), ma permette di apportare in questa e nella (8) una leggiera correzione, col porre la differenza fra il primo ed il secondo membro della (6) uguale, non a zero, ma a $\log 4$:

$$F(k) = \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \quad , \quad E(k) = 1 + \frac{1-k^2}{2} \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \ .$$

h) Per dare ai lettori un saggio delle difficili questioni che si possono risolvere mediante gli integrali ellittici, vogliamo qui segnalare due interessanti formole per trarne alcune conseguenze. Quando k va da 0 ad 1, gli integrali $F(k)$ ed $F(k')$ variano in modo che il rapporto del secondo al primo va da zero all'infinito, crescendo sempre; e per conseguenza, dato un numero qualunque x fra 0 ed 1, esisterà sempre un valore di k, ed uno solo, per il quale si avrà

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{x} = \frac{F(k')}{F(k)} \ .$$

Orbene si dimostra che

$$1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + 2x^{16} + \ldots = \sqrt{\frac{2}{\pi} F(k)} \ ,$$

dove k è la *funzione di* x, definita dalla precedente uguaglianza. In particolare, quando x si accosta indefinitamente ad 1, si tende ad avere $F(k) = \pi^2 : 2 \log \frac{1}{x}$, e però la somma della serie tende ad assumere la forma (*cfr.* III, 24, d)

$$\sqrt{\frac{\pi}{\log(1:x)}} \quad \text{ovvero} \quad \sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \ .$$

Similmente si ha

$$1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16} - \ldots = \sqrt{\frac{2}{\pi} k' F(k)} \ ,$$

e per conseguenza (*cfr.* III, 24, e), ricordando la (6),

$$\lim_{x=1} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \ldots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k'=0} \sqrt{k' \log \frac{1}{k'}} = \frac{1}{2} \ .$$

Invece per $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, essendo allora anche $k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, è $x = e^{-\pi}$; quindi

$$1 + 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} + 2e^{-9\pi} + 2e^{-16\pi} + \ldots = \sqrt{\frac{2}{\pi} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 1{,}086\ldots$$

$$1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + 2e^{-16\pi} - \ldots = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 0{,}913\ldots \ .$$

Se poi si vuol fare lo scambio di k con k', bisogna ad x sostituire un altro numero x', vincolato ad x dalla relazione $\log \frac{1}{x} \log \frac{1}{x'} = \pi^2$; e siccome, d'altra

www.rcin.org.pl

parte, si ha

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}\mathrm{F}(k)\mathrm{F}(k')}\ ,$$

si vede che il primo membro rimane inalterato, come il secondo, quando ad x si sostituisce x'; e si riesce in tal modo a dimostrare una relazione segnalata precedentemente (III, 24, d). Finalmente si noti che, quando si passa dal modulo k a $\varkappa=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ mediante la sostituzione di Landen, questa conduce anche, applicata in senso inverso, da k' a $\varkappa'=\sqrt{1-\varkappa^2}$, sicchè, in virtù della (10),

$$\mathrm{F}(\varkappa)=(1+k)\mathrm{F}(k)\quad,\quad \mathrm{F}(\varkappa')={}^1/_2(1+k)\mathrm{F}(k')\ ;$$

ed il valore ξ di x, corrispondente a $\varkappa$, è tale che si ha

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\xi}=\frac{\mathrm{F}(\varkappa')}{\mathrm{F}(\varkappa)}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}(k')}{\mathrm{F}(k)}=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{x}\ ,$$

cioè $\xi=\sqrt{x}$. Dunque

$$1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x^4}+2\sqrt{x^9}+\cdots\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}(1+k)\mathrm{F}(k)}\ ,$$

$$1-2\sqrt{x}+2\sqrt{x^4}-2\sqrt{x^9}+\cdots\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}(1-k)\mathrm{F}(k)}\ .$$

Cambiando nuovamente k in $\varkappa$ si ottiene

$$1+2\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x^4}+2\sqrt[4]{x^9}+\cdots\cdots=(1+\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}\mathrm{F}(k)}\ ,$$

$$1-2\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x^4}-2\sqrt[4]{x^9}+\cdots\cdots=(1-\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}\mathrm{F}(k)}\ ,$$

e se ne deduce

$$\frac{2\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x^9}+2\sqrt[4]{x^{25}}+\cdots\cdots}{1+2x+2x^4+2x^9+\cdots\cdots}=\sqrt{k}\ .$$

D'altra parte

$$\frac{1-2x+2x^4-2x^9+\cdots\cdots}{1+2x+2x^4+2x^9+\cdots\cdots}=\sqrt{k'}\ .$$

Ora, elevando alla quarta potenza e sommando, si trova l'*identità*

$$(2\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x^9}+2\sqrt[4]{x^{25}}+\cdots)^4+(1-2x+2x^4-2x^9+\cdots)^4$$
$$=(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots\cdots)^4\ ,$$

dalla quale è poi facile dedurre, uguagliando fra loro i coefficienti delle medesime potenze di x nei due membri, il seguente teorema di aritmetica: *il numero dei modi di spezzare in quattro quadrati un intero dispari è otto volte il numero dei modi di spezzare il quadruplo del medesimo intero nei quadrati di quattro interi dispari positivi.*

www.rcin.org.pl

20. **Integrali euleriani**. Si chiamano così gli integrali

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx \quad , \quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx \ ,$$

dei quali il primo si dice di *prima specie*, ed è una funzione delle *due* variabili μ e ν, evidentemente simmetrica (come si riconosce cambiando x in $1-x$); ed il secondo, funzione dell'*unica* variabile μ, si dice di *seconda specie*. Abbiamo visto (IX, 10, g) che il secondo integrale vale $\Gamma(\mu)$, ed ora ritroveremo questo risultato calcolando il primo integrale nell'ipotesi che μ sia intero e positivo. Se inoltre si suppone $\nu > 1$, l'integrazione per parti dà

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu-2}dx$$

$$= \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}dx - \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx \ ,$$

d'onde si trae

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}dx \ ;$$

quindi, applicando successivamente questa formola stessa,

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\cdot\frac{\nu-2}{\mu+\nu-2}\cdots\frac{1}{\mu+1}\int_0^1 x^{\mu-1}dx = \frac{(\nu-1)!}{\mu(\mu+1)\cdots(\mu+\nu-1)} \ .$$

Ciò premesso, se si cambia x in $\frac{x}{\nu}$, si trova

$$\int_0^\nu x^{\mu-1}\left(1-\frac{x}{\nu}\right)^{\nu-1}dx = \frac{\nu!\,\nu^{\mu-1}}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+\nu-1)} \ ,$$

e per conseguenza, facendo crescere ν oltre ogni limite, e ricordando la definizione (III, 24, g) della funzione Γ,

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx = \Gamma(\mu) \ .$$

Qui si noti che il cambiamento di x in nx conduce alla formola

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-nx}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu} \ , \tag{14}$$

importante per le sue numerose applicazioni.

21. Ora vogliamo dimostrare che *anche gli integrali di prima specie sono esprimibili mediante la funzione* Γ. La sostituzione $x = y:(1+y)$ dà

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{(1+y)^{\mu+\nu}} \ ,$$

www.rcin.org.pl

ed al secondo membro si può dar la forma d'un integrale doppio mercè l'applicazione della formola (14), dopo avere, in questa, cambiato μ in $\mu+\nu$, ed n in $1+y$:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty y^{\mu-1}dy\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-(1+y)x}dx=\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy\,.$$

Ora, in virtù della stessa (14), si ha

$$\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy=\frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu}\,,\quad \int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}dx\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-xy}dy=\Gamma(\mu)\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}dx=\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\,.$$

Dunque

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\,. \tag{15}$$

Dopo ciò si può calcolare qualunque integrale euleriano facendo uso delle *tavole* (a venti decimali) della funzione Γ, costruite da Gauss *).

22. **Esercizii**: *a)* Proponiamoci di calcolare l'integrale di $\operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$ fra 0 ed $^1/_2\pi$, cercando di dargli la forma d'un integrale euleriano di prima specie. A ciò si riesce mediante la sostituzione $t=\operatorname{sen}^2 x$, per la quale si ottiene subito, in virtù della (15),

$$\int_0^{^1/_2\pi}\operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx={}^1/_2\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(m+n)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\,.$$

b) Così, per esempio, l'integrale $\int_0^{^1/_2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}$ si può scrivere nel seguente modo

$${}^1/_2\int_0^\pi\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}=\int_0^{^1/_2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{^1/_2\pi}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta\;;$$

quindi, applicando l'ultima formola, si ha

$$\int_0^{^1/_2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

Il paragone di questo risultato con un altro ottenuto precedentemente (§ 19, *a*) conduce alla seguente *espressione d'un integrale euleriano mediante un integrale ellittico:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=2\sqrt{\sqrt{\pi}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=3{,}625\ldots\,.$$

---

*) Vedi anche il citato « *Traité* » di Legendre, t. II.

www.rcin.org.pl

Basta poi ricordarsi d'una nota proprietà (*cfr.* IX, 10, *h*) della funzione Γ per ottenere anche, mediante le tavole ellittiche,

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\pi\sqrt{2}:\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=1{,}225\ldots\ .$$

c) Anche all'integrale $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$ si dà facilmente la forma euleriana di prima specie. Basta assumere come variabile d'integrazione $t=x^4$ per ottenere, in virtù della (15),

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}={}^1/_4\int_0^1 t^{\frac{n-3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)}\ .$$

Per esempio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,\quad \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\ .$$

Il paragone dell'ultimo risultato con un altro ottenuto innanzi (§ 19, *b*) fornisce la seguente relazione fra i valori di F e di E, corrispondenti al modulo $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{4\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\ .$$

d) Ora, con un procedimento già adoperato (IX, 28, *b*) in un caso particolare, proponiamoci di calcolare gli integrali

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}dx\ ,\quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\mu}dx\ ,$$

nei quali μ rappresenta un numero positivo, inferiore ad 1 nel primo integrale, a 2 nel secondo. Per la (14) si può scrivere

$$\frac{1}{x^\mu}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy\ ,$$

e così trasformare i due integrali proposti in integrali doppii:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\cos x\,dx\,dy=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{y^\mu dy}{1+y^2}\ ,$$

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\operatorname{sen} x\,dx\,dy=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{1+y^2}\ .$$

Intanto, se si prende come variabile d'integrazione $z=y^2:(1+y^2)$, si ha

$$\int_0^\infty \frac{y^n dy}{1+y^2}={}^1/_2\int_0^1 z^{\frac{n-1}{2}}(1-z)^{-\frac{n+1}{2}}dz={}^1/_2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\pi}{2\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\pi\right)}\ .$$

www.rcin.org.pl

Dunque

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}\ ,\quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\operatorname{sen}\frac{\mu\pi}{2}}\ .$$

In particolare

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{{}^1/_2\pi}\ ,\quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{{}^1/_2\pi}\ .$$

XI. APPLICAZIONI A MISURE GEOMETRICHE.

Lunghezze.

1. Poichè il differenziale dell'arco s d'una curva, rispetto ad una variabile qualunque t, si sa calcolare (VI, 3; VII, 1), siamo ora in grado di risalire, mercè l'integrazione, alla conoscenza dell'arco stesso in funzione di t:

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\ .$$

In particolare per le curve piane, date in coordinate cartesiane (x, y) o in coordinate polari (r, θ), si potrà assumere x o θ, rispettivamente, come variabile d'integrazione, e si avrà $s = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ o $s = \int \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$.

2. **Esempii**: *a)* Per l'*asteroide*, rappresentata dall'equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, si ha $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1 + y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$; quindi, ponendo l'origine degli archi nel punto $(0, a)$, è $s = a^{\frac{1}{3}} \int_0^x x^{-\frac{1}{3}}\,dx = {}^3/_2 a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$. In particolare ${}^3/_2 a$ è la lunghezza dell'intero arco compreso nell'angolo xOy, e però *la lunghezza totale dell'asteroide è* $6a$.

b) La *logaritmica* $y = ae^{\frac{x}{a}}$ si può rappresentare ponendo $x = a \log \operatorname{tg} \varphi$, $y = a \operatorname{tg} \varphi$. Ne segue (integrando per parti, o pure moltiplicando per $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi$)

$$s = a \int \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi} + a \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = a\left(\sec \varphi + \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) + \textit{costante}\ .$$

c) Per la *catenaria di eguale resistenza*, rappresentata da $y = -a \log \cos \frac{x}{a}$, si ha $y' = \operatorname{tg} \frac{x}{a}$; quindi $s = \int_0^x \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}} = a \log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right)$. Ora (*cfr.* VI, 15, *m*)

www.rcin.org.pl

siamo in grado di trovare l'equazione intrinseca della curva: basta sommare le uguaglianze

$$e^{\frac{s}{a}}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2a}\right) \quad , \quad e^{-\frac{s}{a}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2a}\right),$$

e ricordarsi che $\rho\cos\frac{x}{a}=a$.

d) La lunghezza d'un arco della *parabola* $y^2=2ax$, diviso per metà dal vertice, è (X, 4, *c*)

$$s=\frac{2}{a}\int_0^y\sqrt{y^2+a^2}\,dy=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}+a\log\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}\,.$$

Per esempio l'arco, la cui corda è divisa per metà dal fuoco, ha una lunghezza uguale ad 1,147... volte la lunghezza della corda.

e) La lunghezza (*cfr.* VI, 10, *m*; X, 19, *a*) della *lemniscata* $r=\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}$ è

$$4\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5{,}244...\,.$$

Similmente per la *sinusoide* $y=\operatorname{sen}x$ si trova, come lunghezza d'un arco completo (ossia compreso fra due punti consecutivi d'inflessione),

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1+\cos^2x}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2x}\,dx=2\sqrt{2}\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3{,}820...\,.$$

f) La lunghezza totale dell'*ellisse*, definita dai semi-assi a e $b=a\sqrt{1-k^2}$, o dal semi-asse focale e dall'eccentrità k, è

$$4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi=4a\mathrm{E}(k)\,.$$

Dunque, se designiamo con R il raggio d'una circonferenza, lunga quanto l'ellisse, possiamo scrivere (X, 16)

$$\mathrm{R}=\frac{2}{\pi}a\mathrm{E}(k)=a\left(1-\frac{k^2}{4}-\frac{3k^4}{64}-\frac{5k^6}{256}-\frac{175k^8}{16384}-\frac{567k^{10}}{65536}-\ldots\ldots\right).$$

Si conoscono parecchie espressioni approssimate di R; ma le più semplici sono formate mediante i numeri $a'=\frac{1}{2}(a+b)$, $b'=\sqrt{ab}$, $a''=\frac{1}{2}(a'+b')$, $b''=\sqrt{a'b'}$, ecc. Quando k è piccolissimo si può, trascurandone le potenze oltre la *seconda*, limitarsi a prendere $\mathrm{R}=a'$; ma questo valore, sempre troppo debole, non è abbastanza soddisfacente. Se si cerca invece di conservare, nello sviluppo di R, le potenze di k fino alla *sesta*, si è condotti a prendere $\mathrm{R}=3b''-2b'$, o pure $\mathrm{R}=\frac{1}{2}(3a'-b')$, valori preferibili ad a' anche perchè comprendono sempre fra loro il valore esatto di R. Del resto al primo si può sostituire la media aritmetica dei due valori, cioè $\mathrm{R}=\frac{1}{4}(3a'-5b'+6b'')$, il cui sviluppo coincide con quello di R fino alla *decima* potenza di k; *ecc.* Così per esempio, per $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$ si ha

$$a'=\frac{3}{4}\quad,\quad b'=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,\quad b''=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\quad,\quad \tfrac{1}{4}(3a'-5b'+6b'')=0{,}7709...\,.$$

Orbene le tavole ellittiche (X, 18) danno appunto $\mathrm{R}=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0{,}7709...\,.$

www.rcin.org.pl

g) La lunghezza totale della (VI, 10, k) *lumaca* $r = a\cos\theta + b$ è

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(a+b)^2-4ab\,\mathrm{sen}^2\varphi}\,d\varphi = 4(a+b)\,\mathrm{E}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Se c è il più grande, e μc il più piccolo dei numeri a e b, la formola (11) del precedente capitolo permette di scrivere l'ultima espressione nel modo che segue:

$$8c\left\{\mathrm{E}(\mu) - {}^1/_2(1-\mu^2)\,\mathrm{F}(\mu)\right\}.$$

Per esempio la lunghezza della lumaca con due flessi coincidenti ($b = 2a$) è uguale a 3,341..... volte la lunghezza del segmento intercetto dalla curva sul suo asse di simmetria.

h) Se, per calcolare la lunghezza d'un arco dell'*iperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fra il vertice $(a, 0)$ ed un punto qualunque (x, y) a coordinate positive, si osserva che

$$dx = \frac{a^2 y}{b^2 x}\,dy = \frac{ay\,dy}{\sqrt{y^2+b^2}}\quad,\quad ds = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2+b^4}{b^2(y^2+b^2)}}\,dy\,,$$

si è condotti a porre $y = \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}$, e si ottiene

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,,$$

ponendo $k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, sicchè $\frac{1}{k}$ è l'eccentricità. L'integrale precedente, moltiplicato per $1-k^2 = (1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi) - k^2\cos^2\varphi$, si può scindere in altri due:

$$(1-k^2)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - k^2\,\mathrm{F}(k,\varphi)\,.$$

Intanto l'integrazione per parti dà

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi} + \mathrm{F}(k,\varphi) - \mathrm{E}(k,\varphi)\,. \quad (1)$$

Dunque

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{F}(k,\varphi) - \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{E}(k,\varphi) + \mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2}\,.$$

Il calcolo di s, in ciascun caso particolare, richiede l'uso delle tavole (a doppia entrata) di Legendre. Si osservi che il crescere indefinito di s, quando φ tende ad ${}^1/_2\pi$, si deve unicamente all'ultimo termine, che rappresenta la *distanza del centro alla normale nell'estremo mobile.*

i) Consideriamo la *logociclica* (VI, 22, b) rappresentata dall'equazione

$$(x+y)(x^2+y^2) = 2axy\,, \qquad (2)$$

o, in coordinate polari, da $r = \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, se si prende l'asse di simmetria della

www.rcin.org.pl

curva come asse polare. La lunghezza d'un arco qualunque, a partire dal vertice, è

$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\theta \sqrt{\cos^2 2\theta+2\operatorname{sen}^2 2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\,,$$

e però la lunghezza totale del cappio formato dalla curva è

$$a\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sqrt{\cos^2 2\theta+2\operatorname{sen}^2 2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=2a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}{1+\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\,.$$

Intanto si ha dalla (1)

$$\int_0^\varphi\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}+\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right)-\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right),$$

ed un'integrazione per parti ci dà

$$\int_0^\varphi\operatorname{sen}\varphi\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)_0^\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi\frac{d\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}{\cos\varphi}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cos\varphi+\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{1+\sqrt{2}}$$

Dunque

$$\int_0^\varphi(1-\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$=1-\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cos\varphi+\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{1+\sqrt{2}}+\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right)-\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right),$$

e finalmente, facendo $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, si trova che *la lunghezza del cappio della logociclica è*

$$2a\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}-1)+\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

cioè 2,489..... volte la lunghezza del segmento che la curva stacca dal suo asse di simmetria. La proprietà di avere gli archi esprimibili mediante integrali ellittici delle prime due specie, val quanto dire mediante archi di coniche, appartiene ad infinite altre cubiche unicursali, le quali costituiscono con la logociclica la classe detta delle *cubiche circolari* *). Queste possono essere tutte rappresentate dall'equazione (2), in cui si aggiunga al secondo membro un termine della forma $(x+y)(px+qy)$, continuando a designare con $\frac{a}{\sqrt{2}}$ la distanza dell'assintoto al punto doppio.

---

*) Salmon «*Géométrie analytique*» (Courbes planes, p. 182).

www.rcin.org.pl

Si consideri la *curva di Viviani*, intersezione d'una sfera con un cilindro, che ha per base un circolo descritto sopra un raggio della sfera come diametro. Dalle equazioni della curva $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax$, si ricava $y^2=x(a-x), z^2=a(a-x)$, ed è naturale porre $x=a\cos^2\varphi$, dimodochè, limitandosi al quarto di curva, situato nella regione delle coordinate positive, si ha $y=a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi, z=a\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Quest'ultima eguaglianza ci dice che φ è il valore della latitudine del punto (x, y, z), mentre dall'espressione di x facilmente si deduce che φ è il valore della longitudine del medesimo punto. Dunque la curva di Viviani si può anche definire, *sulla sfera*, come il *luogo dei punti che hanno la longitudine uguale alla latitudine.* Ciò premesso, si ha

$$dx=-a\,\mathrm{sen}\,2\varphi\,d\varphi\ ,\ dy=a\cos 2\varphi\,d\varphi\ ,\ dz=a\cos\varphi\,d\varphi\ ;$$

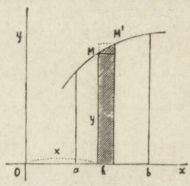
quindi, quadrando e sommando, $ds^2=a^2(1+\cos^2\varphi)\,d\varphi^2$, e però *la lunghezza totale della curva è*

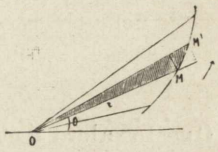
$$4a\int_0^{1/2\pi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi=4a\sqrt{2}\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

In altri termini la curva di Viviani, sulla sfera di raggio a, è lunga quanto l'ellisse descritta sui semi-assi a ed $a\sqrt{2}$, cioè quanto la circonferenza d'un circolo massimo, moltiplicata per 1,216..... Al medesimo risultato si giunge anche più agevolmente se si osserva che, quando si applica il cilindro sopra un piano, la curva si trasforma in due archi completi di sinusoide. Inversamente, per costruire la curva di Viviani, si disegni la coppia di sinusoidi $y=\pm a\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{a}$ e si stacchi dal cartoncino il pezzo compreso fra due archi terminati nei medesimi punti d'inflessione. Curvando il cartoncino in modo che la comune corda degli archi diventi una circonferenza, l'orlo si trasformerà nella curva di Viviani, appartenente alla sfera di raggio a.

Aree piane.

3. Per valutare l'area compresa fra la curva $y=f(x)$, l'asse delle ascisse e le ordinate corrispondenti ai valori a e b dell'ascissa, dividiamo (a, b) in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ed osserviamo che all'area della striscia limitata dalle ordinate condotte negli estremi dell'intervallo h_i si può sostituire quella d'un rettangolo di base h_i, la cui altezza y_i è compresa fra il minimo ed il massimo valore di y in h_i. L'area totale A non cessa così di essere rappresentata dalla somma $\sum_1^n h_i y_i$ quando gli intervalli h, crescendo in numero, tendono simultaneamente a zero; e poichè, in queste condizioni, la detta somma non può avere altro limite se non l'integrale di ydx in (a, b), è necessario che sia $A=\int_a^b ydx$. In modo analogo si dimostra che l'area compresa fra un arco della curva $r=f(\theta)$, ed i raggi vettori negli estremi, è $A={}^1/_2\int_a^b r^2 d\theta$, dove a e b sono i valori estremi di θ.



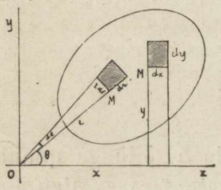


www.rcin.org.pl

Se poi si tratta di valutare l'area limitata da una curva chiusa, nell'ipotesi più semplice che questa non sia incontrata in più di due punti da qualunque parallela all'asse y, o da qualunque retta uscente dal polo, è chiaro che, se u, v sono il più piccolo ed il più grande dei due valori di y (o di r), che corrispondono a ciascun valore di x (o di θ), e se a, b rappresentano i valori estremi (ordinariamente radici di $v-u$) della variabile d'integrazione, si ha

$$A = \int_a^b (v-u)\,dx \quad , \quad A = {}^1/_2 \int_a^b (v^2 - u^2)\,d\theta \ . \tag{3}$$

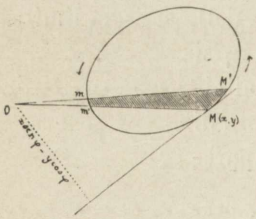
A queste formole siamo giunti decomponendo l'area in *elementi* infinitesimi del *primo* ordine; ma possiamo anche decomporla in elementi del *secondo* ordine, assumendo come tali i rettangoli costruiti sui lati dx e dy, nel caso delle coordinate cartesiane, o sui lati dr ed $rd\theta$ quando si fa uso di coordinate polari. Allora, in virtù della definizione stessa degli integrali doppii, si avrà l'una o l'altra delle formole $A = \int\int dx\,dy$, $A = \int\int r\,dr\,d\theta$, le quali includono le (3), come si riconosce scrivendo



$$A = \int_a^b dx \int_u^v dy \quad , \quad A = \int_a^b d\theta \int_u^v r\,dr \ ,$$

ma sono più generali, in quanto che possono servire a valutare l'area limitata da qualunque curva. Si noti che dalla prima alla seconda formola si può anche passare (IX, 27, *a*) per via analitica.

4. Altre formole sono specialmente utili nel caso che le coordinate x ed y dei punti del contorno siano date in funzione d'un parametro t, che si farà sempre variare in modo che il punto corrispondente percorra il contorno *lasciando l'area alla sua sinistra*. Prendiamo come elemento l'area del quadrilatero $MM'mm'$ compreso fra due rette infinitamente vicine, uscenti dall'origine; poi, osservando che



$$MM'mm' = OMM' - Om'm = OMM' + Omm' \ ,$$

assumiamo invece come elemento *positivo* o *negativo* l'area del triangolo OMM', *considerata* (cfr. III, 32, *d*) *col suo segno*:

$$OMM' = {}^1/_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x+dx \\ 0 & y & y+dy \end{vmatrix} = {}^1/_2 (x\,dy - y\,dx) \ .$$

Questo valore si ottiene anche prendendo la metà del prodotto della *base* ds per l'*altezza* $x \operatorname{sen}\varphi - y \cos\varphi$. Ora, immaginando sempre x ed y espressi in

www.rcin.org.pl

funzione della variabile d'integrazione t, si ha

$$A = {}^1/_2 \int (xdy - ydx) \ . \tag{4}$$

Siccome poi il valore dell'integrale di $xdy + ydx$, esteso ad un arco qualunque, non è che la differenza dei valori di xy negli estremi dell'arco, è chiaro che si ha $\int (xdy + ydx) = 0$ quando si estende l'integrazione a tutto il contorno. Ne segue che si può dare ad A l'una o l'altra delle forme

$$A = \int xdy \quad , \quad A = -\int ydx \ , \tag{5}$$

come si riesce a constatare anche eseguendo convenientemente la doppia integrazione $\int\int dx\,dy$. Finalmente, quando si assume $t = y : x$ come variabile d'integrazione, la (4) prende la forma $A = {}^1/_2 \int x^2 dt$, preferibile alle (5) perchè non richiede la derivazione di x o di y rispetto a t, ed è applicabile, come la (4), a qualunque porzione dell'area, limitata da due raggi vettori *). Invece, per potere applicare le (5) al caso d'un arco qualunque bisogna aggiungere o sottrarre ad A la differenza dei valori di ${}^1/_2 xy$ negli estremi dell'arco, e si ricade in tal modo sulla formola data in principio per l'area compresa fra un arco di curva, un asse, e le perpendicolari all'asse condotte per gli estremi dell'arco.

5. **Esempii**: *a)* L'area totale chiusa nella *lemniscata* $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ è

$$A = 2a^2 \int_0^{{}^1/_2 \pi} \cos 2\theta \, d\theta = a^2 \ ,$$

vale cioè quanto l'area del triangolo formato dalla tangente in un vertice con le tangenti nel punto doppio. Analogamente, per la *lumaca* $r = a \cos\theta + b$, si trova

$$A = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} ({}^1/_2 a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta + {}^1/_2 a^2 \cos 2\theta) d\theta = \pi ({}^1/_2 a^2 + b^2) \ .$$

Questo risultato suppone $b \geqq a$, ed in particolare diventa $A = {}^3/_2 \pi a^2$ per la *cardioide*; ma per $b < a$ il valore trovato rappresenta la somma delle aree limitate dai due cappii, esterno ed interno, le quali valgono rispettivamente

$${}^1/_2 \pi ({}^1/_2 a^2 + b^2) \pm \left\{ {}^3/_2 b \sqrt{a^2 - b^2} + ({}^1/_2 a^2 + b^2) \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a} \right\} .$$

b) Per la *parabola* $y^2 = 2ax$ si ha

$$A = \int_0^x y\,dx = \frac{1}{a} \int_0^y y^2 dy = \frac{y^3}{3a} = {}^2/_3 xy \ .$$

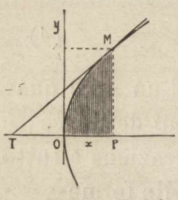
Dunque l'area parabolica OMP è le due terze parti di quella del triangolo TMP.

---

*) Essa, del resto, non differisce sostanzialmente da una formola del precedente paragrafo, alla quale si riduce subito mercè la sostituzione $t = \operatorname{tg}\theta$.

www.rcin.org.pl

Da ciò è poi facile dedurre che l'area compresa fra qualunque arco di parabola e la sua corda è i $^2/_3$ dell'area compresa fra la corda stessa e le tangenti negli estremi. Del resto a questo risultato si può anche giungere direttamente, immaginando che si ripeta il calcolo fatto in principio dopo aver presa come asse delle y la tangente parallela alla corda, e posta l'origine nel punto di contatto, ed assumendo come elemento dell'area il prodotto di ydx per il seno dell'angolo degli assi.

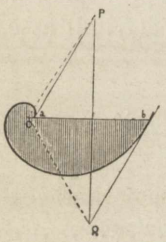


c) Per la *catenaria* (VI, 10, *c*) di parametro a, l'area compresa fra un arco qualunque, la direttrice, e le ordinate estreme, vale quanto l'area d'un rettangolo, che ha i lati uguali ad a ed alla lunghezza dell'arco. Infatti, se l'arco ha un estremo nel vertice,

$$A = \frac{a}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a^2 y' = as \ ;$$

quindi per un arco qualunque MM', si ha $A = a(s' - s) = a.\text{arco}\,MM'$.

d) Ad un punto si faccia percorrere una *spirale logaritmica* (VI, 10, *e*) finchè ritorni sul primitivo raggio vettore. Questo raggio e l'arco percorso limitano un'area, che si può facilmente valutare in funzione delle distanze a e b del polo agli estremi dell'arco. Posto $b = ae^{2m\pi}$, l'equazione della spirale è $r = ae^{m\theta}$, e si ha



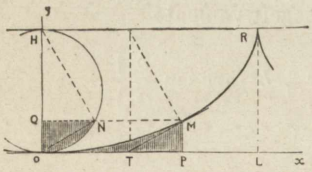
$$A = {}^1/_2 a^2 \int_0^{2\pi} e^{2m\theta} d\theta = \frac{a^2}{4m}(e^{4m\pi} - 1) = \pi \frac{b^2 - a^2}{\log \frac{b^2}{a^2}} \ .$$

Se la perpendicolare elevata alla corda, nel suo punto di mezzo, incontra in P e Q le tangenti negli estremi, l'area del triangolo (isoscele) OPQ è appunto A. Possiamo poi trovare l'area del circolo di raggio a immaginando che m tenda a zero, e conseguentemente b ad a:

$$A = \lim \frac{b+a}{2} \cdot \frac{b-a}{2m} = a^2 \lim_{m=0} \frac{e^{2m\pi} - 1}{2m} = \pi a^2 \ .$$

Notiamo inoltre che PQ tende verso la lunghezza della circonferenza.

e) Proponiamoci di valutare l'area compresa fra un arco completo (VI, 15, *n*) di *cicloide* e la sua corda. Posta l'origine nel vertice, prendiamo la tangente come asse delle x; siano L ed H le projezioni d'una cuspide R sugli assi, e P, Q le analoghe projezioni d'un punto qualunque M della cicloide. La circonferenza descritta sul diametro OH incontra il segmento MQ in un punto N, ed è noto che la tangente alla cicloide, in M, è appunto parallela ad ON, dimodochè



$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\widehat{NOx} = \frac{y}{NQ} \ ,$$

e però l'area OPM ha il valore $\int_0^x y dx = \int_0^y NQ.dy$. Essa equivale dunque all'area del mezzo segmento circolare ONQ. Segue da tutto ciò che la metà dell'area

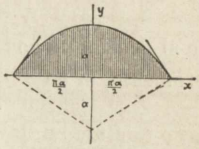
www.rcin.org.pl

cercata si ottiene sottraendo $^1/_2\pi a^2$ dell'area del rettangolo OLRH, uguale al prodotto di $OL = \pi a$ per $OH = 2a$. Dunque

$$A = 2(2\pi a^2 - {}^1/_2\pi a^2) = 3\pi a^2 ,$$

vale a dire che *l'area cercata è tripla di quella del circolo generatore.*

f) Valutiamo l'area compresa fra l'asse x e l'arco della *quadratrice* $y = x\cot\frac{x}{a}$, limitato ai due punti d'incontro col detto asse, più vicini all'origine. Evidentemente si ha



$$A = 2\int_0^{^1/_2\pi a} x\cot\frac{x}{a}\,dx = 2a^2\int_0^{^1/_2\pi}\theta\cot\theta\,d\theta = 2a^2(\theta\log\operatorname{sen}\theta)_0^{^1/_2\pi} - 2a^2\int_0^{^1/_2\pi}\log\operatorname{sen}\theta\,d\theta .$$

Intanto, in virtù del teorema di l'Hospital, per θ tendente a zero,

$$\lim(\theta\log\operatorname{sen}\theta) = -\lim\frac{\theta^2}{\operatorname{sen}\theta} = 0 .$$

Dunque (IX, 14, *j*)

$$A = -2a^2\int_0^{^1/_2\pi}\log\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \pi a^2\log 2 .$$

g) L'area totale dell'*ellisse*, i cui semi-assi sono a e b, è

$$A = 4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4ab\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt .$$

Il calcolo dell'ultimo integrale è facilissimo (IX, 16, *b*); ma possiamo evitarlo osservando che per $a = b$ si deve avere $A = \pi a^2$. Dunque, successivamente,

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt = {}^1/_4\pi \quad , \quad A = \pi ab .$$

Un po' più lungo è il calcolo in coordinate polari, quando il polo è in un fuoco dell'ellisse, nel qual caso, come si sa, l'equazione della curva è $r = b^2 : a(1 - k\cos\theta)$. Si ricorre allora ad una sostituzione, che importa conoscere anche per l'uso che se ne fa in Astronomia: $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. L'equazione della conica diventa $r = a(1 + k\cos\varphi)$, ed inoltre si ha $r d\theta = b d\varphi$. Dunque

$$A = \int_0^\pi r^2 d\theta = ab\int_0^\pi(1 + k\cos\varphi)\,d\varphi = \pi ab .$$

h) Sia data l'ellisse mediante l'equazione generale

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0 ,$$

in cui si può sempre supporre che a e b siano positivi, ed inoltre si abbia

$$ab - h^2 > 0 \quad , \quad D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} < 0 .$$

www.rcin.org.pl

Messa l'equazione sotto la forma $by^2+2(hx+f)y+ax^2+2gx+c=0$, si vede che ad ogni valore di x corrispondono due valori di y (che chiameremo u e $v>u$), i quali si confondono in uno per quei valori α e $\beta>\alpha$ di x, che soddisfano all'equazione $b(ax^2+2gx+c)-(hx+f)^2=0$. Questa si può scrivere

$$c'x^2-2g'x+a'=0,$$

se si designano con $a', b', \ldots, h'$ i complementi algebrici di $a, b, \ldots, h$ in D. Ciò premesso, si ha

$$v-u=\frac{2}{b}\sqrt{-c'x^2+2g'x-a'}=\frac{2\sqrt{c'}}{b}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\ ;$$

quindi, ponendo $x=\alpha+(\beta-\alpha)t$, ed applicando la prima delle (3),

$$A=\frac{2\sqrt{c'}}{b}(\beta-\alpha)^2\int_0^1\sqrt{t(1-t)}\,dt\ .$$

Il valore dell'ultimo integrale si può subito avere, senza calcoli, osservando che rappresenta la metà dell'area del circolo $y^2=x(1-x)$: esso è dunque $^1/_8\pi$. D'altra parte $\beta-\alpha=\frac{2}{c'}\sqrt{g'^2-a'c'}$, ed è noto *) che $a'c'-g'^2$, complemento algebrico di b' nel reciproco di D, ha il valore bD. Dunque

$$A=\frac{-\pi D}{(ab-h^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

È del resto facile riconoscere (IV, 16, a) che il secondo membro rappresenta il prodotto dei semi-assi, moltiplicato per π.

i) L'area chiusa nell'*asteroide* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ è

$$A=4\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx=6a^2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt\ .$$

Ora, mediante il cambiamento di t in $1-t$, si ottiene

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt={}^1/_2\int_0^1\sqrt{t(1-t)}\,dt=\frac{\pi}{16}\ .$$

Dunque $A={}^3/_8\pi a^2$. Del resto l'uso (X, 21) della funzione Γ permette di trovare, più generalmente, l'area compresa fra la curva $x^n+y^n=a^n$ e le parti positive degli assi:

$$A=\int_0^a(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}dx=\frac{a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}dt=\frac{a^2\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}\ .$$

Tutte le volte che l'esponente (positivo) n è il quoziente d'un numero pari per un numero dispari, si ha una curva chiusa (analoga all'asteroide o al circolo secondo che $n<1$ o $n>1$), che limita un'area quadrupla della precedente; ed in particolare si ritrovano i valori πa^2 e $^3/_8\pi a^2$ per $n=2$ ed $n={}^2/_3$.

---

*) *Analisi algebrica*, p. 31.

www.rcin.org.pl

j) Per valutare l'area chiusa in uno dei due cappii della curva rappresentata (VI, 29, *b*) dall'equazione $x^4=(x^2-y^2)y$, si adoperi la formola trovata in fine del § 4. Si ottiene subito

$$A={}^1/_2\int_0^1(t-t^3)^2dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{4}{105}\,.$$

Similmente l'area chiusa nel cappio del *folium* $x^3+y^3=3axy$ è

$$A=9a^2\int_0^1\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}=3a^2\int_1^2\frac{dz}{z^2}={}^3/_2a^2\,,$$

sicchè *il folium divide in tre parti equivalenti l'area del triangolo formato dalle tangenti nel vertice e nel punto doppio.* Più generalmente, per le curve rappresentate dall'equazione $x^{2n+1}+y^{2n+1}=(2n+1)ax^ny^n$, si trova $A=(n+{}^1/_2)a^2$.

k) Consideriamo (VI, 22, *b*) le curve

$$(x+y)(x^2-2kxy+y^2)=2(1+k)axy \tag{6}$$

ad assintoto unico ($k^2<1$), e proponiamoci di calcolare l'area chiusa nel cappio di ciascuna di esse. Procedendo come nel caso del *folium* ($k={}^1/_2$) si ottiene

$$A=4(1+k)^2a^2\int_0^1\frac{t^2dt}{(1+t)^2(1-2kt+t^2)^2}\,;$$

ma qui conviene assumere come variabile d'integrazione $z=\dfrac{1-t}{1+t}$, e scrivere

$$A={}^1/_2(1+k)^2a^2\int_0^1\frac{(1-z^2)^2\,dz}{((1-k)+(1+k)z^2)^2}\,.$$

Ora, se si cambia z in $\dfrac{z}{\sqrt{m}}$, ponendo $m=\dfrac{1+k}{1-k}$, si trova

$$A=\frac{a^2}{2\sqrt{m}}\int_0^{\sqrt{m}}\left(\frac{m-z^2}{1+z^2}\right)^2dz=\frac{a^2}{2\sqrt{m}}\left(\sqrt{m}-2(m+1)\int_0^{\sqrt{m}}\frac{dz}{1+z^2}+(m+1)^2\int_0^{\sqrt{m}}\frac{dz}{(1+z^2)^2}\right),$$

e finalmente, ricordando (X, 2) che

$$\int_0^{\sqrt{m}}\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg}\sqrt{m}\quad,\quad\int_0^{\sqrt{m}}\frac{dz}{(1+z^2)^2}={}^1/_2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{m}+\frac{\sqrt{m}}{m+1}\right),$$

si ottiene

$$A=\left(m+3+\frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}}\operatorname{arctg}\sqrt{m}\right)\frac{a^2}{4}\,.$$

In particolare, nel caso del folium ($m=3$) e della logociclica ($m=1$),

$$A={}^3/_2a^2\quad,\quad A=(1-{}^1/_4\pi)a^2\,.$$

l) Al risultato precedente si giunge anche mediante la prima formola di-

www.rcin.org.pl

mostrata nel § 3, facendo prima ruotare di $^1/_4\pi$ gli assi intorno all'origine. Allora l'equazione (6) prende la forma più semplice

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}},$$

ed un calcolo facile dà

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}}\, x dx = -{}^1/_4\left((m+3)\frac{a}{2} - x\sqrt{2}\right)\sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}$$

$$+\left\{m + 3 + \frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{\frac{2}{m}}}{a + \sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}}\right\}\frac{a^2}{8}.$$

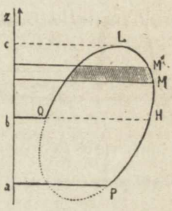
Basta fare $x = \frac{ma}{\sqrt{2}}$ per ritrovare la precedente espressione di A. Invece per $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ si ottiene il valore A′ dell'area compresa fra la curva e l'assintoto: $A' = A - \frac{(m+1)(m-3)}{8\sqrt{m}}\pi a^2$. Per $m = 3$ è $A' = A$, vale a dire che *l'area chiusa nel cappio d'un folium equivale all'area compresa fra la curva ed il suo assintoto*: quest'ultima area è divisa in tre parti equivalenti dalle tangenti nel punto doppio. Per $m = 1$ si ottiene $A' = (1 + {}^1/_4\pi)a^2$, poi $A + A' = 2a^2$. Dunque *l'area totale limitata da una logociclica e dal suo assintoto è quadrupla dell'area limitata da questa retta e dalle tangenti nel punto doppio.* Finalmente, per m infinito, $\lim A = \infty$, $\lim A' = {}^4/_3 a^2$: il cappio tende ad aprirsi in forma parabolica, tende cioè a spezzarsi in due rami infiniti (*cfr.* VI, 19, *f*) assintotici entrambi alla parabola $y^2 = {}^1/_2 a(x\sqrt{2} - a)$, mentre l'area compresa fra la curva ed il suo assintoto rettilineo resta finita.

Aree e volumi nei solidi di rotazione.

6. Dato nel piano un arco di curva, facciamolo ruotare intorno ad una retta del piano stesso. Come elemento della superficie così generata si può assumere la striscia compresa fra un parallelo qualunque, di raggio R, ed il parallelo di raggio $R + dR$, e considerarla come la superficie laterale del tronco di cono generato dall'elemento lineare ds. L'area elementare è dunque misurata dal prodotto del lato ds per la media aritmetica delle lunghezze delle basi, cioè $2\pi(R + {}^1/_2 dR)$, o semplicemente $2\pi R$. Per conseguenza, trascurando infinitesimi superiori nel differenziale dell'area, ciò che non altera il valore dell'integrale, si vede che l'area cercata è $A = 2\pi\int R ds$, dove ad R *si deve sempre attribuire il segno di ds.* Similmente, se per elemento solido si assume lo strato compreso fra l'elemento superficiale ed i

www.rcin.org.pl

piani dei due paralleli, si vede, considerando tale strato come un cilindro di base πR^2 e di altezza dz (projezione di ds sull'asse di rotazione), che il volume chiuso fra la superficie generata dall'arco ed i piani dei paralleli estremi è $V = \pi \int R^2 dz$. Nel porre i limiti a queste integrazioni si deve tener conto del modo di comportarsi della variabile lungo l'arco generatore PQ, ed aver cura del *segno* del differenziale. Nel calcolo di A la variabile s è di sua natura crescente (se si vuole) da un estremo all'altro di PQ; ma se i bisogni dell'integrazione conducessero a sostituirle un'altra variabile, si dovrà, se occorre, scindere l'integrale in altri, secondo le osservazioni fatte (IX, 13) a proposito del cambiamento della variabile d'integrazione. Se, per esempio, come avviene frequentemente quando PQ appartiene ad una curva chiusa, si sostituisce ad s la variabile z, e se questa, prima crescente da a fino a c, decresce poi da c a b, l'integrale $2\pi \int R ds$ fra i limiti a e b rappresenterebbe soltanto l'area generata da una parte PH dell'arco PQ, mentre invece si ha



$$A = 2\pi \int_a^c R \frac{ds}{dz} dz + 2\pi \int_c^b R \frac{ds}{dz} dz \ ,$$

e le due parti (essenzialmente positive) rappresentano le aree generate dagli archi PL ed LQ. Similmente

$$V = \pi \int_a^c R^2 dz + \pi \int_c^b R^2 dz \ :$$

qui la seconda parte è *negativa*, e così dev'essere, giacchè il volume corrispondente all'arco LQ si deve *sottrarre* da quello che corrisponde all'arco PL.

7. **Esempii**: *a)* Per un'*asteroide*, che ruota intorno ad una delle sue tangenti inflessionali, si ha

$$A = 4\pi \int_{x=0}^{x=a} x ds = 4\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{12}{5} \pi a^2 \ ,$$

cioè l'area totale della superficie generata è i $^3/_5$ dell'area della sfera circoscritta. Il volume del solido limitato dalla superficie stessa è (X, 21)

$$V = 2\pi \int_0^a x^2 dy = 3\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^3 dt = 3\pi a^3 \frac{3!2^4}{9.7.5.3} = \frac{32\pi a^3}{105} \ .$$

b) L'area del *catenoide*, fra il circolo di gola ed un parallelo qualunque di raggio y, è

$$A = 2\pi \int y ds = \frac{2\pi}{a} \int_0^x y^2 dx = {}^1/_2 \pi a \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2 \right) dx = \pi a (x + yy') \ .$$

Essa è dunque proporzionale al segmento dell'asse di rotazione, staccato dalla nor-

www.rcin.org.pl

male a partire dal piano del circolo di gola. Ne segue che i coni normali al catenoide, condotti dagli estremi d'un segmento qualunque dell'asse di rotazione, di lunghezza b, staccano dalla superficie una striscia, la cui area è $A = \pi a b$; ed il volume del solido limitato dalla striscia e dai piani dei paralleli estremi è

$$V = \pi \int y^2 dx = {}^1/_2\, aA = {}^1/_2\, \pi a^2 b \ .$$

c) Nelle questioni concernenti la *cicloide* giova rammentarsi (§ 5, *e*) che, se si prendono come assi la tangente e la normale nel vertice, il coefficiente angolare della tangente è $dy : dx = y : \sqrt{y(2a-y)}$, e per conseguenza

$$\frac{dx}{\sqrt{2a-y}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{ds}{\sqrt{2a}} \ .$$

Così, per esempio, se un arco completo di cicloide ruota intorno alla tangente nel vertice, esso genera una superficie, la cui area è

$$A = 4\pi \int_0^{4a} y ds = 4\pi \sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{y}\, dy = \frac{32}{3} \pi a^2 \ ,$$

cioè quasi undici volte l'area del circolo generatore; ed il solido limitato da tale superficie e dai piani dei paralleli estremi ha un volume (*cfr.* § 5, *i*)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} y^2 dx = 2\pi \int_0^{2a} y^{\frac{3}{2}} (2a-y)^{\frac{1}{2}} dy = 16\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \pi^2 a^3 \ .$$

Invece, se l'arco ruota intorno alla direttrice, si ottiene un'area *doppia*

$$A = 4\pi \int_0^{4a} (2a-y)\, ds = 32\pi a^2 - 4\pi \int_0^{4a} y ds = \frac{64}{3} \pi a^2 \ ;$$

ed il volume è *quintuplo*, giacchè, richiamando i risultati

$$\int_0^{\pi a} y dx = {}^1/_2\, \pi a^2 \quad , \quad \int_0^{\pi a} y^2 dx = {}^1/_2\, \pi a^3 \ ,$$

si trova subito

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} (2a-y)^2 dx = 5\pi^2 a^3 \ .$$

Finalmente, se l'arco ruota intorno alla normale nel vertice, bisogna innanzi tutto osservare che la lunghezza d'un arco qualunque, con un estremo nel vertice, è

$$s = \sqrt{2a} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2ay} \ ;$$

poi, siccome nella cuspide si ha $s = 4a, x = \pi a$, si ottiene, integrando per parti,

$$\int_0^{4a} x ds = 4\pi a^2 - \int_0^{\pi a} s dx = 4\pi a^2 - 2\sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{2a-y}\, dy = 4a^2 \left(\pi - \frac{4}{3}\right) .$$

Dunque l'area della superficie generata è $8\pi a^2 \left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

www.rcin.org.pl

d) Cerchiamo l'area totale d'uno *sferoide* (ellissoide di rotazione). Dall'equazione del meridiano si trae

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad , \quad ds = \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2(b^2 - y^2)}}\, dy \ ;$$

quindi

$$A = \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\, dy \ .$$

Se lo sferoide è *schiacciato* ($a > b$) basta porre $y = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ per ottenere

$$A = \frac{4\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \sqrt{1 + t^2}\, dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \ .$$

Quando il meridiano è leggermente eccentrico (come avviene per la superficie terrestre) si ha, approssimativamente, $A = 4\pi a^2(1 - {}^1/_3 k^2)$. Invece, nel caso d'uno sferoide *allungato*, si ottiene, dopo avere scambiato a con b per rappresentare sempre con $2a$ la lunghezza dell'asse focale,

$$A = \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)y^2}\, dy \ ,$$

dimodochè, posto $y = \frac{a^2 t}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, si trova

$$A = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sqrt{1 - t^2}\, dt = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} \ .$$

Per una lieve eccentricità si ottiene approssimativamente $A = 4\pi b^2(1 + {}^1/_3 k^2)$.

e) Cerchiamo l'area ed il volume d'un *toro*, cioè dell'anello generato da un circolo che ruota intorno ad una retta del suo piano. Se b è la distanza del centro all'asse di rotazione, ed $a < b$ il raggio del circolo, il raggio del parallelo è $R = b + a\cos\theta$, e si ha $ds = a d\theta$; quindi

$$A = 4\pi a \int_0^\pi (b + a\cos\theta)\, d\theta = 4\pi^2 a b \ .$$

La superficie ha due piani tangenti singolari, dai quali è toccata lungo due paralleli, che la dividono in una parte esterna ed una interna; e per conoscere le aree A′ ed A″ delle due parti basta calcolarne la differenza:

$$A' - A'' = 8\pi a^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos\theta\, d\theta = 8\pi a^2 \ .$$

Similmente il cilindro determinato dai suddetti paralleli divide l'anello in due parti,

www.rcin.org.pl

i cui volumi sono

$$V' = 2\pi a \int_0^{1/2\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta \, d\theta - 2\pi a b^2 \quad , \quad V'' = 2\pi a \int_{1/2\pi}^{\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta \, d\theta + 2\pi a b^2 \ ,$$

sicchè il volume totale dell'anello è

$$V = 2\pi a \int_0^{\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta \, d\theta = 4\pi a^2 b \int_0^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta = 2\pi^2 a^2 b \ .$$

Inoltre

$$V' - V'' = 4\pi a \int_0^{1/2\pi} (b^2 + a^2\cos^2\theta) \cos\theta \, d\theta - 4\pi a b^2 = 4\pi a^3 \int_0^{1/2\pi} \cos^3\theta \, d\theta = {}^8/_3 \pi a^3 \ .$$

Si noti che le metà delle differenze $A' - A''$ e $V' - V''$ rappresentano l'area ed il volume d'una sfera di raggio a, e che per conseguenza non variano quando l'anello si allarga indefinitamente, pur rimanendo chiuso fra i due piani tangenti singolari, supposti immobili. Di questo fatto avremo fra breve (§ 9) la spiegazione. Finalmente, se $b < a$, la circonferenza incontra l'asse, e l'area della parte visibile della superficie diventa

$$A = 4\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta) \, d\theta = 4\pi a b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + 4\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \ ;$$

il volume del solido limitato da tale superficie è

$$V = 2\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta \, d\theta = 2\pi a^2 b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + {}^2/_3 \pi (2a^2 + b^2) \sqrt{a^2 - b^2} \ .$$

In particolare per $b = 0$ si ottiene una *sfera* di raggio a, e si trova

$$A = 4\pi a^2 \quad , \quad V = {}^4/_3 \pi a^3 \ .$$

f) Si faccia ruotare la *cardioide* $r = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$ intorno al suo asse di simmetria. Il raggio del parallelo, per un dato valore di θ, è $R = r \operatorname{sen}\theta$; l'elemento lineare è $ds = 2a\cos\frac{\theta}{2} \, d\theta$; quindi, poichè θ varia, lungo la curva, sempre in un senso,

$$A = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \, d\theta = \frac{32}{5} \pi a^2 \ .$$

Per calcolare il volume totale del solido conviene assumere come variabile d'integrazione il raggio vettore r, che dalla cuspide al vertice va sempre crescendo; e siccome si ha

$$\cos\theta = \frac{r - a}{a} \quad , \quad R = r \operatorname{sen}\theta = \frac{r}{a} \sqrt{2ar - r^2} \ ,$$

si ottiene subito

$$V = \frac{\pi}{a^3} \int_0^{2a} r^3 (2a - r)(2r - a) \, dr = {}^8/_3 \pi a^3 \ .$$

www.rcin.org.pl

Il lettore potrà analogamente calcolare il volume del solido generato da una *lumaca* qualunque $r = a\cos\theta + b$, priva di punto doppio $(b > a)$, che ruota intorno al suo asse di simmetria, e troverà $V = {}^4/_3\pi b(a^2 + b^2)$. Per $b < a$ questa è la misura del volume compreso fra le superficie generate dai due cappii; ma ciascuna di queste superficie, l'interna e l'esterna, limitano due solidi, i cui volumi sono rispettivamente $\frac{\pi}{6a}(a-b)^4$ e $\frac{\pi}{6a}(a+b)^4$. A questi risultati si giunge quasi senza calcolo mediante un'altra formola, che sarà data in fine del § 14.

Baricentri.

8. Si consideri nello spazio un insieme di punti, costituenti una porzione limitata s d'una linea, d'una superficie, o dello stesso spazio a tre dimensioni. Si dà il nome di *baricentro* di s al punto G, le cui coordinate sono uguali ai valori medii (IX, 5), in s, delle corrispondenti coordinate dei punti di s. Se, per fissare le idee, s è una linea, le coordinate ξ, η, ζ di G saranno date dalle uguaglianze

$$\xi s = \int x ds \quad , \quad \eta s = \int y ds \quad , \quad \zeta s = \int z ds \; .$$

Siccome ogni trasformazione lineare eseguita sulle coordinate x, y, z dei punti di s si ripete identicamente su ξ, η, ζ, è chiaro che *la posizione del baricentro non dipende dalla scelta degli assi.* Notiamo subito che, se una figura possiede un piano di simmetria, questo contiene il baricentro. Infatti, se il piano stesso si assume come piano Oxy, ogni elemento zds dell'integrale ζ viene distrutto da un altro $-zds$, sicchè $\zeta = 0$. In particolare si noti che ogni figura piana ha il baricentro nel proprio piano, e che, se una figura possiede un centro di simmetria, in questo punto cade necessariamente il baricentro. Finalmente si osservi che, se una figura si spezza in due parti, s_1 ed s_2, delle quali si conoscono i baricentri, G_1 e G_2, il baricentro della figura totale divide G_1G_2 nel rapporto inverso di s_1 ad s_2. Ciò si deduce subito dalle formole evidenti $\xi s = \xi_1 s_1 + \xi_2 s_2$, *ecc.*

9. **Teoremi di Guldino**. Riprendiamo le formole del § 6, esprimenti l'area ed il volume generati da un arco s o da un'area σ, che ruotano intorno ad una retta del loro piano. Se questa retta si prende come asse delle x, è chiaro che quelle formole si possono scrivere nel seguente modo:

$$A = 2\pi\int y ds = 2\pi\eta . s \quad , \quad V = \pi\int y^2 dx = 2\pi\int\int y\, dx\, dy = 2\pi\eta . \sigma \; .$$

Dunque l'area ed il volume di cui si tratta *si ottengono moltiplicando la lunghezza o l'area della figura generatrice per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro della figura stessa*; e se si vuole soltanto la parte di area o di volume, compresa fra due piani meridiani, basterà evidentemente prendere, invece dell'intera circonferenza, il solo arco che ne staccano i detti piani. Ciò premesso consideriamo, più generalmente, un arco s o un'area σ in un piano che si vada spostando nello spazio in guisa da

www.rcin.org.pl

essere costantemente normale alle trajettorie dei suoi punti. È chiaro che, in queste condizioni, uno spostamento infinitesimo si può considerare come dovuto ad una rotazione del piano intorno alla sua caratteristica (VIII, 17), e però l'area ed il volume elementari in tal modo generati da s o da σ si possono ritenere, a prescindere da infinitesimi superiori, come misurati dal prodotto di s o di σ per lo spostamento dl del baricentro. In uno spostamento finito si avrà dunque $A = \int s dl = s \int dl$, $V = \int \sigma dl = \sigma \int dl$, vale a dire che l'area o il volume, generati dalla figura che si considera, *si ottengono moltiplicando* s *o* σ *per la lunghezza del cammino percorso dal rispettivo baricentro.* Questi teoremi sono utili per calcolare certe aree e certi volumi, ma possono anche, inversamente, essere utilizzati per la rapida determinazione dei baricentri di certe figure.

10. **Esempii**: *a*) Per un arco di *catenaria*, simmetrico rispetto alla normale nel vertice, il baricentro G si trova, su questa normale, ad una distanza η dalla direttrice, che si calcola (*cfr.* § 7, *b*) scrivendo $2\pi\eta . 2s = 2\pi ab$, vale a dire $\eta = \frac{ab}{2s} = {}^1/_2 b \cot\varphi$. Dunque G *divide per metà il segmento che sulla normale nel vertice staccano le normali estreme, a partire dalla direttrice.* Invece per G′, baricentro dell'area chiusa fra il medesimo arco, la direttrice, e le ordinate estreme, η è dato dalla formola $2\pi\eta . 2as = \pi a^2 b$. Dunque $\eta = {}^1/_4 b \cot\varphi$, vale a dire che G′ *è il punto medio di* OG.

b) Il baricentro d'un arco completo di *cicloide* sta sulla normale nel vertice, ad una distanza

$$\eta = \frac{1}{4a}\int y ds = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\int_0^{2a} \sqrt{y}\, dy = {}^2/_3 a$$

dal vertice stesso. Dunque (*cfr.* § 7, *c*) l'area che l'arco genera ruotando intorno alla base è ${}^4/_3 \pi a . 8a = \frac{32}{3}\pi a^2$. Seguendo la via inversa, quando si sa che il volume generato dall'area compresa fra il detto arco e la base è $5\pi^2 a^3$, si vede che il baricentro di tale area, evidentemente situato sulla normale nel vertice, sta ad una distanza η dalla base, che si calcola subito ponendo $5\pi^2 a^3$ uguale al prodotto di $2\pi\eta$ per $3\pi a^2$. Così si ottiene $\eta = {}^5/_6 a$.

c) Sopra una *circonferenza* di raggio a si consideri un arco LM; siano r, θ le coordinate del baricentro G di LM rispetto al polo O, centro della circonferenza, ed all'asse OL. Per un'osservazione fatta nel § 8 si sa che G sta sulla bisettrice dell'angolo LOM; quindi la definizione del baricentro dà

$$2a\theta . r = 2\int_0^\theta a\cos\varphi . a\, d\varphi = 2a^2 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \text{cioè} \quad r = a\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} .$$

Dunque (VI, 10, *h*) *il luogo dei baricentri degli archi d'una circonferenza, con un estremo comune* L, *è una cocleoide, che ha il vertice in* L, *ed il polo nel centro della circonferenza.* È per questa proprietà che la cocleoide viene utilizzata nei tracciati per la costruzione delle volte *). Se si fa attenzione al modo di

*) Vedi, per esempio, il « *Cours de Construction* » di N. de Vos (t. I, p. 276).

www.rcin.org.pl

spostarsi di G quando M percorre la circonferenza una o più volte, sempre in un senso, indefinitamente, è facile rendersi conto della forma e delle proprietà della cocleoide. Se poi si vuole il baricentro G′ del settore circolare LOM, si ha

$$a^2\theta . r = 2\int_0^a\int_0^\theta l\cos\varphi . l dl d\varphi = {}^2/_3 a^3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \text{cioè} \quad r = {}^2/_3 a \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} ,$$

e però G′ divide OG nel rapporto di 2 ad 1.

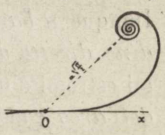
d) Per determinare rapidamente il baricentro d'una *semi-circonferenza* di raggio a basta osservare che questo punto, evidentemente situato sul diametro perpendicolare alla corda, si trova ad una distanza η dal centro, tale che la moltiplicazione di $2\pi\eta$ per πa, lunghezza della semi-circonferenza, deve produrre l'area $4\pi a^2$ della sfera di raggio a. Dunque $\eta = \frac{2a}{\pi}$. Similmente per un *semi-circolo*, ponendo il volume ${}^4/_3\pi a^3$ uguale al prodotto di $2\pi\eta$ per ${}^1/_2\pi a^2$, area del semi-circolo, si ottiene subito $\eta = \frac{4a}{3\pi}$. Più generalmente si ritrovano, nello stesso modo, i risultati del precedente esempio, dopo aver ricordato dalla Geometria elementare che l'area della calotta ed il volume del settore sferico, generati dall'arco LM e dal settore LOM, nella rotazione intorno ad OL, sono $2\pi ah$ e ${}^2/_3\pi a^2 h$, dove h è l'altezza $a(1-\cos 2\theta)$.

e) La superficie d'un *toro* (cfr. § 7, *e*), definito dal raggio a del circolo generatore e dalla distanza b (maggiore di a) del centro del circolo all'asse di rotazione, è $2\pi a . 2\pi b = 4\pi^2 ab$; il volume è $\pi a^2 . 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b$. Più generalmente la superficie laterale ed il volume d'un *tubo* (VIII, 20, *b*), fra due piani qualunque, perpendicolari alla linea dei centri, sono $2\pi al$ e $\pi a^2 l$, se con l si rappresenta la lunghezza dell'arco di questa linea, terminato ai piani stessi. Così, più generalmente ancora, la superficie laterale ed il volume d'una barra primitivamente cilindrica, che si deforma (flettendo e torcendo la linea dei baricentri) in guisa che sia conservata l'area della sezione trasversale, sono invariabili in tutte le forme che la barra va assumendo, fino a diventare, per esempio, un anello, mercè la riunione delle basi.

f) Consideriamo, per finire, una *clotoide*, interessante curva immaginata *) per discutere i fenomeni della diffrazione. Le coordinate d'un punto qualunque sono gli *integrali di Fresnel*

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi \quad , \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi ,$$

che non si sanno esprimere in forma finita, ma dei quali già conosciamo (X, 22, *d*) i valori per φ infinito: $x = y = c = {}^1/_2 a\sqrt{\pi}$. Si vede subito che $dy : dx = \operatorname{tg}\varphi$, sicchè φ è l'inclinazione della tangente sull'asse delle x, e però, crescendo φ da zero all'infinito, la curva esce dall'origine tangenzialmente al detto asse per andare ad avvolgersi assintoticamente intorno al punto (c, c), mentre *la sua curvatura cresce proporzionalmente all'arco*:



$$s = \int_0^\varphi \frac{a d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} = a\sqrt{2\varphi} \quad , \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{s}{a^2} .$$

*) Cornu « *Journal de Physique* » (1874, p. 9).

www.rcin.org.pl

La forma della curva mostra chiaramente che x ed y tendono a c oscillando indefinitamente intorno a questo valore; ma, per conoscere le posizioni dei punti della clotoide rispetto al punto assintotico Q, è indispensabile il calcolo approssimato degli integrali *) di Fresnel. Così, per esempio, se si divide l'arco OQ in infiniti archi OP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ..., tutti uguali a $2c$, le coordinate dei punti $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ sono

$$x = \text{c. } 1{,}560\ldots\ ,\ \text{c. } 0{,}977\ldots\ ,\ \text{c. } 1{,}212\ldots\ ,\ \text{c. } 0{,}997\ldots\ ,\ \ldots$$

$$y = \text{c. } 0{,}875\ldots\ ,\ \text{c. } 0{,}686\ldots\ ,\ \text{c. } 0{,}991\ldots\ ,\ \text{c. } 0{,}840\ldots\ ,\ \ldots$$

Si noti che P_1 è il punto più distante dall'asse Oy, che P_2 è il punto più vicino, sull'arco P_1Q, all'asse Ox; *ecc.* Occupiamoci ora della determinazione del baricentro d'un arco qualunque OM. Le coordinate d'un tal punto sono, in virtù della definizione,

$$\xi = {}^1/_2\rho \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} \int_0^\theta \frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}\, d\psi \quad , \quad \eta = {}^1/_2\rho \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} \int_0^\theta \frac{\operatorname{sen}\psi}{\sqrt{\psi}}\, d\psi \ .$$

Se con f si rappresenta l'uno o l'altro dei simboli *cos*, *sen*, si ha, ponendo $\psi = t\theta$, ed eseguendo l'integrazione rispetto a θ,

$${}^1/_2\rho \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} \int_0^\theta \frac{f(\psi)}{\sqrt{\psi}}\, d\psi = -{}^1/_2\rho \int_0^\varphi d\theta \int_0^1 \frac{f''(t\theta)}{\sqrt{t}}\, dt = {}^1/_2\rho \int_0^1 \frac{f'(0) - f'(t\varphi)}{t\sqrt{t}}\, dt \ ;$$

poi, assumendo $t\varphi$ come variabile d'integrazione, ed integrando per parti, l'ultima espressione si trasforma in

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\varphi\sqrt{\varphi}}\, d\varphi = -a\frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{f(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi \ ;$$

e finalmente, ponendo successivamente *cos* e *sen* al posto di f, si ottiene

$$\xi = x - \rho \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \eta = y - \rho(1 - \cos\varphi) \ .$$

Dunque il baricentro dell'arco OM sta sulla circonferenza osculatrice in M, all'estremità inferiore del diametro perpendicolare alla tangente in O. Ora siano G_1 e G_2 i baricentri degli archi OM_1 ed OM_2, e si noti che, per l'osservazione fatta in fine del § 8, il baricentro G dell'arco M_1M_2 cade in un punto della retta G_1G_2, definito dalla proporzione

$$\frac{G_1G_2}{G_2G} = \frac{s_2 - s_1}{s_1} \quad , \quad \text{ovvero} \quad \frac{GG_1}{GG_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \ .$$

Dunque *il baricentro d'un arco qualunque di clotoide è il centro di similitudine diretta dei circoli osculatori negli estremi.* Osserviamo, per finire, che se gli estremi d'un arco corrispondono a valori di φ, multipli di 2π, *il baricentro dell'arco cade sulla corda;* ed in particolare, se uno degli estremi è l'origine, il baricentro cade nell'altro estremo.

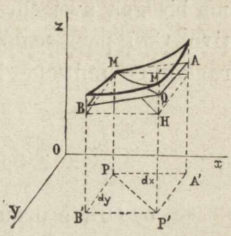
---

*) Una tavola dei valori di questi integrali si trova nelle « *Oeuvres complètes* » di Fresnel (t. I, p. 319). Vedi anche una memoria di Abria sulla diffrazione della luce nel « *Journal de Liouville* » (1849, p. 248). Quanto ai varii procedimenti immaginati per calcolare gli integrali di Fresnel, il lettore potrà consultare le « *Leçons d'optique physique* » di Verdet (t. I, p. 328).

www.rcin.org.pl

Aree e volumi qualunque.

11. **Aree**. Limitandoci alle superficie usuali ammetteremo come evidente che qualunque particella infinitesima della superficie si possa considerare come situata nel piano tangente. Ogni elemento $dx\,dy$ nel piano Oxy è la projezione ortogonale d'una particella della superficie, la cui area si può assumere come elemento dell'area A. Questo elemento è dunque misurato dal quoziente di $dx\,dy$ per il coseno dell'angolo che il piano tangente alla superficie fa col piano Oxy; e per conseguenza (VIII, 1) si ha



$$A = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy \ , \qquad (7)$$

estendendo l'integrazione a tutte le coppie di valori di x e di y, corrispondenti a punti situati in quella porzione di superficie, di cui si vuol valutare l'area. Questa formola contiene quella del § 6 come caso particolare. Infatti, nel caso d'una superficie di rotazione, posto $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, $z = f(R)$, si ha

$$p = \frac{x}{R} f'(R) \quad , \quad q = \frac{y}{R} f'(R) \quad , \quad p^2 + q^2 = f'^2(R) \ ;$$

quindi, passando (nel piano Oxy) dalle coordinate cartesiane alle polari,

$$A = \iint \sqrt{1 + f'^2(R)}\, R\, d\theta\, dR = \iint R\, d\theta\, ds = 2\pi \int R\, ds \ ;$$

ma se si vuole l'area chiusa in una curva qualunque, tracciata sulla superficie, bisogna fermarsi ad $A = \iint R\, d\theta\, ds$, e ciò equivale a prendere come elemento di A l'area della particella limitata sulla superficie dai meridiani θ e $\theta + d\theta$, e dai paralleli R ed $R + dR$. Tale area si può infatti considerare come quella d'un rettangolo, i cui lati sono gli elementi lineari ds ed $R d\theta$ del meridiano e del parallelo.

12. **Esempii**: *a)* Per calcolare l'area d'un pezzo qualunque di superficie sulla *sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, la (7) dà la formola unica $A = \iint \frac{a}{z}\, dx\, dy$, in cui rimane soltanto da stabilire i limiti, volta per volta, secondo il contorno del pezzo di superficie che si considera. Se si vuole l'area totale della sfera, si ha, calcolandone la sola ottava parte, situata nella regione delle coordinate positive,

$$A = 8a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4\pi a \int_0^a dx = 4\pi a^2 \ .$$

Veramente nel caso della sfera è preferibile adoperare l'ultima formola del precedente paragrafo, che diventa $A = a^2 \iint \cos\psi\, d\varphi\, d\psi$: questa si può anche direttamente dedurre dalla formola data in principio, tenendo conto delle relazioni

$$x = a \cos\varphi \cos\psi \ , \ y = a \operatorname{sen}\varphi \cos\psi \ , \ z = a \operatorname{sen}\psi \ ,$$

www.rcin.org.pl

per le quali si ha

$$A = \int\int \frac{a}{z}\, dx\, dy = \int\int \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \frac{d\varphi\, d\psi}{\operatorname{sen}\psi} = a^2 \int\int \cos\psi\, d\varphi\, d\psi \ ;$$

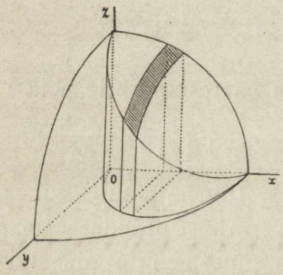
ma bisogna aver cura di far sì che l'elemento dell'integrazione si mantenga positivo. Così, per esempio, quando si calcola l'area totale della sfera, tale scopo si raggiunge limitando la variazione di ψ da 0 ad $^1/_2\pi$, e scrivendo

$$A = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{^1/_2\pi} \cos\psi\, d\psi = 4\pi a^2 \ .$$

b) Ora proponiamoci di valutare, sulla medesima sfera, l'area chiusa nella curva (§ 2, *j*) di Viviani. Questa si projetta sul piano Oxy secondo il circolo $y^2 = x(a - x)$, ed è simmetrica rispetto al piano Oxz; quindi

$$A = 2a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \int_0^a \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx \ .$$

Se con θ si designa l'arco che comparisce sotto l'ultimo integrale, si ha $x = a \operatorname{tg}^2\theta$, e l'integrazione per parti dà (IX, 12, *c*)



$$\int \theta\, dx = \theta x - a \int \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta = \frac{a}{\cos^2\theta} (\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\theta) \ .$$

Dunque, poichè θ va da 0 ad $^1/_4\pi$ quando x va da 0 ad a, si vede che $A = (\pi - 2)\, a^2$. Molto più rapido è il calcolo quando si fa uso delle coordinate polari:

$$A = 2a^2 \int_0^{^1/_2\pi} d\varphi \int_\varphi^{^1/_2\pi} \cos\psi\, d\psi = 2a^2 \int_0^{^1/_2\pi} (1 - \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi = (\pi - 2)\, a^2 .$$

c) Cerchiamo di calcolare l'area totale d'un *ellissoide*. Dall'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ si deduce.

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \ , \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z} \ , \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{c^2}{z^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{\eta^2 y^2}{b^2}\right) ,$$

dove con ε ed η si designano le eccentricità delle sezioni fatte nell'ellissoide dai piani Oxz, Oyz. La formola (7) ci dà

$$A = 8 \int\int \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{\eta^2 y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\, dx\, dy \ ,$$

dove l'integrazione va estesa a tutte le coppie di valori positivi delle variabili, soddisfacenti alla relazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$. Se si rappresenta con t il radicale sottoposto all'integrazione, si trova facilmente

$$(t^2 - \varepsilon^2) \frac{x^2}{a^2} + (t^2 - \eta^2) \frac{y^2}{b^2} = t^2 - 1 \ ,$$

www.rcin.org.pl

e si è condotti a porre

$$\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-\varepsilon^2}}\cos\theta \quad , \quad \frac{y}{b}=\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-\eta^2}}\operatorname{sen}\theta \ ,$$

con θ variabile da 0 ad $^1/_2\pi$, e t da 1 all'infinito. Prendendo t e θ come variabili d'integrazione, l'integrale precedente (IX, 26) si trasforma in

$$\int_1^\infty\int_0^{^1/_2\pi}\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)}t\,dt\,d\theta \ .$$

Intanto, se per brevità si rappresentano con $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ i valori dei radicali che compariscono nelle espressioni di x e di y, si trova

$$\frac{\partial x}{\partial t}=a\varphi'(t)\cos\theta \ , \ \frac{\partial y}{\partial t}=b\psi'(t)\operatorname{sen}\theta \ , \ \frac{\partial x}{\partial\theta}=-a\varphi(t)\operatorname{sen}\theta \ , \ \frac{\partial y}{\partial\theta}=b\psi(t)\cos\theta \ .$$

Dunque

$$A=8ab\int_0^\infty\int_0^{^1/_2\pi}\{\varphi'(t)\psi(t)\cos^2\theta+\varphi(t)\psi'(t)\operatorname{sen}^2\theta\}\,t\,dt\,d\theta \ ;$$

poi, se si osserva (IX, 14, i) che gli integrali di $\cos^2\theta\,d\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$, fra i limiti 0 ed $^1/_2\pi$, sono uguali fra loro, e che $^1/_4\pi$ è il loro comune valore, si ottiene

$$A=2\pi ab\int_1^\infty\{\varphi'(t)\psi(t)+\varphi(t)\psi'(t)\}\,t\,dt \ ,$$

ossia, finalmente,

$$A=2\pi ab\left\{(1-\varepsilon^2)\int_1^\infty\frac{t^2dt}{(t^2-\varepsilon^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}}+(1-\eta^2)\int_1^\infty\frac{t^2dt}{(t^2-\eta^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}}\right\} .$$

Più oltre non possiamo andare, nel caso generale, poichè ci troviamo in presenza di integrali ellittici; ma per $\varepsilon=\eta$ e per $\eta=0$ ricadremmo sulle formole (§ 7, d) relative allo sferoide, rispettivamente schiacciato o allungato. Finalmente, quando l'ellissoide non è che lievemente eccentrico, lo sviluppo in serie dà

$$A=4\pi ab\{1-{}^1/_6(\varepsilon^2+\eta^2)+\cdots\cdots\} \ ;$$

e poichè $c^2=ab\{1-{}^1/_2(\varepsilon^2+\eta^2)+\cdots\}$, approssimativamente si ha *)

$$A=4\pi ab\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\frac{1}{3}}=4\pi\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 .$$

d) Per calcolare con sufficiente approssimazione l'area d'un ellissoide è necessario servirsi delle tavole (a doppia entrata) di Legendre, e per questo fa d'uopo ridurre la precedente espressione di A ad una combinazione delle forme tipiche F ed E. Posto $\varepsilon=\operatorname{sen}\alpha, \eta=k\operatorname{sen}\alpha$, dimodochè

$$k=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}<1 \quad , \quad \alpha=\arccos\frac{c}{a} \ ,$$

*) Per la valutazione approssimata dell'area dell'ellissoide vedi il « *Calcul intégral* » di Boussinesq, p. 78*, ed una nota di Peano nei « *Rendiconti dei Lincei* » (1890, p. 317).

www.rcin.org.pl

la sostituzione $t = \varepsilon : \operatorname{sen}\varphi$ trasforma la suddetta espressione nella seguente:

$$A = \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos^2\alpha\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + (1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha)\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right\}.$$

Già conosciamo (§ 2, h) il valore del primo integrale:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = F(k,\varphi) - \frac{E(k,\varphi) - \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{1-k^2}.$$

Ora l'integrazione per parti ci dà

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + F(k,\varphi) - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

d'onde ricaviamo

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{E(k,\varphi)}{1-k^2} - \frac{k^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Dunque

$$A = \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos^2\alpha F(k,\alpha) + \operatorname{sen}^2\alpha E(k,\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha}\right\};$$

e finalmente, sostituendo a k e ad α le loro espressioni in funzione di a, b, c, si giunge alla *formola di Legendre:*

$$A = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left\{c^2F\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \arccos\frac{c}{a}\right) + (a^2-c^2)E\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \arccos\frac{c}{a}\right)\right\}$$

Qui, come esercizio, proponiamo al lettore di dimostrare che, se $a^2 = b^2 + c^2$, l'area è misurata da $\pi a^2 + \pi b^2 E + \pi c^2 F$, dove E ed F sono gli integrali *completi*, relativi al modulo $\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\right)^4}$. Così, per esempio, se $a^2 : b^2 : c^2 = 3:2:1$, si trova $A = \pi a^2 . 2{,}52620923...$

13. **Volumi.** Se si tratta di calcolare il volume V del solido compreso fra un pezzo di superficie, il cilindro che ne projetta ortogonalmente il contorno sul piano Oxy, e questo piano stesso, si può (*cfr.* § 3) assumere come elemento di V l'analogo volume relativo ad un elemento della superficie, il quale volume è misurato dalla base $dx\,dy$ per l'altezza z. Adunque si ha

$$V = \int\int z\,dx\,dy\,, \tag{8}$$

dove z è una funzione di x e di y, data dall'equazione della superficie. Più generalmente si può decomporre un solido qualunque in elementi infinitesimi del terzo ordine $dx\,dy\,dz$, e fondandosi sulla definizione dell'integrale multiplo si può scrivere

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz\,, \tag{9}$$

dove le successive integrazioni si debbono eseguire entro limiti convenienti,

www.rcin.org.pl

da stabilire volta per volta secondo la forma del solido. Se, per esempio, questo ha la forma descritta in principio, si può sempre, dopo aver fissati x ed y, eseguire l'integrazione di dz, da cui risulta il valore di z in superficie, dimodochè si ricade sulla (8). Può anche darsi che, fissando invece z, si conosca il risultato $\sigma(z)$ dell'integrazione di $dx\,dy$, sia cioè nota l'area della sezione piana fatta nel solido alla distanza z dal piano Oxy. In questo caso la determinazione di V è ridotta ad un'integrazione semplice

$$V = \int \sigma(z)\,dz \; : \qquad (10)$$

ciò equivale a decomporre V in elementi infinitesimi del primo ordine, considerando $\sigma(z)\,dz$ come il volume dello strato che determinano nel solido i piani z e $z+dz$, come si è già fatto nel caso particolare delle superficie di rotazione, per le quali è $\sigma(z) = \pi R^2$. Infinite altre decomposizioni di V in elementi del terzo ordine si possono immaginare; ed è notevole quella che nasce dall'uso delle coordinate polari: le sfere definite dai raggi r ed $r+dr$, i piani corrispondenti ai valori φ e $\varphi+d\varphi$ della longitudine, ed i coni determinati dai valori ψ e $\psi+d\psi$ della latitudine limitano un solido infinitesimo, che differisce per infinitesimi superiori dal parallelepipedo rettangolo, i cui lati sono $dr, r\cos\psi\,d\varphi, r\,d\psi$. Dunque

$$V = \int\int\int r^2 \cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi \;, \qquad (11)$$

come si può anche (IX, 27, b) dedurre dalla (9).

14. Ad un'altra decomposizione in elementi del secondo ordine (*cfr.* § 4) si giunge quando si vuole calcolare il volume V del solido compreso fra un pezzo di superficie ed il cono che da un punto ne projetta il contorno. Messa l'origine nel centro di projezione, è naturale assumere come elemento di V il volume del cono, col vertice nell'origine, che ha per base (§ 11) l'elemento di superficie $\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$. Siccome il volume di questo cono è misurato dalla terza parte del prodotto dell'area della base per l'altezza (distanza dell'origine al piano tangente), si ha

$$V = {}^1/_3 \int\int (z - px - qy)\,dx\,dy \;, \qquad (12)$$

cambiando, se occorre, il segno dell'elemento. Così, per esempio, per calcolare il volume compreso fra una superficie di rotazione ed i coni che ne projettano due paralleli da un punto dell'asse di rotazione, si trova (§ 11) la formola $V = {}^2/_3 \pi \int R(R\,dz - z\,dR)$. Questa, in coordinate polari, se si dirige l'asse polare secondo l'asse di rotazione, prende la forma semplicissima $V = {}^2/_3 \pi \int r^3 d\cos\theta$, che si può anche dedurre dalla (11). Del resto l'ultima formola non differisce sostanzialmente dalla formola data nel § 6, ed a questa si riduce quando si aggiunge ai due membri il volume del cono, che ha per base il parallelo variabile, di raggio R, ed il vertice nel polo:

$${}^1/_3 \pi R^2 z = {}^1/_3 \pi \int R(R\,dz + 2z\,dR) \quad , \quad V + {}^1/_3 \pi R^2 z = \pi \int R^2 dz \;.$$

www.rcin.org.pl

15. **Esempii**: *a)* Il volume totale dell'*ellissoide* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ è

$$V=8\int\int z\,dx\,dy=8c\int\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy\ ,$$

vale a dire, scrivendo i limiti delle successive integrazioni,

$$V=8c\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\ .$$

Per $y=\frac{b}{a}t\sqrt{a^2-x^2}$ l'integrale di destra si trasforma in

$$b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt={}^1/_4\pi b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Dunque $V=2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx={}^4/_3\pi abc$. A questo risultato si giunge più semplicemente mediante la (12):

$$V={}^8/_3c\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}={}^4/_3\pi bc\int_0^a dx={}^4/_3\pi abc\ .$$

Nell'un modo o nell'altro, o pure (*cfr.* § 5, *i*) calcolando prima $\sigma(z)$ per adoperare la (10), si trova più generalmente, per qualunque numero positivo n, quoziente d'un numero pari per un numero dispari, che il volume del solido limitato dalla superficie $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$ è

$$V=2\int_0^c\sigma(z)dz=\frac{4abc}{n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{2}{n}}dt=\frac{8abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\ .$$

In particolare *il volume chiuso nell'asteroide solido* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ *è* $\frac{4\pi}{35}a^3$, cioè poco più della dodicesima parte del volume della sfera circoscritta.

b) Per un ellissoide dato mediante l'equazione

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=1$$

è conveniente l'uso della formola (10), perchè la sezione piana, fatta alla distanza z dal piano Oxy, è rappresentata da un'equazione della forma

$$a'x^2+b'y^2+c'+2f'y+2g'x+2h'xy=0\ ,$$

e si sa (§ 5, *h*) che la sua area è $\sigma(z)=-\pi D':(a'b'-h'^2)^{\frac{3}{2}}$. Ora, fissato z, dal paragone dell'equazione della curva con quella della superficie risulta

$$a'=a\ ,\ b'=b\ ,\ h'=h\ ,\ f'=fz\ ,\ g'=gz\ ,\ c'=cz^2-1\ ;$$

www.rcin.org.pl

poi

$$D' = \begin{vmatrix} a & h & gz \\ h & b & fz \\ gz & fz & cz^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \dfrac{1}{z^2} \end{vmatrix} z^2 = z^2 D - (ab - h^2) ,$$

e per conseguenza

$$\sigma(z) = \frac{\pi}{\sqrt{ab - h^2}} \left(1 - \frac{z^2 D}{ab - h^2}\right) , \quad \int_0^z \sigma(z)\,dz = \frac{2\pi z}{3\sqrt{ab - h^2}} + {}^1/_3\, z\sigma(z) .$$

I limiti dell' integrazione, per V, sono evidentemente le radici di $\sigma(z)$, cioè $\pm\sqrt{\dfrac{ab - h^2}{D}}$. Dunque $V = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{D}}$.

c) Date due rette perpendicolari, che non s'incontrano, si consideri un segmento rettilineo costante, che si sposti appoggiandosi per gli estremi alle due rette. Rappresenti $2a$ la distanza fra queste rette, ed α l'inclinazione (costante) della retta mobile sulla comune perpendicolare alle rette fisse, dimodochè sia $2a : \cos\alpha$ la lunghezza del segmento mobile. Si ponga l'origine sulla comune perpendicolare, ad eguale distanza dalle rette fisse, e parallelamente a queste si dirigano gli assi delle x e delle y. Scelti in tal modo gli assi, l'equazione della superficie è

$$\frac{x^2}{(a - z)^2} + \frac{y^2}{(a + z)^2} = \operatorname{tg}^2\alpha ,$$

e per conseguenza ogni sezione fatta nella superficie con un piano perpendicolare all'asse delle z è un'ellisse, che per $z = 0$ è una circonferenza, e per $z = \pm a$ tende a convertirsi in un segmento rettilineo collocato sull'una o sull'altra delle rette fisse; gli estremi dei due segmenti sono punti singolari. Fissato per z un valore fra $-a$ ed a, l'ellisse corrispondente ha i semi-assi $(a - z)\operatorname{tg}\alpha$ ed $(a + z)\operatorname{tg}\alpha$; e poichè la somma di questi è costante, ne risulta (VI, 45, *c*) che l'inviluppo delle projezioni di tutte le analoghe ellissi sul piano Oxy è un'asteroide. In altri termini la superficie generata dal segmento mobile è tutta chiusa in un cilindro di altezza $2a$, che ha per sezione retta un'asteroide; ed i quattro segmenti curvilinei, secondo i quali essa tocca la superficie laterale del cilindro, costituiscono, insieme ai segmenti rettilinei collocati sulle rette fisse, come un tetraedro, forma approssimativa del solido generato. Siccome l'area dell'ellisse (§ 5, *g*) corrispondente ad un valore qualunque di z è $\sigma(z) = \pi(a^2 - z^2)\operatorname{tg}^2\alpha$, si trova subito come valore del volume del detto solido

$$V = 2\pi \operatorname{tg}^2\alpha \int_0^a (a^2 - z^2)\,dz = {}^4/_3\, \pi a^3 \operatorname{tg}^2\alpha ,$$

cioè i $^4/_9$ del volume del cilindro, giacchè questo volume, misurato dal prodotto dell'altezza $2a$ per l'area (§ 5, *i*) della sezione retta $^3/_8\,\pi(2a\operatorname{tg}\alpha)^2$, è $3\pi a^3 \operatorname{tg}^2\alpha$.

d) Consideriamo il *luogo dei punti, tali che la somma delle inverse delle loro distanze alle facce d'un tetraedro regolare sia nulla.* Siano Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 i vertici del tetraedro, e q_i la distanza fra un punto qualunque e la faccia opposta al vertice Q_i, distanza che si suppone positiva o negativa secondo che il punto è interno o esterno al tetraedro. L'equazione della superficie è

$$\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 0 ; \tag{13}$$

www.rcin.org.pl

ma nessuna delle formole dimostrate nei paragrafi precedenti è direttamente applicabile a questo genere di coordinate. Conviene pertanto passare alle coordinate cartesiane, ed è utile prendere come assi delle x, y, z le rette che vanno dai punti medii di Q_0Q_1, Q_0Q_2, Q_0Q_3, rispettivamente ai punti medii di Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2. Se si rappresenta con $2a$ la distanza di due lati opposti, è facile vedere che le coordinate di Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, sono rispettivamente $(-a, -a, -a)$, $(-a, a, a)$, $(a, -a, a)$, $(a, a, -a)$, e che per conseguenza si ha

$$q_0\sqrt{3} = -x - y - z + a \quad , \quad q_2\sqrt{3} = x - y + z + a \ ,$$

$$q_1\sqrt{3} = -x + y + z + a \quad , \quad q_3\sqrt{3} = x + y - z + a \ ;$$

quindi la (13) si trasforma in

$$xyz + {}^1/_2 a(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0 \ . \tag{14}$$

Eccoci dunque in presenza d'una superficie del terzo ordine, che possiede quattro punti doppii nei vertici del tetraedro, ha la forma generale d'un tetraedro per così dire gonfiato, è toccata, lungo gli spigoli, dalle facce del cubo circoscritto al tetraedro, ed è tagliata secondo sei parabole dai piani diagonali del cubo. La sezione piana fatta alla distanza z dal piano Oxy è l'ellisse rappresentata dall'equazione $x^2 + y^2 + \frac{2z}{a}xy = a^2 - z^2$, cioè un'ellisse che ha gli assi paralleli ai lati Q_0Q_3 e Q_1Q_2, ed i vertici situati su due delle sei parabole. Le lunghezze dei semi-assi sono $\sqrt{a(a-z)}$ e $\sqrt{a(a+z)}$, e dal fatto che la somma dei loro quadrati è costante si può (VI, 45, c) dedurre che, al variare di z, l'ellisse, spostandosi e deformandosi, resta tangente a quattro facce del cubo: i punti di contatto percorrono quattro spigoli del tetraedro. Ora, venendo alla questione, basta osservare che l'area dell'ellisse è $\sigma(z) = \pi a\sqrt{a^2 - z^2}$ per ottenere, applicando la formola (10),

$$V = 2\pi a \int_0^a \sqrt{a^2 - z^2}\, dz = {}^1/_2 \pi^2 a^3 = a^3 . 4{,}9348022.....$$

Questo è il volume totale, evidentemente compreso fra il volume ${}^8/_3 a^3$ del tetraedro inscritto ed il volume $8a^3$ del cubo circoscritto. Notiamo, per finire, che l'equazione (14) si può anche porre sotto la forma

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \operatorname{arc\,sen}\frac{y}{a} + \operatorname{arc\,sen}\frac{z}{a} = {}^1/_2 \pi \ , \tag{15}$$

sicchè x, y, z, a rappresentano i lati d'un quadrilatero inscritto in una circonferenza di diametro a.

e) Invitiamo il lettore a studiare, più generalmente, le superficie rappresentate dall'equazione (15), con una costante qualunque nel secondo membro. Qui ci limitiamo a considerare quella che corrisponde al valore π della costante, e che per conseguenza è il *luogo dei punti, le cui distanze ai piani d'una terna ortogonale sono uguali ai lati d'un triangolo inscritto in una circonferenza di diametro a.* L'equazione di questa superficie, in forma algebrica, è

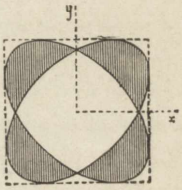
$$x^2y^2z^2 + {}^1/_4 a^2(x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2) = 0 \ .$$

www.rcin.org.pl

Intorno all'origine, diventando trascurabile il termine del sesto grado rispetto a quelli del quarto, la superficie si comporta come la quaterna di piani

$$-x^4-y^4-\ldots+2x^2y^2=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0\,,$$

intersecantisi secondo tre coppie ortogonali di rette, giacenti sulla superficie. Questa ha dunque un punto quadruplo nell'origine, e sei rette doppie. Tutta chiusa in un cubo di lato $2a$, le cui facce la toccano lungo le circonferenze in esse inscritte, la superficie limita un solido, che ha la forma generale d'un cubo, arrotondato agli angoli e sugli spigoli, e scavato fino al centro, a guisa d'imbuto, in tutte le facce. Per calcolare il volume d'un tal solido valuteremo prima l'area della sezione fatta nella superficie da un piano parallelo ad una faccia del cubo. Questa sezione consta, come si vedrà, di due ellissi uguali, con gli assi in comune, le quali si confondono in una circonferenza quando il piano coincide con una faccia del cubo, e si riducono invece ad una delle tre coppie ortogonali di segmenti rettilinei, appartenenti alla superficie, quando il piano passa per il centro del cubo. Basta dare all'equazione della superficie la forma



$$(x^2+y^2-z^2)^2=4x^2y^2\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)$$

per separare le equazioni delle due ellissi, che in coordinate polari, dopo avere posto $z=a\cos\varphi$, si scrivono così:

$$u^2=\frac{a^2\cos^2\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}2\theta}\,,\quad v^2=\frac{a^2\cos^2\varphi}{1-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}2\theta}\,.$$

Ne segue, adoperando la seconda formola (3), che l'area della sezione fatta perpendicolarmente all'asse z, alla distanza z dall'origine, è

$$\sigma(z)=4\int_0^{1/4\pi}(v^2-u^2)\,d\theta=8a^2\cos^2\varphi\int_0^{1/4\pi}\frac{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}2\theta\,d\theta}{1-\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2 2\theta}\,;$$

poi, prendendo come variabile d'integrazione $t=\operatorname{tg}\varphi\cos 2\theta$,

$$\sigma(z)=4a^2\cos\varphi\int_0^{\operatorname{tg}\varphi}\frac{dt}{1+t^2}=4a^2\varphi\cos\varphi\,,$$

giacchè, dovendo φ variare da 0 ad $^1/_2\pi$, è certamente $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)=\varphi$. Quindi la (10) dà

$$V=2\int_0^a\sigma(z)\,dz=8a^3\int_0^{1/2\pi}\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi=a^3\int_0^{\pi}\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,,$$

e finalmente, integrando per parti,

$$V=a^3(\varphi\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi)_\pi^0=\pi a^3\,.$$

Questo volume è appena i $^2/_9$ del volume della minima sfera, che chiude in sè l'intera superficie, sfera evidentemente concentrica alla superficie stessa, e tan-

www.rcin.org.pl

gente ad essa in otto punti, che sono altrettanti ombelichi. Con un calcolo analogo si trova che la capacità di ciascun imbuto è $^1/_4\pi a^3$, dimodochè il volume della specie di dado, o cubo arrotondato sui vertici, che si ottiene colmando i sei imbuti, è $^5/_2\pi a^3$; e si verifica che la quantità di solido da portar via su ciascun vertice del cubo per l'effettiva costruzione del corpo che si sta considerando è una molto piccola frazione del volume totale del cubo, cioè 0,00228...

XII. EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Equazioni fra due variabili.

1. Il problema dell'integrazione, come lo abbiamo fin qui trattato, è un caso particolarissimo del problema consistente nella *ricerca di quelle funzioni d'una o più variabili indipendenti, le quali funzioni siano legate alle variabili ed alle proprie derivate da una o più relazioni.* Queste si dicono *equazioni differenziali*, e la ricerca delle funzioni incognite è ancora un problema d'integrazione. Così, nel caso più semplice, che tratteremo in primo luogo, è data l'equazione differenziale $f(x,y,y',y'',\ldots)=0$, e ci si propone di trovare *tutte* le funzioni y per le quali è identicamente soddisfatta l'equazione stessa. Simili equazioni diconsi *ordinarie* per distinguerle da quelle alle *derivate parziali*, nelle quali compariscono, con due o più variabili indipendenti, le derivate delle funzioni incognite rispetto alle diverse variabili. In tutti i casi si chiama *ordine* dell'equazione l'ordine massimo delle derivate, ordinarie o parziali, che sono in essa contenute. Noi ci occuperemo quasi esclusivamente delle equazioni del primo ordine.

2. **Integrale generale ed integrali particolari.** Suppongasi l'equazione $f(x,y,y')=0$ atta a definire y' come funzione continua di x e di y, e per ciascun punto (x,y) si tracci una retta, nella direzione definita da un coefficiente angolare uguale al corrispondente valore di y'. Se immaginiamo che un punto mobile M, partendo da una posizione arbitraria M_0, si sposti infinitamente poco, fino ad M_1, lungo la retta tracciata per M_0, poi da M_1 ad M_2 lungo la retta tracciata per M_1, e così via, indefinitamente, è chiaro che l'equazione proposta sarà soddisfatta lungo tutta la linea descritta da M. Se poi si prende, fuori di questa linea, un altro punto iniziale, si riesce a costruire un'altra linea analoga, e poi, partendo sempre da nuovi punti, infinite altre linee, costituenti, tutte, una famiglia $F(x,y,a)=0$. Questa equazione, atta a definire infinite funzioni y, soddisfacenti all'equazione differenziale proposta, si chiama *integrale gene-*

www.rcin.org.pl

rale dell'equazione stessa, ed include infiniti *integrali particolari*, corrispondenti ai singoli valori della costante a. Adunque l'equazione differenziale $f(x,y,y')=0$ *coordina* soltanto i punti del piano lungo una semplice infinità di linee, ma *non vincola* effettivamente y ad x, giacchè la presenza della costante arbitraria a nell'integrale generale permette di fissare a piacimento, per ciascun valore di x, anche il valore di y. Ne segue che, se si vuol definire una funzione y mediante un'equazione differenziale del primo ordine, bisogna inoltre imporre la condizione che, per un dato valore di x, la funzione abbia un valore prescritto. In altri termini, *dati arbitrariamente* x_0 *ed* y_0, *esiste una funzione continua* y *di* x, *che soddisfa alla data equazione* $f(x,y,y')=0$, *e prende per* $x=x_0$ *il valore* y_0. Per la validità di questo enunciato sono indispensabili alcune restrizioni, che non appariscono dalle precedenti considerazioni; le quali, d'altronde, se ci permettono di renderci conto dell'esistenza, della forma e del significato geometrico dell'integrale generale, non ci dispensano da una rigorosa dimostrazione analitica *). Qui vogliamo limitarci a richiamare l'attenzione sull'*unicità* dell'integrale generale, cioè sull'impossibilità dell'esistenza di due distinte funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$, le quali possano, uguagliate a costanti arbitrarie, rappresentare l'integrale generale d'una medesima equazione differenziale. Infatti, per l'identità fra i valori di y', ricavati dalle relazioni $u=costante$ e $v=costante$, si richiede che si abbia

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0\ ,$$

e per conseguenza (V, 30) che vi sia un vincolo fra u e v, dimodochè porre v uguale ad una costante è lo stesso che fissare il valore di u, e viceversa.

3. **Integrale singolare.** L'integrale generale $F(x,y,a)=0$ dell'equazione $f(x,y,y')=0$ soddisfa ancora a questa equazione allorchè si considera a, non come una costante, ma come una funzione di x e di y, implicitamente definita da $F'_a(x,y,a)=0$, giacchè (*cfr.* VI, 39) il valore di y' ricavato in questa seconda ipotesi è lo stesso di quello che si otterrebbe supponendo a costante. *Integrale singolare* si chiama appunto l'integrale che risulta dall'eliminazione di a fra le equazioni $F=0$ ed $F'_a=0$. Ciò si può esprimere in termini geometrici dicendo che ad una data equazione differenziale del primo ordine non soddisfano soltanto le infinite curve rappresentate dall'integrale generale, ma soddisfa altresì l'inviluppo delle curve stesse, rappresentato dall'integrale singolare. Perciò si suol dire che *l'integrale singolare è l'inviluppo degli infiniti integrali particolari.* Grazie all'esistenza dell'integrale singolare, un punto che si vada spostando con continuità, in modo da soddisfare costantemente ad una data equazione dif-

*) Vedi il « *Traité d'Analyse* » di Picard (t. II, p. 292).

www.rcin.org.pl

ferenziale, non è per questo obbligato a rimanere sopra una curva particolare, ma può trasferirsi su qualunque altra percorrendo un conveniente arco dell'inviluppo *).

4. È notevole che l'integrale singolare si può ottenere senza eseguire alcuna integrazione. Se il primo membro dell'equazione differenziale considerata $f=0$ è una funzione continua, dotata di derivate parziali prime continue, *l'integrale singolare risulta dall'eliminazione di* y' *fra le equazioni* $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$. Fissiamo infatti una curva, tra le infinite che sono rappresentate dall'integrale generale, e supponiamo che essa tocchi in A la curva rappresentata dall'integrale singolare. Consideriamo un'altra curva particolare, infinitamente vicina alla prima, e sia A′ il punto, infinitamente vicino ad A, nel quale essa tocca la curva singolare. Si capisce che le due curve particolari hanno un punto comune M, infinitamente vicino ad A, le cui coordinate ξ ed η tendono, per conseguenza, alle coordinate x ed y di A quando A′ tende a confondersi con A. Ora nel punto M siano η' ed $\eta'+h$ i coefficienti angolari delle tangenti alle due curve particolari, che ivi s'incontrano. Si capisce ancora che, nel tendere di A′ ad A, le due tangenti tendono a confondersi entrambe con la tangente in A alla curva singolare, cioè si avrà simultaneamente $\lim\xi=x$, $\lim\eta=y$, $\lim\eta'=y'$, $\lim h=0$. Intanto, poichè M appartiene a due curve soddisfacenti all'equazione differenziale proposta, si deve avere $f(\xi,\eta,\eta')=0$, $f(\xi,\eta,\eta'+h)=0$; e la seconda equazione, quando vi si trascurano le potenze di h, dalla seconda in su, diventa $f'_{y'}(\xi,\eta,\eta')=0$. Dunque, al limite, $f(x,y,y')=0$, $f'_{y'}(x,y,y')=0$.

5. Per ciò che riguarda l'integrazione delle equazioni differenziali, non esiste un metodo applicabile a tutte le equazioni, e noi dobbiamo qui limitarci a segnalare pochi casi, nei quali si giunge alla conoscenza dell'integrale generale per via di speciali procedimenti:

a) Se dall'equazione proposta si suppone ricavata una delle possibili espressioni di y', e se per y' si pone $dy:dx$, si è condotti ad integrare una equazione della forma $udx+vdy=0$, con u e v funzioni di x e di y. L'integrazione è immediata $(\int udx+\int vdy=costante)$ se u è funzione della sola x, e v della sola y. Allora si dice che le variabili *sono separate*. Ciò si può sempre ottenere quando u e v sono prodotti di funzioni della sola x per funzioni di y: basta dividere l'equazione per la funzione di y, che comparisce in u, e per la funzione di x, che comparisce in v.

b) A separare le variabili si riesce sempre quando u e v sono funzioni *omogenee*, dello stesso grado. Infatti, posto $y=tx$, dimodochè sia

*) Questa osservazione, così semplice, è stata con somma abilità utilizzata da Boussinesq per la « *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale* » (Paris, Gauthiers-Villars, 1878). Vedi anche lo studio del medesimo Autore « *sur divers points de la philosophie des sciences* » p. 82.

www.rcin.org.pl

$u = x^n\varphi(t)$, $v = x^n\psi(t)$, l'equazione si trasforma in

$$\varphi(t)dx + \psi(t)(tdx + xdt) = 0 \ ;$$

quindi, dividendo tutto per x e per $\varphi + t\psi$, ed integrando, si ottiene

$$\log x + \int \frac{\psi(t)dt}{\varphi(t) + t\psi(t)} = costante.$$

c) Assai facile è l'integrazione dell'equazione differenziale $f(x,y,y')=0$ tutte le volte che in essa manca x o y, supponendo, beninteso, che non si sappia o non si voglia risolvere l'equazione rispetto ad y', altrimenti da $y' = \varphi(x)$ o $y' = \varphi(y)$ si ricaverebbe subito $y = \int\varphi(x)dx$ o $x = \int\frac{dy}{\varphi(y)}$, rispettivamente. Supponiamo invece che l'equazione proposta si sappia risolvere rispetto ad x o ad y. Se, per esempio, si ha $x = \varphi(y')$, posto $y' = t$ se ne ricava $y = \int tdx = \int t\varphi'(t)dt$, e l'eliminazione di t fra

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = t\varphi(t) - \int\varphi(t)dt \ ,$$

fornisce l'equazione cercata in x ed y. Similmente da $y = \varphi(y')$, posto $y' = t$, si deduce $x = \int\frac{dy}{t} = \int\frac{\varphi'(t)}{t}dt$; *ecc.*

d) Le equazioni del *secondo* ordine $f(x, y, y', y'') = 0$, nelle quali manca x o y, sono facilmente riducibili a quelle del primo, perchè, se manca y, si può considerare y' come la funzione incognita, e l'equazione è allora del primo ordine, sicchè l'integrazione, supposta possibile, conduce ad un'equazione $F(x, y', a) = 0$; quindi, integrando ancora, si giunge alla relazione cercata fra x ed y, con *due* costanti arbitrarie, a e b. Se invece manca x, basta assumere y come variabile indipendente, e considerare y' come funzione incognita, osservando che $y'' = \frac{dy'}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}$, per ottenere così un'equazione del primo ordine, che integrata dà $F(y, y', a) = 0$; *ecc.*

e) Quando l'espressione di y', ricavata da un'equazione differenziale del primo ordine, è del *primo grado* in y, l'equazione si dice *lineare*, e l'integrazione è sempre possibile. Infatti, se si pone $y = uv$, l'equazione

$$y' + y\varphi(x) = f(x)$$

si trasforma in $u'v + (v' + v\varphi)u = f$, e si riduce ad $u'v = f$ se per v si sceglie una funzione soddisfacente alla condizione $v' + v\varphi = 0$, cioè, separando le variabili ed integrando, $v = e^{-\int\varphi dx}$. Dunque $u' = fe^{\int\varphi dx}$, e finalmente

$$y = e^{-\int\varphi dx}\int e^{\int\varphi dx}.fdx \ .$$

Occorrono dunque due *quadrature*, come si suol dire, ossia due integrazioni semplici, per calcolare l'integrale generale di qualunque equazione differenziale *lineare* del primo ordine.

www.rcin.org.pl

f) L'*equazione di Bernoulli* $y' + y\varphi(x) = y^n f(x)$ si riduce subito alla precedente: basta dividere tutto per y^n, ed assumere y^{1-n} come funzione incognita.

g) Interessante è l'*equazione di Clairaut* $y = xy' + f(y')$. Derivandola si ottiene $(x + f'(y'))y'' = 0$; quindi, successivamente, $y'' = 0, y' = a$, $y = ax + f(a)$: questo è l'integrale *generale*. Se non è $y'' = 0$, si deve avere $x + f'(y') = 0$; e se il valore di y', che di qui si ricava, si sostituisce nell'equazione proposta, si trova l'integrale *singolare*, e la via seguìta per ottenerlo è proprio quella indicata nel § 4.

h) L'equazione $y = x\varphi(y') + \psi(y')$, quando non è un'equazione di Clairaut, è riducibile ad un'equazione lineare, giacchè se ne deduce, derivando,

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x\varphi'(y') + \psi'(y')}{\varphi(y') - y'} = 0 .$$

L'integrazione fatta considerando x come funzione incognita della variabile indipendente y' dà una relazione della forma $F(x, y', a) = 0$, e l'eliminazione di y' fra questa e l'equazione proposta conduce all'integrale generale cercato. Più generalmente, tutte le volte che un'equazione differenziale si può mettere sotto la forma $y = f(x, y')$, si ottiene, derivando,

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' ;$$

e se questa equazione (del primo ordine rispetto alla funzione incognita y') si sa integrare, l'eliminazione di y' fra il suo integrale generale $F(x, y', a) = 0$ e l'equazione proposta condurrà alla relazione cercata fra x ed y.

i) Se l'espressione di y', ricavata da un'equazione differenziale del primo ordine, è del *secondo grado* in y, l'integrazione si può eseguire solo in casi specialissimi, dei quali ci occuperemo nel paragrafo seguente. Per ora ci limitiamo a segnalare alcune notevoli proprietà di siffatte equazioni

$$y' = y^2\varphi(x) + y\chi(x) + \psi(x) ,$$

che si chiamano *equazioni di Riccati*. Quando in un modo qualsiasi si arriva a conoscere *un* integrale particolare u, l'integrazione è possibile mediante *due* quadrature, perchè, se si pone $y = u - \frac{1}{z}$, l'equazione prende la forma lineare $z' + (2u\varphi + \chi)z = \varphi$, e però l'integrale generale è

$$y = u - \frac{e^{\int (2u\varphi + \chi)dx}}{\int e^{\int (2u\varphi + \chi)dx} . \varphi dx} . \tag{1}$$

Quando si conoscono *due* integrali particolari, l'integrazione si riduce ad *una* quadratura. Infatti, se dall'equazione proposta si sottraggono le identità

$$u' = u^2\varphi + u\chi + \psi \quad , \quad v' = v^2\varphi + v\chi + \psi ,$$

www.rcin.org.pl

si ottengono le equazioni

$$\frac{d}{dx}\log(y-u)=(y+u)\varphi+\chi \quad , \quad \frac{d}{dx}\log(y-v)=(y+v)\varphi+\chi \; ;$$

quindi, sottraendo queste l'una dall'altra, ed integrando,

$$\frac{y-u}{y-v}=e^{\int(u-v)\varphi dx} . \tag{2}$$

Se poi si conoscono *tre* integrali particolari, l'integrazione si esegue *senza* quadrature, giacchè dalla precedente relazione si deduce subito

$$\frac{y-u}{y-v}:\frac{w-u}{w-v}=costante.$$

Dunque *il rapporto anarmonico di quattro integrali particolari qualunque dell'equazione di Riccati è costante.* Notiamo, per finire, la forma semplicissima alla quale si può sempre ridurre un'equazione di Riccati, prendendo rispettivamente

$$z=ye^{-\int\chi dx} \quad , \quad t=-\int e^{\int\chi dx}.\varphi dx$$

come funzione incognita e come variabile indipendente. Si ha

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{y'-y\chi}{e^{2\int\chi dx}.\varphi}=-\frac{y^2\varphi+\psi}{e^{2\int\chi dx}.\varphi}=-z^2-\frac{\psi}{\varphi}e^{-2\int\chi dx},$$

e però l'equazione si trasforma in $z'+z^2=f(t)$.

6. **Esempii**: *a)* Per integrare l'una o l'altra equazione

$$(3x^2-y^2)y\,dx-(x^2-3y^2)x\,dy=0 \;,\; (x^2-3y^2)x\,dx+(3x^2-y^2)y\,dy=0 \;.$$

basta (§ 5, *b*) porre $y=tx$, per trasformare così le equazioni in

$$\frac{dx}{x}-\frac{(1-3t^2)dt}{2t(1+t^2)}=0 \quad , \quad \frac{dx}{x}+\frac{(3-t^2)t\,dt}{1-t^4}=0 \;,$$

e dedurne, integrando,

$$x=\frac{a\sqrt{2t}}{1+t^2} \quad , \quad x=a\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2} \;,$$

cioè, rispettivamente, $x^2+y^2=a\sqrt{2xy}$, $x^2+y^2=a\sqrt{x^2-y^2}$, o, in coordinate polari, $r=a\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}$, $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$. Dunque gli integrali dell'una o dell'altra equazione rappresentano (VI, 10, *m*) le infinite lemniscate, toccate nel polo dagli assi o dalle bisettrici degli assi. Si verifica facilmente che le due equazioni esprimono una proprietà comune alla tangente ed alla normale, cioè la proprietà di fare col raggio vettore un angolo doppio dell'inclinazione del raggio stesso sopra una retta fissa: questa è una tangente nel polo o l'asse normale di simmetria, secondo che si tratta della tangente o della normale.

b) Per integrare $(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0$ possiamo prendere come nuove variabili $\xi=ax+by+c$, $\eta=a'x+b'y+c'$, a meno che

www.rcin.org.pl

non sia $ab' = ba'$, nel qual caso vi sarebbe già un legame fra ξ ed η. L'equazione diventa $(b'\xi - a'\eta)\,d\xi - (b\xi - a\eta)\,d\eta = 0$, e per integrarla basta porre $\eta = t\xi$; *ecc.* Se poi $ab' = ba'$, ed insieme $ac' = ca'$, l'equazione, liberata dal fattore $ax + by + c$, dà $ax + a'y = costante$. Invece per $ac' \gtrless ca'$ si può scrivere

$$(ax + by)\,d(ax + a'y) + ad(cx + c'y) = 0 \ ,$$

dimodochè, prendendo come nuove variabili $\xi = ax + a'y$, $\eta = cx + c'y$, si giunge ad un'equazione della forma $(\alpha\xi + \beta\eta)\,d\xi + ad\eta = 0$. Basta poi, per separare le variabili, sostituire $z = \alpha\xi + \beta\eta$ ad η: si ottiene $(\beta z - a\alpha)\,d\xi + adz = 0$; *ecc.*

c) L'equazione $y \operatorname{sen} x + y' \cos x = 1$ è lineare, e però, per integrarla, basta (§ 5, *e*) determinar prima *una* funzione v soddisfacente a $v \operatorname{sen} x + v' \cos x = 0$, e poi, posto $y = uv$, cercare *tutte* le funzioni u soddisfacenti a $vu' \cos x = 1$. In tal modo si ottiene, successivamente, $v = \cos x$, $u = \operatorname{tg} x + a$, $y = \operatorname{sen} x + a \cos x$.

d) Data ad integrare l'equazione $(y - xy') \cos y' = 1 - x \operatorname{sen} y'$, se ne ricavi, per derivarla (§ 5, *h*), l'espressione di y:

$$y = x(y' - \operatorname{tg} y') + \sec y' \quad , \quad x \operatorname{sen} y' + \frac{dx}{dy'} \cos y' = 1 \ .$$

Ora, trattando x come funzione incognita della variabile indipendente y', si trova $x = \operatorname{sen} y' + a \cos y'$, e se ne deduce $(1 + a^2) \operatorname{sen} y' = x \pm a\sqrt{1 + a^2 - x^2}$, $(1 + a^2) \cos y' = ax \mp \sqrt{1 + a^2 - x^2}$; quindi, portando questi risultati nell'equazione differenziale proposta, si giunge all'integrale generale

$$y + x \operatorname{arc\,tg} \frac{a \pm x\sqrt{1 + a^2 - x^2}}{1 - x^2} \pm \sqrt{1 + a^2 - x^2} = 0 \ .$$

e) In modo analogo si può integrare l'equazione $y = xy' + x^2 f(y')$, che si trasforma, per derivazione, in

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{xf'(y')}{2f(y')} + \frac{1}{2f(y')} = 0 \ ,$$

d'onde, posto $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, si ricava $x = -\,{}^1/_2\,\varphi(y')\,\varphi'(y')$. Eliminando y' fra questa relazione e l'equazione proposta si giunge all'integrale generale.

f) Per integrare $(a^2 - x^2)\,dy^2 + 2xy\,dx\,dy + (b^2 - y^2)\,dx^2 = 0$, se ne ricavi il valore di y, e si noti che l'equazione così ottenuta

$$y = xy' \pm \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}$$

è (§ 5, *g*) un'equazione di Clairaut. Dunque l'equazione proposta ammette l'integrale generale $y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 + b^2}$, ossia $c^2(a^2 - x^2) + 2cxy + (b^2 - y^2) = 0$, e l'integrale singolare $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

g) Dell'equazione $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2y' = 0$ si scorge subito l'integrale particolare $y = \frac{1}{x}$, e però basta porre $u = \frac{1}{x}$, $\varphi = -\frac{1}{2}$, $\chi = 0$ nella formola (1) per trovare l'integrale generale

$$\frac{1}{1 - xy} + {}^1/_2 \log x = costante \ .$$

www.rcin.org.pl

Un po' più generalmente, cercando di soddisfare all'equazione $y^2+\frac{1}{x^2}+2ky'=0$ con $y=\frac{m}{x}$, si trova che m deve annullare $m^2-2km+1$, e si ottengono così, per $k^2 \gtrless 1$, due integrali particolari

$$u=\frac{k+\sqrt{k^2-1}}{x}\ ,\quad v=\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{x}\ ;$$

poi la (2) ci dà l'integrale generale

$$xy=k+\sqrt{k^2-1}\,\frac{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}}-a}{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}}+a}\ ,$$

che converrà porre, per $k^2<1$, sotto la seguente forma:

$$xy=k-\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{tg}\left(a+\frac{\sqrt{1-k^2}}{2k}\log x\right).$$

Ai medesimi risultati si giunge (*cfr.* IX, 14, *h*) mediante la sostituzione $xy=z$, che permette di separare le variabili:

$$\frac{dx}{x}+\frac{2k\,dz}{z^2-2kz+1}=0\ ;\ ecc.$$

h) Consideriamo più generalmente un'equazione di Riccati, già ridotta (§ 5, *i*) alla forma $y'+ay^2=f(x)$, e segnaliamo infiniti casi nei quali l'equazione si lascia integrare con un numero finito di segni algebrici e logaritmici. Questi casi si riferiscono tutti all'ipotesi di $f(x)$ proporzionale ad una potenza di x: sia $f(x)=bx^n$. Se si pone $y=uz+v$, l'equazione diventa

$$uz'+(v'+av^2)+(u'+2auv)z+au^2z^2=bx^n\ ,$$

e si riduce semplicemente a $z'+auz^2=b\frac{x^n}{u}$ se per u e v si prendono due funzioni tali, che le condizioni $v'+av^2=0$, $u'+2auv=0$ siano soddisfatte. A ciò si riesce prendendo $v=\frac{1}{ax}$, poi $u=\frac{1}{x^2}$; e così l'equazione si trasforma in

$$z'+a\frac{z^2}{x^2}=bx^{n+2}\ ,$$

e si riduce alla primitiva forma ponendo $z=\frac{1}{y_1}$, $x=x_1^{\nu}$. Si ottiene infatti

$$\frac{dy_1}{dx_1}+\nu b y_1^2 x_1^{(n+3)\nu-1}=\nu a x_1^{-(\nu+1)}\ ,$$

e basta prendere $\nu=\frac{1}{n+3}$ perchè l'equazione si riduca effettivamente alla forma primitiva, cioè diventi

$$\frac{dy_1}{dx_1}+a_1y_1^2=b_1x_1^{n_1}\ ,$$

dove $a_1=\frac{b}{n+3}$, $b_1=\frac{a}{n+3}$, $n_1=-\frac{n+4}{n+3}$. Ora immaginiamo che la sostitu-

www.rcin.org.pl

zione già adoperata si applichi più volte di seguito. Si costruirà in tal modo una successione di equazioni di Riccati, nelle quali all'esponente n succedono n_1, $n_2, n_3, \ldots$, legati dalla relazione

$$n_{i+1} = -\frac{n_i + 4}{n_i + 3},$$

essendo $n_0 = n$. Se si aggiunge 2 ai due membri si ottiene

$$n_{i+1} + 2 = \frac{n_i + 2}{(n_i + 2) + 1} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{n_{i+1} + 2} = 1 + \frac{1}{n_i + 2}.$$

Dunque, cambiando i in $i-1, i-2, \ldots, 2, 1, 0$, e sommando,

$$\frac{1}{n_i + 2} = i + \frac{1}{n + 2}.$$

Siccome le variabili si separano immediatamente, nell'equazione proposta, quando $n = 0$, si può asserire che *l'equazione è integrabile tutte le volte che nella successione* $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *esiste un esponente nullo.* Essa è dunque integrabile quando si ha

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2n+4} = \textit{intero}.$$

Veramente occorre che $\frac{n}{2n+4}$ sia intero e positivo; ma al caso dell'intero negativo si provvede facendo direttamente nell'equazione data la sostituzione $y = \frac{1}{y_1}$, $x = x_1^{\frac{1}{n+1}}$. Infatti l'equazione diventa $\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{n_1}$, essendo $a_1 = \frac{b}{n+1}$, $b_1 = \frac{a}{n+1}$, $n_1 = -\frac{n}{n+1}$, dimodochè si ha

$$\frac{n_1}{2n_1 + 4} = -\frac{n}{2n+4}.$$

Finalmente, se l'*intero* non è finito, occorrerebbero infinite trasformazioni; ma questo caso, corrispondente all'ipotesi $n = -2$, è stato già trattato per altra via. Dunque, riassumendo, l'equazione $y' + ay^2 = bx^n$ è integrabile per

$$-\frac{n}{4} = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, 1.$$

i) L'equazione del *secondo* ordine $y'' = f(x)$ si può sempre (§ 5, *d*) trattare come un'equazione del *primo* ordine, considerando y' come funzione incognita: $y' = \int f(x)dx$, con una costante arbitraria a inclusa nell'integrale. Poi si ha $y = \int y'dx = xy' - \int xdy'$, cioè

$$y = x\int f(x)dx - \int xf(x)dx,$$

con un'altra costante arbitraria b, dovuta al secondo integrale, sicchè la parte arbitraria di y ha la forma $ax + b$, come si poteva prevedere. Anche l'equazione $y'' = f(y)$ si riduce subito al primo ordine (§ 5, *d*) scrivendo $y'dy'$ per $y''dy$, dimodochè si ha, successivamente,

$$\tfrac{1}{2}y'^2 = \int f(y)dy, \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy}},$$

con due costanti arbitrarie, introdotte dalle successive integrazioni.

www.rcin.org.pl

j) Per integrare $y''\cos y + y'^2 \operatorname{sen} y = y'$ si moltiplichi tutto per dy, e si ponga $y'dy'$ al posto di $y''dy$. Così, dopo avere sbarazzata l'equazione dall'integrale ovvio $y = costante$, si ottiene l'equazione del primo ordine

$$\frac{dy'}{dy}\cos y + y' \operatorname{sen} y = 1 ,$$

che ammette, come si è visto, l'integrale generale $y' = \operatorname{sen} y + \operatorname{tg}\alpha \cos y$; quindi

$$x = \int \frac{dy}{\operatorname{sen} y + \operatorname{tg}\alpha \cos y} = \int \frac{\cos\alpha\, dy}{\operatorname{sen}(y+\alpha)} = a + \cos\alpha \log \operatorname{tg} \frac{y+\alpha}{2} ,$$

con a ed α costanti arbitrarie.

k) Similmente, data l'equazione $y''(1+yy') = y'(1+y'^2)$, si può subito porla sotto la forma

$$\frac{dy}{dy'} = \frac{1+yy'}{1+y'^2} ,$$

ed integrarla (§ 5, *e*) trattando y' come variabile indipendente. Si può anche cominciare dal porre l'equazione sotto la forma

$$(1+y'^2)(dy - dy') = (1+yy')dy' - (1+y'^2)dy' = (y-y')y'dy' ,$$

per dedurne, successivamente,

$$\frac{d(y-y')}{y-y'} = \frac{y'dy'}{1+y'^2} , \quad y = y' + k\sqrt{1+y'^2} ;$$

poi

$$x = \int \frac{y + k\sqrt{y^2+1-k^2}}{y^2-k^2}\, dy ,$$

e finalmente

$$x = a + k \log\left(y + \sqrt{y^2+1-k^2}\right) + \log\left(y - k\sqrt{y^2+1-k^2}\right) ,$$

con a e k costanti arbitrarie. In particolare per $k = 1$, se prima si prende $a = -\log(1-k^2)$, si scopre l'integrale semplicissimo $y = \sqrt{1+e^x}$.

l) L'equazione $yy'y'' = y'^3 + y''^2$, quando vi si considera y come variabile indipendente, si riduce ad un'equazione di Clairaut

$$y' = y\frac{dy'}{dy} - \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2 ,$$

e però il suo integrale generale si ottiene integrando $y' = ay - a^2$, ed è, per conseguenza, $y = a + be^{ax}$, con a e b costanti arbitrarie; ma l'integrale singolare $4y' = y^2$ ci rivela l'esistenza di infiniti altri integrali $(a-x)y = 4$, non contenuti nell'integrale generale.

m) Finalmente, per vedere come l'uso delle equazioni differenziali possa condurre alla scoperta di notevoli proprietà delle funzioni, si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}} = 0 , \tag{3}$$

che ammette, evidentemente, l'integrale generale

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = costante , \tag{4}$$

www.rcin.org.pl

e si cerchi di pervenire per altra via alla conoscenza di tale integrale. Rispetto alla variabile indipendente $x = \mathrm{F}(k, \varphi)$, è chiaro che le funzioni $u = \operatorname{sen}\varphi$ e $v = \operatorname{sen}\psi$ hanno le derivate

$$u' = \cos\varphi\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \quad , \quad v' = -\cos\psi\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\psi} \ ,$$

e però soddisfano entrambe alle seguenti relazioni:

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2) \quad , \quad y'' = -(1 + k^2)y + 2k^2 y^3 \ .$$

Ne segue

$$v^2 u'^2 - u^2 v'^2 = -(u^2 - v^2)(1 - k^2 u^2 v^2) \quad , \quad vu'' - uv'' = 2k^2 uv(u^2 - v^2) \ ;$$

quindi, successivamente,

$$\frac{vu'' - uv''}{vu' - uv'} = -\frac{2k^2 uv(uv)'}{1 - k^2(uv)^2} \quad , \quad \frac{vu' - uv'}{1 - k^2 u^2 v^2} = \textit{costante}.$$

L'ultima relazione, quando ad u, v, u', v' si sostituiscono le loro espressioni in φ e ψ, diventa

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\psi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\psi} + \operatorname{sen}\psi\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi} = \textit{costante}. \qquad (5)$$

Questa non è se non un'altra forma dell'integrale generale dell'equazione (3), e però, se si rappresenta con $\operatorname{sen}\sigma$ la funzione di φ e ψ, che comparisce nel primo membro di (5), l'osservazione fatta in fine del § 2 permette di asserire che il primo membro di (4) deve potersi mettere sotto la forma $f(\sigma)$. Or poichè, per $\psi = 0$, σ si riduce, in virtù di (5), a φ, è $\mathrm{F}(k, \varphi) = f(\varphi)$. Dunque, *se si ha*

$$\mathrm{F}(k, \varphi) + \mathrm{F}(k, \psi) = \mathrm{F}(k, \sigma) \ ,$$

σ è vincolato a φ e ψ dalla relazione

$$(1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi)\operatorname{sen}\sigma = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\psi} + \operatorname{sen}\psi\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi} \ .$$

Questo è l'importante *teorema di addizione* degli integrali ellittici di prima specie *), scoperto da Eulero. È utile notare che l'ultima relazione si può anche porre sotto le seguenti forme:

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\sigma} \ ,$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\psi} + \operatorname{tg}\psi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\sqrt{(1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi)(1 - k^2\operatorname{sen}^2\psi)}} \ .$$

In particolare per $k = 0$ si ritrovano le formole di trigonometria, che danno i valori di $\operatorname{sen}(\varphi + \psi), \cos(\varphi + \psi), \operatorname{tg}(\varphi + \psi)$. Ancora si noti che, per $\sigma = {}^1/_2\pi$, ponendo $\varphi = \psi$, si riesce a determinare l'amplitudine φ, per la quale $\mathrm{F}(k, \varphi)$ diventa uguale ad ${}^1/_2\mathrm{F}(k)$: essa è $\varphi = \operatorname{arc\,cot}\sqrt[4]{1 - k^2}$. Ciò permette di risolvere una questione posta precedentemente (XI, 12, *d*).

---

*) Per le altre specie vedi Schloemilch, *loc. cit.*, p. 59.

www.rcin.org.pl

Applicazioni geometriche.

7. **Curve piane**: *a)* Quando si vuol conoscere la curva, per la quale il segmento staccato dalla tangente sopra un asse, a partire da un punto fisso, sia una funzione prescritta dell'angolo che la tangente stessa fa con l'asse, si ottiene un'equazione di Clairaut, e *la curva cercata è data dall'integrale singolare*, mentre l'integrale generale rappresenta l'insieme delle tangenti. Così, per esempio, se si vuole che il segmento staccato sull'asse delle x, a partire dall'origine, sia proporzionale ad y', come si è condotti a supporre quando si cerca l'antipedale (VI, 45, *h*) d'una retta rispetto ad un punto, si deve integrare $y = xy' - ay'^2$. Ne segue, derivando, che, o dev'essere $y'' = 0$, e successivamente $y' = k$, $y = kx - k^2a$, equazione d'una famiglia di rette, tangenti alla parabola $x^2 = 4ay$; o si deve avere $x = 2ay'$, e conseguentemente $x^2 = 4ay$. Similmente, se si domanda per quale curva i segmenti staccati dagli assi sulle tangenti sono di ugual lunghezza, si è condotti ad integrare l'equazione

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

ed anzi basterà (§ 4) determinarne l'integrale singolare: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. L'eliminazione mediante la quale si giunge al risultato non differisce, in fondo, da quella che si dovrebbe fare (VI, 45, *b*) guardando il problema dal punto di vista della teoria degli inviluppi.

b) Analogamente si procede se invece della tangente si considera la normale, nel qual caso l'equazione da integrare ha la forma $x + yy' = f(y')$, e si può subito risolvere (*cfr.* § 5, *h*) rispetto ad y. Del resto si può anche cominciare dal derivare l'equazione, per eliminare poi y fra l'equazione che in tal modo si ottiene, cioè $1 + y'^2 + yy'' = f'(y')y''$, e l'equazione proposta. Si giunge così all'equazione lineare

$$y'\frac{dx}{dy'} = \frac{x}{1+y'^2} + \frac{y'f'(y') - f(y')}{1+y'^2},$$

che si sa integrare. Se $F(x, y', a) = 0$ è l'integrale generale, basterà poi fra questo e l'equazione proposta eliminare y' per trovare l'integrale generale cercato. Se, per esempio, si vuole una curva tale che i segmenti staccati dagli assi sulle normali abbiano tutti la lunghezza a, si è condotti ad integrare

$$x + yy' = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

e si trova che l'integrale generale risulta dall'eliminazione di y' fra

$$x = \frac{ay'}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1 - k + \frac{1}{1+y'^2}\right), \quad y = \frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1 + k - \frac{1}{1+y'^2}\right).$$

Del resto basta conoscere una curva sola che risponda alla questione, per conoscerle tutte; e però possiamo limitarci a fare, per esempio, $k = {}^1/_2$. In questa ipo-

www.rcin.org.pl

tesi le precedenti uguaglianze diventano

$$x=\frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{(1+y')^3-(1-y')^3\right\}\ ,\quad y=\frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{(1+y')^3+(1-y')^3\right\},$$

e se ne deduce, per eliminazione di y', $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$. Dunque le curve cercate sono *parallele ad un'asteroide*, che ha i vertici sugli assi; e per conseguenza (VI, 45, *f*) esse sono, come si poteva prevedere, le infinite *sviluppanti dell'asteroide* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

c) Quando si cerca una curva tale, che il segmento intercetto da un asse sulla normale, a partire dal punto d'incidenza, sia una determinata funzione del segmento intercetto sul detto asse dalla normale, a partire da un punto fisso, si è condotti ad integrare un'equazione della forma $y\sqrt{1+y'^2}=f(x+yy')$. Derivando si ottiene un'equazione che si scinde in

$$1+y'^2+yy''=0\ ,\quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=f'(x+yy')\ . \tag{6}$$

Se fra l'ultima e l'equazione proposta si elimina y', si ottiene l'integrale singolare, che rappresenta la curva cercata. Invece integrando la prima delle (6) si ha $x+yy'=a$, e finalmente, portando il valore di y' nell'equazione proposta, $(x-a)^2+y^2=f^2(a)$, equazione d'una famiglia di circoli, tangenti alla curva già ottenuta.

d) Se si vuole la curva, per la quale il raggio di curvatura in ciascun punto si esprime mediante una data funzione dell'ascissa del punto stesso, bisogna integrare l'equazione $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=y''f(x)$. Qui le variabili si separano subito, e si ha $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\int\frac{dx}{f(x)}$; *ecc.* Per esempio, se $f(x)=\frac{a^2}{2x}$, si ottiene *la curva elastica*, rappresentata dall'equazione $y=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$. Essa è il profilo d'una lama elastica, mantenuta ad un'estremità, e piegata per effetto d'una forza applicata all'altra estremità.

e) Cercare una curva piana, il cui raggio di curvatura sia uguale al segmento staccato sulla normale da una retta fissa, a partire dal punto d'incidenza. L'equazione che si ottiene è

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm y\sqrt{1+y'^2}\ ,\quad \text{cioè}\quad 1+y'^2=\pm yy''\ .$$

Se si prende il segno —, l'equazione precedente è la stessa di quella ottenuta poco innanzi, e però i circoli stanno fra le curve cercate. Invece col segno + si ottiene $1+y'^2=yy''$, o, moltiplicando per dy, e scrivendo $y'dy'$ al posto di $y''dy$,

$$\frac{dy}{y}=\frac{y'dy'}{1+y'^2}\ ,\quad y=a\sqrt{1+y'^2}\ ,\quad x=\int\frac{ady}{\sqrt{y^2-a^2}}\ ;$$

www.rcin.org.pl

poi, fissando l'origine in modo che per $x=0$ si abbia $y=a$,

$$x=a\log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\ ,\quad \text{cioè}\quad y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

equazione d'una *catenaria.*

f) Più generalmente, l'equazione differenziale delle *linee di Ribaucour* (VI, 15, k) è

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=ky\sqrt{1+y'^2}\ ,\quad \text{cioè}\quad 1+y'^2=kyy''\ ,$$

e se ne tenta l'integrazione ponendo $y'dy'$ per $y''dy$. Così l'equazione diventa

$$\frac{dy}{y}=k\frac{y'dy'}{1+y'^2}\ ,\ \text{e dà}\quad y=a(1+y'^2)^{\frac{1}{2}k}\ ,\ \text{cioè}\quad y'=\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}}-1}\ .$$

Ne segue

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}}-1}}\ .$$

Questa è l'equazione generale di tutte le linee di Ribaucour. Essa non si può (X, 10) porre sotto forma esplicita finita, con segni algebrici e logaritmici, se non quando è intero uno dei numeri $^1/_2 k$, $^1/_2(k-1)$, cioè *quando* k *è un numero intero.* Si ritrovano così la *circonferenza* e la *catenaria* per $k=-1$ e $k=1$; poi la *cicloide* per $k=-2$, la *parabola* per $k=2$; *ecc.*

g) Più generalmente ancora, la ricerca delle curve, per le quali il raggio di curvatura è una data funzione del segmento di normale, compreso fra il punto di incidenza ed una retta fissa, è sempre riducibile a due quadrature successive. Sia infatti $t=y\sqrt{1+y'^2}$ la lunghezza del segmento di normale, e si scriva la curvatura nel seguente modo:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}dy}=-\frac{d}{dy}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=-\frac{d}{dy}\frac{y}{t}=-\frac{1}{t}+\frac{y}{t^2}\frac{dt}{dy}\ .$$

L'equazione $\rho=f(t)$ si trasforma subito in

$$\frac{dy}{y}=\frac{dt}{t}-\frac{dt}{t+f(t)}\ ,\quad \text{e dà}\quad y=te^{-\int\frac{dt}{t+f(t)}}=\varphi(t)\ ;$$

poi

$$y'=\frac{\sqrt{t^2-\varphi^2(t)}}{\varphi(t)}\ ,\quad x=\int\frac{\varphi(t)\varphi'(t)dt}{\sqrt{t^2-\varphi^2(t)}}\ ;\quad ecc.$$

Questo problema si presenta tutte le volte che si tratta di determinare le superficie di rotazione, caratterizzate da una data relazione fra i raggi principali di curvatura.

8. **Trajettorie.** Il problema delle trajettorie consiste nella ricerca delle curve, che incontrano sotto un angolo costante ω tutte le linee d'una data famiglia

www.rcin.org.pl

$\varphi(x, y, a) = 0$. Ciò si esprime scrivendo che, qualunque sia il valore del parametro a, si deve avere

$$y' = \frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{tg}\omega}{\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{tg}\omega},$$

cioè

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{sen}\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\omega} = \frac{dy}{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{sen}\omega}.$$

Se in questa relazione si sostituisce il valore di a, ricavato da $\varphi = 0$, si ottiene un'equazione differenziale del primo ordine, la cui integrazione conduce all'equazione $\psi(x, y, b) = 0$ di un'altra famiglia di curve, le quali godono della proprietà richiesta. In particolare la ricerca delle *trajettorie ortogonali* delle curve $\varphi = 0$ si fa integrando l'equazione differenziale che risulta dall'eliminazione di a tra $\varphi = 0$ e $dx : \frac{\partial\varphi}{dx} = dy : \frac{\partial\varphi}{dy}$. È utile sapere che, se le due famiglie sono tali che per ogni punto del piano passano, in generale, due curve (e due sole) appartenenti alle due famiglie, queste possono servire di fondamento ad un sistema di *coordinate curvilinee*, poichè ciascun punto è individuato dalla coppia di valori a e b, caratterizzanti rispettivamente in $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ le due particolari curve che lo contengono. Un tal sistema di coordinate si dice *ortogonale* quando $\omega = {}^1/_2\pi$. Così, per esempio, le ordinarie *coordinate cartesiane* hanno per fondamento due sistemi di rette parallele, mentre le *coordinate polari* sono fondate sopra un fascio di rette e la famiglia dei circoli concentrici, ortogonali alle rette del fascio; *ecc.* Ora risolviamo il problema delle trajettorie in alcuni casi particolari:

a) Per trovare le trajettorie ortogonali dei circoli di raggio a, che hanno i centri sopra una retta (che conviene assumere come asse delle ascisse), si deve eliminare b fra le equazioni

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2 \quad , \quad \frac{dx}{x - b} = \frac{dy}{y},$$

dimodochè, posto $y = a \operatorname{sen}\theta$, convenendo che per $\theta = {}^1/_2\pi$ sia $x = 0$, si ottiene

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = a \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} d\theta = a\left(\cos\theta + \log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),$$

vale a dire che le trajettorie (le quali sono evidentemente delle *trattrici*) si ottengono spostando parallelamente all'asse delle ascisse la curva rappresentata dalle equazioni $x = a\left(\cos\theta + \log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen}\theta$. Del resto è facile verificare che la sviluppata di questa curva è una catenaria. Per ω qualunque si troverebbero le altre *sviluppanti della catenaria.*

b) Il fascio di circoli $x^2 + y^2 - a^2 = 2\mu ay$ può essere rappresentato anche dalla sua equazione differenziale $2xydx = (x^2 - y^2 - a^2)\,dy$, che si stabilisce eliminando il parametro μ fra l'equazione precedente e quella che se ne trae per differenziazione. Il cambiamento di $\frac{dy}{dx}$ in $-\frac{dx}{dy}$ conduce all'equazione differenziale delle trajettorie ortogonali dei circoli del fascio; e poichè l'equazione che in tal

www.rcin.org.pl

modo si ottiene, ossia $2xydy=(y^2-x^2+a^2)dx$, non differisce da quella del fascio se non per lo scambio di x con y, ed il cambiamento di a^2 in $-a^2$, si vede subito, senza che occorra integrare, che le dette trajettorie costituiscono un altro fascio di circoli $x^2+y^2+a^2=2\lambda ax$. I due fasci servono di fondamento al sistema *) delle *coordinate dipolari* $u={}^1/_2\log\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, $v=\operatorname{arc\,cot}\mu$.

c) La determinazione delle trajettorie ortogonali di qualunque famiglia di circoli dipende da un'equazione di Riccati. Le coordinate ξ,η del centro d'un circolo ed il raggio a siano tre funzioni note dell'arco s della linea dei centri. Sia φ l'inclinazione della tangente a questa linea sull'asse delle ascisse, e θ l'angolo che la tangente ad una trajettoria, nel suo punto d'incontro (x,y) col detto circolo, fa con la normale alla linea dei centri. Si ha

$$x=\xi-a\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\quad,\quad y=\eta+a\cos(\theta+\varphi)\ ,$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varphi-\frac{da}{ds}\operatorname{sen}(\theta+\varphi)-a\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\rho}\right)\cos(\theta+\varphi)\ ,$$

$$\frac{dy}{ds}=\operatorname{sen}\varphi+\frac{da}{ds}\cos(\theta+\varphi)-a\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\ ;$$

quindi, poichè dev'essere $-dx:dy=\operatorname{tg}(\theta+\varphi)$, si vede che la funzione incognita θ soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\rho}=\frac{\cos\theta}{a}\ ,$$

in cui ρ, raggio di curvatura, è una funzione nota di s. Basta ora assumere come funzione incognita $t=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ per essere condotti ad un'equazione di Riccati:

$$\frac{dt}{ds}+{}^1/_2\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{a}\right)t^2+{}^1/_2\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{a}\right)=0\ .$$

Del resto la conoscenza dell'integrale generale non è indispensabile per la ricerca delle proprietà delle trajettorie, giacchè, tenendo conto dell'equazione differenziale solo in quanto permette di esprimere θ' mediante θ e funzioni note di s, le formole precedenti diventano

$$\frac{dx}{ds}=(\operatorname{sen}\theta-a')\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\quad,\quad\frac{dy}{ds}=-(\operatorname{sen}\theta-a')\cos(\theta+\varphi)\ .$$

Dunque il differenziale dell'arco d'una trajettoria ortogonale è $ds_1=(\operatorname{sen}\theta-a')ds$; e poichè l'angolo di contingenza è manifestamente $d\theta+\frac{ds}{\rho}$, si vede che il raggio di curvatura è dato dalla formola $\rho_1\cos\theta=a(\operatorname{sen}\theta-a')$. In particolare per $a'=0$ si ritrova, generalizzata, una proprietà della trattrice: *il centro di curvatura in ciascun punto d'una trajettoria ortogonale d'una famiglia di circoli uguali appartiene alla corrispondente normale della linea dei centri.* È facile poi vedere che, una volta determinata θ in funzione di s, l'equazione intrinseca delle

*) *Analisi algebrica*, p. 320.

www.rcin.org.pl

trajettorie risulterà dall'eliminazione di s fra le uguaglianze

$$s_1 = \int \operatorname{sen}\theta\, ds \quad , \quad \rho_1 = a \operatorname{tg}\theta .$$

d) Per trovare le trajettorie ortogonali delle coniche omofocali

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$$

si formi prima, per differenziazione ed eliminazione del parametro λ, l'equazione differenziale di questa famiglia di curve:

$$(ydx - xdy)(xdx + ydy) + (a^2 - b^2)dx\,dy = 0 .$$

Siccome il cambiamento di $\frac{dy}{dx}$ in $-\frac{dx}{dy}$ non altera l'equazione, se ne conclude che le trajettorie cercate sono le coniche stesse; e ciò si spiega osservando che, fissati x ed y, si ricavano dalla prima equazione *due* valori di λ: uno, compreso fra $-a^2$ e $-b^2$, corrisponde ad un' iperbole; l'altro, maggiore di $-b^2$, corrisponde ad un'ellisse. Passano dunque per ogni punto del piano, tagliandosi ad angolo retto, un'ellisse ed un' iperbole, che hanno i fuochi in due punti dati; ed i valori di λ, che le individuano nell'intera famiglia delle coniche dotate dei medesimi fuochi, sono le *coordinate ellittiche* del punto che si considera.

9. **Superficie:** *a)* Proponiamoci di determinare le *trajettorie ortogonali delle generatrici* rettilinee del paraboloide iperbolico $xy = az$, e consideriamo, per esempio, le generatrici del primo sistema, cioè quelle che son perpendicolari all'asse delle x. Le loro equazioni sono, se si vuole, $x = at, y = z:t$, dimodochè in un punto qualunque i coseni direttori d'una generatrice sono proporzionali a $0, 1, t$, mentre quelli della tangente alla curva incognita sono proporzionali a dx, dy, dz. Se nella condizione di ortogonalità $dy + tdz = 0$ si sostituisce $\frac{z}{y}$ a t, si ottiene $ydy + zdz = 0$, quindi $y^2 + z^2 = a^2$. Dunque le trajettorie ortogonali dei due sistemi di generatrici rettilinee si projettano sui corrispondenti piani direttori in circoli concentrici.

b) La determinazione delle trajettorie ortogonali delle generatrici di qualunque superficie rigata si può sempre fare con una sola quadratura. Supponiamo che la posizione d'un punto sulla superficie si definisca mediante le (VIII, 11) solite coordinate u e v, dimodochè sia $X = x + av, Y = y + bv, Z = z + cv$, dove x, y, z, a, b, c dipendono soltanto da u. Se si rappresentano con $x', y', \ldots, c'$ le derivate di queste funzioni, si ha

$$dX = (x' + a'v)du + adv \ , \ dY = (y' + b'v)du + bdv \ , \ dZ = (z' + c'v)du + cdv \ ,$$

e la condizione di ortogonalità $\Sigma a dX = 0$ diventa $(ax' + by' + cz')du + dv = 0$, da cui subito si ricava, integrando, $v = -\int (ax' + by' + cz')du$. Trovata una trajettoria $v = f(u)$, tutte le altre sono date da $v = f(u) + costante$, e però due trajettorie qualunque intercettano segmenti uguali su tutte le generatrici.

c) Nella rappresentazione di porzioni limitate della superficie terrestre si è condotti a considerare le *linee di livello*, ossia le intersezioni della superficie con piani orizzontali. L'equazione stessa d'una superficie $F(x, y, z) = 0$ rappresenta,

www.rcin.org.pl

per ciascun valore di z, una linea di livello, projettata sul piano Oxy, supposto orizzontale. L'eliminazione di z fra le equazioni $F=0$ e $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$ conduce ad un'equazione differenziale del primo ordine, che rappresenta appunto l'intero sistema delle linee di livello, ed anche, mediante il suo integrale singolare, l'inviluppo delle linee stesse, cioè (*cfr.* VIII, 3) il contorno dell'ombra della superficie sopra un piano orizzontale, per un fascio verticale di raggi luminosi. Se poi nell'equazione differenziale delle linee di livello si cambia y' in $-1:y'$, l'integrale generale della nuova equazione rappresenta le projezioni orizzontali delle *linee di massima pendenza*, trajettorie ortogonali delle linee di livello *).

d) Proponiamoci di trovare le *linee di curvatura* dell'elicoide a piano direttore (VIII, 31, *b*), cioè della superficie costituita dalle normali principali di un'elica circolare. Se r e θ sono le coordinate polari della projezione d'un punto qualunque della superficie sopra un piano perpendicolare all'asse del cilindro, si ha $z=a\theta$, dove $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, e per conseguenza

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ay}{x^2+y^2}=-\frac{a}{r}\operatorname{sen}\theta \quad , \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ax}{x^2+y^2}=\frac{a}{r}\cos\theta\,.$$

Ora la nota (VIII, 36) equazione differenziale delle linee di curvatura diventa

$$\frac{\frac{dr}{r}\cos\theta-\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\theta-\cos\theta\,d\theta}+\frac{\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\theta+\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\,d\theta}{\frac{dr}{r}\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\,d\theta}=0\,,$$

cioè $\frac{dr^2}{r^2}=\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)d\theta^2$, da cui subito si deduce

$$\pm\theta=\int\frac{dr}{\sqrt{r^2+a^2}}=\log\frac{r+\sqrt{r^2+a^2}}{a}\pm\theta_0\,,$$

e finalmente

$$r={}^1/_2\,a\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)}-e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Queste curve, projezioni delle linee di curvatura sul piano direttore, si ottengono facendo girare intorno al polo la spirale $r={}^1/_2\,a(e^{\theta}-e^{-\theta})$.

e) La ricerca delle *assintotiche* è fondata (VIII, 41) sull'integrazione dell'equazione differenziale $rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2=0$. Nel caso dell'elicoide a piano direttore si trova che r, s, t sono proporzionali a $-2xy, x^2-y^2, 2xy$, e però l'equazione da integrare è $-xydx^2+(x^2-y^2)dxdy+xydy^2=0$, vale a dire $(ydx-xdy)(xdx+ydy)=0$. Essa si scinde nelle due

$$ydx-xdy=0 \quad , \quad xdx+ydy=0\,,$$

la prima delle quali fornisce le generatrici ($y=kx$), mentre l'altra dà $x^2+y^2=a^2$. Le assintotiche dei due sistemi sono dunque ortogonali, e però, come già si sapeva, la superficie è di area minima.

---

*) Per una minuta discussione di queste e di altre notevoli linee vedi il « *Calcul différentiel* » di Boussinesq, pp. 229*-243*.

www.rcin.org.pl

f) All'equazione differenziale delle assintotiche giova dare un'altra forma che riesce più comoda quando le coordinate dei punti della superficie sono date in funzione di due variabili indipendenti, u e v. Siccome si ha

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=-pd^2x-qd^2y+d^2z\ ,$$

e d'altra parte

$$p=\frac{\partial(z,y)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}:\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ ,\quad q=\frac{\partial(x,z)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}:\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ ,$$

la detta equazione si può mettere sotto la forma

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}d^2x+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}d^2y+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}d^2z=0\ ;$$

quindi, se si osserva che

$$d^2x=\frac{\partial^2x}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2x}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2x}{\partial v^2}dv^2\ ,\ ecc.\ ,$$

si ottiene

$$\mathfrak{A}du^2+2\mathfrak{B}dudv+\mathfrak{C}dv^2=0\ , \tag{7}$$

dove

$$\mathfrak{A}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\end{vmatrix}\ ,\quad \mathfrak{B}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\end{vmatrix}\ ,\quad \mathfrak{C}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{vmatrix}\ .$$

Così, per esempio, nel caso delle superficie rigate (VIII, 11), ad x,y,z bisogna sostituire $X=x+av, Y=y+bv, Z=z+cv$, e si trova

$$\mathfrak{B}=\begin{vmatrix}a & a' & x'\\ b & b' & y'\\ c & c' & z'\end{vmatrix}\ ,\quad \mathfrak{C}=0\ ,$$

mentre $\mathfrak{A}$ è una funzione quadratica di v, i cui coefficienti dipendono, in generale, da u. Se la superficie è sviluppabile (VIII, 9) si ha $\mathfrak{B}=0$, e l'equazione (7) si riduce a $du^2=0$, vale a dire che i due sistemi di assintotiche si confondono nell'unico costituito dalle generatrici ($u=$ *costante*). Se la superficie non è sviluppabile, $\mathfrak{B}$ non è nullo, e la (7) si scinde in due equazioni, cioè $du=0$, a cui soddisfano le generatrici, e

$$\frac{dv}{du}=v^2\varphi(u)+v\chi(u)+\psi(u)\ . \tag{8}$$

Dunque (§ 5, *i*) *la determinazione delle curve assintotiche d'una rigata gobba dipende da un'equazione di Riccati.* Ne segue che *quattro assintotiche qualunque incontrano le generatrici in una quaterna di punti, il cui rapporto anarmonico ha un valore unico per tutte le generatrici.* Inoltre la conoscenza di un'assintotica permette di determinare tutte le altre mediante due quadrature.

www.rcin.org.pl

In particolare ciò accade per tutte le rigate *a piano direttore*, perchè l'annullamento identico di

$$2\mathfrak{B}\varphi(u) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

riduce la (8) ad un'equazione lineare, la cui integrazione (§ 5, *e*) richiede appunto due sole quadrature; e d'altra parte il detto annullamento è (IV, 9) necessario e sufficiente per l'esistenza di tre *costanti* l, m, n, tali che sia $la + mb + nc = 0$ indipendentemente da u, vale a dire perchè le generatrici sian tutte parallele ad un piano fisso.

g) Riprendiamo l'elicoide a piano direttore, e proponiamoci di determinarne le *geodetiche*. La ricerca di queste curve è fondata sulla relazione che esprime la perpendicolarità della binormale della curva incognita, in ciascun punto, e della normale alla superficie. Siccome i coseni direttori della binormale sono proporzionali a $dyd^2z - dzd^2y$, $dzd^2x - dxd^2z$, $dxd^2y - dyd^2x$, mentre quelli della normale alla superficie sono proporzionali ad $ay, -ax, x^2 + y^2$, si deve avere

$$ay(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - ax(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (x^2 + y^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0\ ,$$

ovvero

$$a(xdx + ydy)d^2z - a(xd^2x + yd^2y)\,dz + (x^2 + y^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0\ . \quad (9)$$

Intanto da $x^2 + y^2 = r^2$ si deduce

$$xdx + ydy = rdr \quad , \quad xd^2x + yd^2y = rd^2r - r^2d\theta^2\ ,$$

ed è noto (V, 11, *c*) che

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = (r^2d\theta^2 + 2dr^2 - rd^2r)\,d\theta\ ;$$

quindi la (9) si trasforma in

$$r'' = \frac{2rr'^2}{r^2 + a^2} + r\ ,$$

mettendo da parte l'integrale $\theta = costante$, che definisce le generatrici rettilinee. Al primo membro si può (§ 5, *d*) dar la forma $r'\dfrac{dr'}{dr}$; quindi è naturale assumere come funzione incognita $u = r'^2$. Così l'equazione diventa

$$\frac{du}{dr} = \frac{4ru}{r^2 + a^2} + 2r\ ,$$

ed è noto (§ 5, *e*) che questa si può integrare prendendo

$$u = ve^{\int \frac{4rdr}{r^2 + a^2}} = (r^2 + a^2)^2 v\ ,$$

dove la nuova funzione incognita v deve soddisfare all'equazione

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2r}{(r^2 + a^2)^2}\ .$$

Ne segue

$$v = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2 + a^2} \quad , \quad u = \frac{1}{b^2}(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - b^2)\ ,$$

www.rcin.org.pl

con b costante arbitraria. Finalmente

$$\pm(\theta-\theta_0)=\int\frac{bdr}{\sqrt{(r^2+a^2)(r^2+a^2-b^2)}}\,.$$

Il secondo membro, integrale ellittico, non è calcolabile, generalmente, con segni algebrici e logaritmici, in numero finito; ma per $b=a$ si ha

$$\pm(\theta-\theta_0)=\int\frac{adr}{r\sqrt{r^2+a^2}}=\log\frac{\sqrt{r^2+a^2}-a}{r}\,,$$

e finalmente

$$r=\frac{2a}{e^{\mp(\theta-\theta_0)}-e^{\pm(\theta-\theta_0)}}\,.$$

Equazioni lineari.

10. Continuando a parlare delle equazioni fra due variabili, fermiamoci a considerare specialmente quelle che contengono linearmente la funzione incognita e le sue derivate, cioè le equazioni della forma

$$y^{(n)}+y^{(n-1)}f_1(x)+y^{(n-2)}f_2(x)+\cdots+y'f_{n-1}(x)+yf_n(x)=f(x)\,, \quad (10)$$

le quali diconsi *lineari*. Quando $f(x)$ è 0, l'equazione si dice *incompleta*:

$$y^{(n)}+y^{(n-1)}f_1(x)+y^{(n-2)}f_2(x)+\cdots+y'f_{n-1}(x)+yf_n(x)=0\,. \quad (11)$$

Questa gode evidentemente della proprietà che ogni suo integrale, cioè *ogni* y *soddisfacente all'equazione non cessa di soddisfare quando viene moltiplicato per una costante, o sommato con altra funzione analoga.* Ciò premesso è facile dimostrare che, *se* $y_1, y_2, \ldots$, *sono* n *integrali particolari,* linearmente indipendenti, *d'una equazione lineare, incompleta, di* n^{esimo} *ordine, l'integrale generale è*

$$y=a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+\cdots+a_ny_n\,, \quad (12)$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti arbitrarie. Infatti, limitandoci, per maggior chiarezza, al caso particolare $n=3$, supponiamo che u, v, w siano tre funzioni, *linearmente indipendenti*, soddisfacenti all'equazione

$$y'''+y''\varphi(x)+y'\psi(x)+y\chi(x)=0\,, \quad (13)$$

dimodochè si abbia identicamente

$$u'''+u''\varphi+u'\psi+u\chi=0\,,\ v'''+v''\varphi+v'\psi+v\chi=0\,,\ w'''+w''\varphi+w'\psi+w\chi=0\,.$$

Per la coesistenza di queste quattro relazioni è necessario che ogni funzione y, soddisfacente alla (13), sia legata ad u, v, w dalla relazione

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix}=0\,,$$

www.rcin.org.pl

e ciò richiede (IV, 9) che le quattro funzioni siano linearmente vincolate. In questa relazione fra y, u, v, w non può mancare y, altrimenti sarebbero legate linearmente u, v, w, contrariamente all'ipotesi. Dunque

$$y = au + bv + cw \ ,$$

con a, b, c *costanti* non solo, ma costanti *arbitrarie*, perchè l'osservazione fatta in principio permette di asserire che la funzione $y = au + bv + cw$ soddisfa effettivamente alla (13), qualunque siano a, b, c.

11. Quando è noto l'integrale generale dell'equazione (11), quello dell'equazione *completa* (10) si può ottenere con n quadrature, seguendo il metodo detto da Lagrangia *variazione delle costanti arbitrarie*, tentando cioè di soddisfare alla (10) con la stessa forma (12), in cui si suppone che le a siano funzioni di x, da determinare convenientemente. Sia data, per esempio, l'equazione

$$y''' + y''\varphi(x) + y'\psi(x) + y\chi(x) = f(x) \ , \tag{14}$$

e si conoscano tre integrali particolari u, v, w, linearmente indipendenti, della corrispondente equazione incompleta (13). Cerchiamo di soddisfare alla (14) prendendo $y = au + bv + cw$, dove a, b, c sono *tre* funzioni incognite di x, alle quali possiamo sempre imporre *due* condizioni:

$$a'u + b'v + c'w = 0 \quad , \quad a'u' + b'v' + c'w' = 0 \ .$$

Ora, sostituendo in (14) le espressioni di y e delle sue derivate

$$y' = au' + bv' + cw' \quad , \quad y'' = au'' + bv'' + cw'' \ ,$$

$$y''' = au''' + bv''' + cw''' + a'u'' + b'v'' + c'w'' \ ,$$

si trova, come terza condizione, $a'u'' + b'v'' + c'w'' = f(x)$, sicchè a', b', c' si possono dedurre dal sistema

$$a'u + b'v + c'w = 0 \quad , \quad a'u' + b'v' + c'w' = 0 \quad , \quad a'u'' + b'v'' + c'w'' = f(x) \ .$$

Questo ammette una soluzione ben determinata, perchè, essendo u, v, w linearmente indipendenti, per ipotesi, il determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}$$

è diverso da zero. Trovate così le funzioni a', b', c', si ottengono poi, con semplici quadrature, le espressioni di a, b, c, e conseguentemente l'integrale generale y con *tre* costanti arbitrarie. Nel caso generale, immaginando che nella (12) si sostituisca ad ogni a una conveniente funzione di x, aumentata d'una costante arbitraria, si vede che *la forma dell'integrale ge-*

www.rcin.org.pl

nerale dell'equazione (10) *è*

$$y = y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + + a_n y_n \,. \tag{15}$$

Talvolta accade che sia già noto un integrale particolare y_0 dell'equazione *completa*, ad allora basta conoscere n integrali particolari (linearmente indipendenti) $y_1, y_2, \ldots$ della corrispondente equazione *incompleta*, per potere immediatamente scrivere l'integrale generale (15), senza che vi sia bisogno di ricorrere al metodo di Lagrangia. Infatti, posto $y = y_0 + z$ in (10), si vede subito che z deve soddisfare alla (11).

12. **Teorema.** *L'integrazione di un' equazione lineare dell' ordine* n, *quando si conoscono* m *integrali particolari, linearmente indipendenti, della corrispondente equazione incompleta, si può sempre ridurre all'integrazione di un'equazione lineare dell'ordine* n — m, *seguìta da* m *quadrature.*

Siano infatti $y_1, y_2, \ldots$ gli m integrali noti dell'equazione (11), e sia

$$\alpha = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \ldots y_1^{(m-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' \ldots y_2^{(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_m & y_m' & y_m'' \ldots y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

il loro wronskiano. Si cerchi, come nel precedente paragrafo, di soddisfare alla (10) prendendo $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_m y_m$, ed imponendo alle funzioni $a_1, a_2, \ldots$ la condizione che le loro derivate siano proporzionali ai complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna di α, diguisachè si abbia, chiamando z il coefficiente di proporzionalità,

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i' y_i = 0 \,, \quad \sum_{i=1}^{i=m} a_i' y_i^{(\nu)} = 0 \quad (\text{per } \nu = 1, 2, \ldots, m-2) \,, \quad \sum_{i=1}^{i=m} a_i' y_i^{(m-1)} = \alpha z \,.$$

È facile vedere che le derivate di $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_m y_m$ sono date dalle formole

$$y^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i y_i^{(\nu)} \quad (\text{per } \nu < m) \quad , \quad y^{(m)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i y_i^{(m)} + \alpha z \,,$$

$$y^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i y_i^{(\nu)} + \alpha z^{(\nu-m)} + \alpha_{1,\nu} z^{(\nu-m-1)} + \cdots + \alpha_{\nu-m,\nu} z \quad (\text{per } \nu > m) \,.$$

La loro sostituzione in (10) conduce ad un'equazione della forma

$$\alpha z^{(n-m)} + \alpha_1 z^{(n-m-1)} + \cdots + \alpha_{n-m} z = f(x) \,.$$

Conosciuto l' integrale generale di questa equazione lineare dell' ordine $n - m$, sono anche note le m funzioni a', dalle quali si può risalire alle a mediante m quadrature. La dimostrazione precedente non è che la naturale estensione di quella che ci ha condotti al risultato del § 11, corrispon-

www.rcin.org.pl

dente all'ipotesi $m=n$. Per $m=n-1$, ricordando (§ 5, *c*) ciò che si è detto per le equazioni lineari del primo ordine, si vede che *l'integrazione di un'equazione lineare dell'ordine* n, *quando si conoscono* n — 1 *integrali particolari, linearmente indipendenti, della corrispondente equazione incompleta, è riducibile ad* n + 1 *quadrature.*

13. **Esempii**: *a)* L'equazione lineare del *primo* ordine $y'+y\varphi(x)=f(x)$ si può sempre integrare, perchè dell'equazione incompleta $y'+y\varphi(x)=0$ si conosce l'integrale generale $y=ae^{-\int\varphi dx}$, ed il metodo di Lagrangia dà

$$a'e^{-\int\varphi dx}=f(x)\ .$$

Dunque, successivamente,

$$a=\int e^{\int\varphi dx}.fdx\quad,\quad y=e^{-\int\varphi dx}\int e^{\int\varphi dx}.fdx\ .$$

b) L'equazione del *secondo* ordine $y''+y'\varphi+y\psi=f$ si può integrare mediante tre quadrature quando è nota una funzione u, soddisfacente alla condizione $u''+u'\varphi+u\psi=0$. Infatti, posto $y=au$, l'equazione diventa

$$a''u+a'(2u'+\varphi)=f\ .$$

Questa è del primo ordine in a', e se ne può ricavare a' con due quadrature; poi

$$y=u\int\frac{\int ue^{\int\varphi dx}.fdx}{u^2e^{\int\varphi dx}}dx\ .$$

c) È utile sapere che l'integrazione di qualunque equazione lineare *incompleta* del secondo ordine si può ridurre a quella di un'equazione di Riccati, seguìta da una quadratura. Infatti la sostituzione $y=e^{\int zdx}$ trasforma

$$y''+y'\varphi+y\psi=0\qquad\text{in}\qquad z'+z^2+z\varphi+\psi=0\ .$$

Così le proprietà dell'equazione lineare spiegano quelle dell'equazione di Riccati, e viceversa.

d) Con quattro quadrature si deve poter integrare l'equazione del *terzo* ordine (14), quando si conoscono due funzioni u e v, soddisfacenti alla (13). Ed effettivamente, posto $y=au+bv$, $a'=-vz$, $b'=uz$, $\alpha=uv'-vu'$, si ha

$$y'=au'+bv'\quad,\quad y''=au''+bv''+\alpha z\quad,\quad y'''=au'''+bv'''+\alpha z'+2\alpha' z\ ;$$

l'equazione si trasforma in $\alpha z'+(2\alpha'+\alpha\varphi)z=f$, e con due quadrature se ne deduce

$$z=\frac{\int\alpha e^{\int\varphi dx}.fdx}{\alpha^2e^{\int\varphi dx}}\ ;$$

poi, con altre due quadrature, si giunge all'integrale generale

$$y=v\int uzdx-u\int vzdx\ .$$

GABINET MATEMATYCZN
Towarzystwa Naukowego Warszawsk

www.rcin.org.pl

14. **Equazioni a coefficienti costanti.** Quando i coefficienti della funzione incognita e delle sue derivate nell'equazione completa (10) hanno valori costanti, è facile trovare n integrali particolari, linearmente indipendenti, dell'equazione incompleta (11), e per conseguenza, con n quadrature, l'integrale generale dell'equazione completa. Si tenti infatti di soddisfare con $y=e^{kx}$ alla (11); questa si muta in una condizione per k, detta *equazione caratteristica*:

$$\varphi(k)=k^n+k^{n-1}f_1+k^{n-2}f_2+\cdots+kf_{n-1}+f_n=0\ .$$

Se le radici $k_1, k_2, \ldots$ di $\varphi(k)$ sono tutte distinte, gli n integrali $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots$ sono linearmente indipendenti, perchè il loro wronskiano è il prodotto di e^{-xf_1} per *)

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 \ldots k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & k_2^2 \ldots k_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k_n & k_n^2 \ldots k_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n-1}(a_{i+1}-a_i)(a_{i+2}-a_i)\ldots(a_n-a_i) \gtrless 0\ .$$

Dunque *l'integrale generale dell'equazione incompleta è*

$$y=a_1e^{k_1x}+a_2e^{k_2x}+\cdots\cdots+a_ne^{k_nx}\ , \tag{16}$$

dove $a_1, a_2, \ldots$ sono *costanti arbitrarie*. Si attribuisca invece alle a_i il significato di *funzioni*, le cui derivate, definite dal sistema

$$k_1^\nu a'_1 e^{k_1x}+k_2^\nu a'_2 e^{k_2x}+\cdots+k_n^\nu a'_n e^{k_nx}=\begin{cases} 0 & \text{, per } \nu=0,1,2,\ldots,n-2\ , \\ f(x) & \text{, per } \nu=n-1\ , \end{cases}$$

siano $a'_i=e^{-k_ix}f(x):\varphi'(k_i)$. Il metodo di Lagrangia conduce ad asserire che *l'integrale generale dell'equazione completa è*

$$y=\frac{e^{k_1x}}{\varphi'(k_1)}\int e^{-k_1x}f(x)dx+\frac{e^{k_2x}}{\varphi'(k_2)}\int e^{-k_2x}f(x)dx+\cdots+\frac{e^{k_nx}}{\varphi'(k_n)}\int e^{-k_nx}f(x)dx\ .$$

15. Quando l'equazione caratteristica ha radici multiple, il numero degli integrali particolari e^{kx} è inferiore all'ordine dell'equazione, e la formola (16) cessa di rappresentare l'integrale generale dell'equazione incompleta. In tal caso si osservi che, se $e^{\alpha x}$ ed $e^{(\alpha+h)x}$ sono due di questi integrali, altrettanto si può dire (§ 10) della funzione

$$\frac{e^{(\alpha+h)x}-e^{\alpha x}}{h}=\frac{e^{hx}-1}{h}e^{\alpha x}\ ,$$

e quindi anche, per h tendente a zero, di $xe^{\alpha x}$. Dunque per ogni radice *doppia* α di φ si conoscono, ora, *due* integrali particolari, cioè $e^{\alpha x}$ ed $xe^{\alpha x}$

*) « *Analisi algebrica* » p. 14.

www.rcin.org.pl

Del resto è facile convincersi, con una verifica diretta, che per $y = xe^{\alpha x}$ l'equazione (11) è soddisfatta, giacchè il primo membro si riduce al prodotto di $e^{\alpha x}$ per $\varphi'(\alpha) + x\varphi(\alpha) = 0$. Similmente, se α è radice doppia di φ, ed $\alpha + h$ è una radice che tende a confondersi con α, si può affermare che la funzione

$$\frac{e^{(\alpha+h)x} - (1+hx)e^{\alpha x}}{h^2} = \frac{e^{hx} - (1+hx)}{h^2} e^{\alpha x} ,$$

(e conseguentemente, per h tendente a zero, anche $x^2 e^{\alpha x}$) è un integrale particolare, sicchè ogni radice *tripla* α di φ fornisce *tre* integrali particolari: $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}$. Così proseguendo si riconosce che, se l'equazione caratteristica ammette le radici $\alpha, \beta, \ldots$ degli ordini $r, s, \ldots$ rispettivamente, *l'integrale generale dell'equazione incompleta è*

$$y = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1}) e^{\alpha x} + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_{s-1} x^{s-1}) e^{\beta x} + \cdots ,$$

dove le n costanti $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ sono arbitrarie. Diciamo, per finire, che, ordinariamente, le equazioni che si presentano sono a coefficienti reali; e, siccome conviene avere y sotto forma reale, si cerca di fare sparire gli immaginarii osservando che alla somma $ae^{(\alpha+i\beta)x} + be^{(\alpha-i\beta)x}$, cui dà luogo ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di radici conjugate, si può dar la forma reale

$$(\mathrm{A} \cos \beta x + \mathrm{B} \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} ,$$

prendendo reali le nuove costanti arbitrarie $\mathrm{A} = a + b$, $\mathrm{B} = i(a - b)$.

16. **Esercizii**: *a)* Integrare $y'' + y = f(x)$. Qui $k^2 + 1 = 0$ è l'equazione caratteristica, e però due integrali particolari dell'equazione incompleta sono e^{ix}, e^{-ix}, ai quali, come si è detto, si possono sostituire $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Dunque l'integrale generale di $y'' + y = 0$ è $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$. Facendo variare le costanti si ottengono le equazioni

$$a' \operatorname{sen} x + b' \cos x = 0 \quad , \quad a' \cos x - b' \operatorname{sen} x = f(x) ,$$

dalle quali si deduce $a' = f(x) \cos x$, $b' = -f(x) \operatorname{sen} x$; poi

$$y = \operatorname{sen} x \int f(x) \cos x \, dx - \cos x \int f(x) \operatorname{sen} x \, dx .$$

b) Integrare $y''' = f(x)$. L'equazione caratteristica ammette 0 come radice tripla, e però l'integrale generale di $y''' = 0$ è, come si poteva prevedere, $y = a + bx + cx^2$. La variazione delle costanti fornisce il sistema

$$a' + b'x + c'x^2 = 0 \quad , \quad b' + 2c'x = 0 \quad , \quad 2c' = f(x) ,$$

da cui si ricava $a' = {}^1/_2 x^2 f(x)$, $b' = -xf(x)$, $c' = {}^1/_2 f(x)$. Dunque l'integrale generale di $y''' = f(x)$ è

$$y = {}^1/_2 \int x^2 f(x) \, dx - x \int x f(x) \, dx + {}^1/_2 x^2 \int f(x) \, dx .$$

Questo è, del resto, un risultato quasi evidente, perchè, se si pone successivamente

$$\int f(x) \, dx = f_1(x) \quad , \quad \int f_1(x) \, dx = f_2(x) \quad , \quad \int f_2(x) \, dx = f_3(x) ,$$

www.rcin.org.pl

si ottiene, integrando per parti,

$$\int xf(x)dx = xf_1(x) - f_2(x) \quad , \quad \int x^2 f(x)dx = x^2 f_1(x) - 2xf_2(x) + 2f_3(x) \cdot$$

e l'espressione trovata per l'integrale generale diventa $y = f_3(x)$.

c) Integrare $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = f(x)$. Le radici dell'equazione caratteristica sono $-1, -1, i, -i$. Dunque l'integrale generale dell'equazione incompleta è

$$y = (a + bx)e^{-x} + \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x \ .$$

Col metodo di Lagrangia si calcola poi l'integrale generale dell'equazione completa:

$$y = {}^1/_2(1 + x)e^{-x}\int e^x f(x)dx - {}^1/_2 e^{-x}\int xe^x f(x)dx$$
$$- {}^1/_2 \operatorname{sen} x \int f(x) \operatorname{sen} x\, dx - {}^1/_2 \cos x \int f(x) \cos x\, dx \ .$$

Data $f(x)$, ed eseguite le quattro quadrature indicate, si riesce a porre y sotto la forma (15), ossia a portare in evidenza un integrale particolare y_0, che si può ridurre alla più semplice espressione togliendone tutte le parti soddisfacenti all'equazione incompleta. Così, per esempio, per $f(x) = e^{-x}$ si ottiene $y_0 = {}^1/_4 x^2 e^{-x}$.

d) Integrare $y = xy' + x^2 y''$. Se tentiamo di soddisfare a questa equazione con $y = x^n$, troviamo che si deve avere $1 = n + n(n-1)$, cioè $n = \pm 1$. Dunque l'integrale generale è $y = ax + \dfrac{b}{x}$. Se poi l'equazione da integrare è

$$y = xy' + x^2 y'' + f(x) \ ,$$

il metodo di Lagrangia dà

$$y = \frac{x}{2}\int f(x)\, d\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\int f(x)\, dx \ .$$

e) Per integrare $y + xy' + x^2 y'' = x$ si ponga, come precedentemente, $y = x^n$ nell'equazione incompleta. Si ottiene $n = \pm i$, e poichè

$$x^{\pm i} = e^{\pm i \log x} = \cos \log x \pm i \operatorname{sen} \log x \ ,$$

si vede che $\operatorname{sen} \log x$ e $\cos \log x$ sono due integrali particolari. Siccome poi un integrale particolare dell'equazione completa si scorge immediatamente, ed è ${}^1/_2 x$, si può subito affermare che l'integrale generale dell'equazione proposta è

$$y = {}^1/_2 x + a \operatorname{sen} \log x + b \cos \log x \ .$$

f) In modo analogo si può integrare $x^2 y'' - (2n-1)xy' + n^2 y = 0$. Ponendo $y = x^m$ si riconosce che vi è un sol valore possibile per m, cioè $m = n$; ma la conoscenza dell'integrale particolare x^n è sufficiente (§ 13, *b*) per trovare l'integrale generale. Posto $y = x^n z$, l'equazione diventa $z''x + z' = 0$, e dà $z = a + b \log x$. Dunque $y = x^n(a + b \log x)$. A questo risultato si giunge anche mediante un cambiamento di variabile indipendente: $x = e^t$. Siccome

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad , \quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) ,$$

l'equazione diventa

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} + n^2 y = 0 \ .$$

www.rcin.org.pl

Questa ha i coefficienti costanti, e la sua equazione caratteristica ammette n come radice doppia. Dunque il suo integrale generale ha la forma $(a+bt)e^{nt}$, e però l' integrale generale dell'equazione proposta è $y=x^n(a+b\log x)$.

g) Similmente, per integrare $(1-x^2)y''-xy'+y=0$, si ponga $x=\cos t$, dimodochè

$$y'=-\frac{1}{\operatorname{sen} t}\frac{dy}{dt}\ ,\quad y''=-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}\ .$$

L'equazione si trasforma in $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$, e però ammette gli integrali particolari $\cos t=x$, $\operatorname{sen} t=\sqrt{1-x^2}$. Dunque l'integrale generale è $y=ax+b\sqrt{1-x^2}$.

h) Le sostituzioni d'una variabile indipendente ad un'altra non sono sempre fatte a caso. Esse vengono spesso determinate dal proposito di ottenere una data semplificazione nell'equazione che si considera. Così, nell'equazione

$$(1+x^2)y''+xy'=n^2y\ ,$$

trasformata in

$$(1+x^2)t'^2\frac{d^2y}{dt^2}+\big((1+x^2)t''+xt'\big)\frac{dy}{dt}=n^2y\ ,$$

si può fare sparire il termine in $\frac{dy}{dt}$ prendendo $\frac{t''}{t'}+\frac{x}{1+x^2}=0$, cioè

$$t'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,$$

e conseguentemente $t=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log(x+\sqrt{1+x^2})$. Mediante questa sostituzione l'equazione proposta diventa $\frac{d^2y}{dt^2}=n^2y$, ed ha per integrale generale $ae^{nt}+be^{-nt}$. Quindi, osservando che $e^t=x+\sqrt{1+x^2}$, $e^{-t}=-x+\sqrt{1+x^2}$, si vede che l' integrale generale cercato è

$$y=a\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)^n+b\big(-x+\sqrt{1+x^2}\big)^n\ .$$

i) Per integrare l'equazione $y={}^1/_2y'+xy''$, considerata da Legendre, si prenda come variabile indipendente $x=t^2$, e si osservi che

$$y'=\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\ ,\quad y''=-\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2}\ .$$

L'equazione diventa $\frac{d^2y}{dt^2}=4y$, e però il suo integrale generale è

$$y=ae^{2\sqrt{x}}+be^{-2\sqrt{x}}\ .$$

Lepaige ha trovato che, più generalmente, l'equazione $y=my'+xy''$ è integrabile per infiniti valori di m. Si può infatti (§ 13, c) ridurla, ponendo $y=e^{\int z dx}$, ad un'equazione di Riccati: $x(z'+z^2)+mz=1$. Se si pone $z=uv$, e si determina v in modo che sia $xv'+mv=0$ (ciò si ottiene prendendo $v=x^{-m}$), si trova che u deve soddisfare all' equazione $xv(u'+vu^2)=1$, cioè $u'+u^2x^{-m}=x^{m-1}$. Posto $x=t^\mu$, l'ultima equazione si trasforma in

$$\frac{du}{dt}+\mu u^2t^{\mu(1-m)-1}=\mu t^{\mu m-1}\ ,$$

www.rcin.org.pl

poi $\left(\text{supponendo } m \gtrless 1 \text{ e prendendo } \mu = \frac{1}{1-m}\right)$ in $\frac{du}{dt} + \frac{u^2}{1-m} = \frac{t^n}{1-m}$, con $n = -\frac{1-2m}{1-m}$, e conseguentemente $\frac{n}{2n+4} = m - \frac{1}{2}$. Dunque (§ 6, h) l'equazione proposta è integrabile per

$$m = \pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm\frac{3}{2}\ ,\ \pm\frac{5}{2}\ ,\ \pm\frac{7}{2}\ ,\ \pm\frac{9}{2}\ ,\ \ldots\ldots$$

j) Tentiamo l'integrazione dell'equazione non lineare

$$y'' + 3y' + 2(y - y^3) = 0\ ,$$

seguendo la via indicata da Mansion. Se si pone $y' + y = z$, l'equazione diventa $z' + 2z = 2y^3$. Il metodo della variazione delle costanti conduce ancora a porre $y = ue^{-x}$, $z = ve^{-2x}$, e le funzioni u e v debbono soddisfare alle condizioni $u' = ve^{-x}$, $v' = 2u^3 e^{-x}$. Eliminando x si ottiene $vdv = 2u^3 du$. Dunque $v^2 = u^4 - a^4$. Poi, sostituendo v in $v' = 2u^3 e^{-x}$ ed integrando,

$$e^{-x} = \mp\int\frac{du}{\sqrt{u^4 - a^4}}\ .$$

Nel secondo membro comparisce un integrale ellittico. Se sapessimo esprimere u in funzione di x, avremmo anche l'espressione dell' integrale generale ue^{-x}. Ad ogni modo possiamo sempre ottenere infiniti integrali particolari supponendo $a = 0$, nella quale ipotesi si ha

$$e^{-x} = c \pm \frac{1}{u}\ ,\quad y = \frac{\pm 1}{1 - ce^x}\ .$$

k) L'uso delle serie è assai utile per l' integrazione di certe equazioni differenziali. Per esempio l'equazione $y'' + \frac{4}{x}y' + n^2 y = 0$, che si presenta in Meccanica, si può integrare ricorrendo alla serie

$$f_\nu(x) = 1 - \frac{x^2}{2(\nu+1)} + \frac{x^4}{2.4.(\nu+1)(\nu+3)} - \frac{x^6}{2.4.6.(\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)} + \ldots\ .$$

Infatti, se si osserva che $f''_\nu(x) + \frac{\nu}{x}f'_\nu(x) + f_\nu(x) = 0$, e se si pone, nell'equazione proposta, $y = x^\mu f_\nu(nx)$, si trova

$$f''_\nu(nx) + \frac{2\mu+4}{nx}f'_\nu(nx) + \left(1 + \frac{\mu(\mu+3)}{n^2x^2}\right)f_\nu(nx) = 0\ .$$

Questa non può coincidere con la relazione ottenuta precedentemente se non è $\mu(\mu+3) = 0$, $\nu = 2\mu + 4$. Dunque dev'essere $\mu = 0$, $\nu = 4$, o $\mu = -3$, $\nu = -2$, e però l' integrale generale cercato è $y = af_4(nx) + bx^{-3}f_{-2}(nx)$. Del resto le funzioni f_{-2} ed f_4 si possono esprimere molto semplicemente in forma finita. Per questo si osservi che $f_{\nu+2}(x) = -\frac{\nu+1}{x}f'_\nu(x)$. Intanto si vede che

$$f_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots = \cos x\ .$$

www.rcin.org.pl

Ne segue

$$f_{-2}(x)=1+\int_0^x x\cos x\,dx=x\operatorname{sen}x+\cos x\ ;$$

poi

$$f_2(x)=-\frac{1}{x}f_0'(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x}\quad,\quad f_4(x)=-\frac{3}{x}f_2'(x)=\frac{3\operatorname{sen}x}{x^3}-\frac{3\cos x}{x^2}\ .$$

Finalmente possiamo scrivere l' integrale generale sotto la forma seguente:

$$y=\frac{a}{x^3}(\operatorname{sen}nx-nx\cos nx)+\frac{b}{x^3}(\cos nx+nx\operatorname{sen}nx)\ .$$

l) Importante è la *serie ipergeometrica* *)

$$\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(1+\alpha).\beta(1+\beta)}{1.2.\gamma(1+\gamma)}x^2+\frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha).\beta(1+\beta)(2+\beta)}{1.2.3.\gamma(1+\gamma)(2+\gamma)}x^3+\cdots,$$

che soddisfa, come facilmente si verifica, all'equazione differenziale (di Gauss)

$$(x-x^2)y''+(\gamma-(1+\alpha+\beta)x)y'=\alpha\beta y\ .$$

Se si cerca di soddisfare a questa equazione più generalmente con

$$y=x^\mu f(\alpha',\beta',\gamma',x)\ ,$$

si trova che si deve avere, o $\mu=0,\alpha'=\alpha,\beta'=\beta,\gamma'=\gamma$, o pure $\mu=1-\gamma$, $\alpha'=1+\alpha-\gamma$, $\beta'=1+\beta-\gamma$, $\gamma'=2-\gamma$. Dunque l' integrale generale è

$$y=af(\alpha,\beta,\gamma,x)+bx^{1-\gamma}f(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,x)\ .$$

È utile sapere che la serie ipergeometrica racchiude come casi particolari gli sviluppi di varie importanti funzioni. Così, per $\beta=\gamma$, o $\alpha=\gamma=1$, o $\alpha=\beta=1$ e $\gamma=2$, si trovano le funzioni $(1-x)^{-\alpha}, e^{\beta x}, -\frac{1}{x}\log(1-x)$. Si osservi, per finire, che i due integrali particolari precedentemente ottenuti si confondono in uno quando $\gamma=1$; ma è noto che quest'unico integrale è sufficiente per la conoscenza dell' integrale generale. Così, per esempio, per $\beta=1$ l'equazione diventa

$$(x-x^2)y''+(1-(2+\alpha)x)y'=\alpha y\ ,$$

ed ammette l' integrale particolare $(1-x)^{-\alpha}$; poi un calcolo facile (§ 13, *b*) mostra che il suo integrale generale è

$$y=a(1-x)^{-\alpha}+b\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1-x}{1+\alpha}+\frac{(1-x)^2}{2+\alpha}+\frac{(1-x)^3}{3+\alpha}+\cdots\cdots\right).$$

Equazioni fra più variabili.

17. **Equazioni ai differenziali totali.** Invece di $udx+vdy=0$ supponiamo data l'equazione

$$udx+vdy+wdz=0\ , \tag{17}$$

in cui u,v,w sono funzioni *note* di x,y,z. Evidentemente, se si considera

*) Vedi Novi « *Algebra superiore* » p. 286, o il « *Cours d'Analyse* » di Jordan, t. I, p. 154.

www.rcin.org.pl

una delle tre variabili, per esempio z, come funzione delle altre due (indipendenti), la (17) si scinde in

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{u}{w}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{v}{w}\ ; \tag{18}$$

d'onde è facile dedurre che *le funzioni* u, v, w *non possono essere date ad arbitrio.* Infatti, essendo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{w}+\frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{u}{w}\ ,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{w}+\frac{u}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{v}{w}\ ,$$

cioè

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{w}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{u}{w^2}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{v}{w^2}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{w}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{v}{w^2}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{u}{w^2}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z}\ ,$$

si vede, eguagliando (IX, 29) fra loro queste espressioni, che si deve avere

$$u\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\ . \tag{19}$$

È questa una condizione *necessaria* per l'esistenza d'una relazione fra le variabili x, y, z, i cui differenziali totali siano vincolati dalla (17). Per dimostrare che la condizione stessa è anche *sufficiente*, vogliamo far vedere che, supponendola soddisfatta, è possibile l'integrazione della (17), o del sistema equivalente formato dalle (18). La seconda equazione del sistema si può considerare come un'equazione differenziale *ordinaria*, del primo ordine, fra le variabili y e z, e però, designando con $\varphi(x)$ una funzione *arbitraria*, il suo integrale generale ha la forma

$$f(x, y, z)=\varphi(x)\ , \tag{20}$$

giacchè in questa integrazione x si deve trattare come una costante, da cui pur dipendono v e w. Intanto si noti che, se si deriva la (20) mantenendo costante x, si deve ricadere sull'equazione differenziale da cui si è partiti, e però si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}:v=\frac{\partial f}{\partial z}:w=\mu\ ,$$

dove μ è una conveniente funzione di x, y, z. Ciò premesso, se si vuole che sia soddisfatta anche la prima delle (18), bisogna determinare φ in modo che, derivando la (20) nell'ipotesi di y costante, si abbia

$$\varphi'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\mu u\ , \tag{21}$$

per la qual cosa occorre (e basta) che $\frac{\partial f}{\partial x}-\mu u$ sia funzione della sola x. Tutto si riduce dunque a far vedere che, se la condizione (19) è soddisfatta, è nulla la derivata di $\frac{\partial f}{\partial x}-\mu u$ rispetto ad y, presa considerando z come

www.rcin.org.pl

una funzione di x e di y, definita dall'equazione (20). In altri termini

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mu u\right)-\frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mu u\right)=0\ .$$

Intanto si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mu u\right)=\frac{\partial \mu v}{\partial x}-\frac{\partial \mu u}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mu u\right)=\frac{\partial \mu w}{\partial x}-\frac{\partial \mu u}{\partial z}\ ;$$

quindi l'ultima condizione, se vi si aggiunge il termine

$$\frac{\partial \mu w}{\partial y}-\frac{\partial \mu v}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0$$

moltiplicato per u, diventa

$$u\left(\frac{\partial \mu w}{\partial y}-\frac{\partial \mu v}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial \mu u}{\partial z}-\frac{\partial \mu w}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial \mu v}{\partial x}-\frac{\partial \mu u}{\partial y}\right)=0\ ,$$

e si riduce poi facilmente alla condizione (19), perchè il primo membro è uguale al primo membro di (19), moltiplicato per μ, più

$$u\left(w\frac{\partial \mu}{\partial y}-v\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)+v\left(u\frac{\partial \mu}{\partial z}-w\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)+w\left(v\frac{\partial \mu}{\partial x}-u\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)=0\ .$$

Soddisfatta la condizione (19), si può affermare che la relazione (20), in cui si pone per $\varphi(x)$ l'espressione che si deduce dalla (21) mediante una quadratura, è l'integrale dell'equazione (17). Osserviamo, per finire, che, quando la (17) è integrabile, il primo membro, moltiplicato per una conveniente funzione di x, y, z, è un differenziale esatto (*cfr.* IX, 30), perchè, se alla (20) si dà la forma $\Phi(x,y,z)=$ *costante* (facendo passare tutto in un membro), si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\varphi'(x)=\mu u\quad,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\mu v\quad,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}=\mu w\ ,$$

e però $\mu(udx+vdy+wdz)=d\Phi$. Geometricamente la questione da noi trattata equivale a fissare *a priori* una tripla infinità di piani, ed a costruire una famiglia di superficie, tangenti ai piani stessi in punti prestabiliti. Dalle considerazioni precedenti risulta che il problema è generalmente impossibile.

18. **Equazioni ordinarie simultanee.** Ora si domandi quali relazioni debbono intercedere fra tre variabili x, y, z, affinchè i loro differenziali siano proporzionali a funzioni *note* di x, y, z:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}\ . \tag{22}$$

Geometricamente ciò equivale a fissare *a priori* le tangenti, in tutti i punti dello spazio, a curve incognite, ed è facile intuire (*cfr.* § 2) che tali curve sono in numero doppiamente infinito, sicchè le loro equazioni, costituenti il sistema integrale delle (22), debbono avere la forma

$$\mathrm{F}(x,y,z,a,b)=0\quad,\quad \mathrm{G}(x,y,z,a,b)=0\ , \tag{23}$$

www.rcin.org.pl

con a e b costanti arbitrarie. Ed effettivamente le (22) altro non sono che due equazioni differenziali *ordinarie*, del *primo* ordine, che in forma più generale si possono scrivere così:

$$f(x,y,z,y',z')=0 \quad , \quad g(x,y,z,y',z')=0 \ . \tag{24}$$

Da queste equazioni ricaviamo $z=\varphi(x,y,y')$ e $z'=\psi(x,y,y')$. Eguagliando la seconda espressione alla derivata della prima si ottiene una relazione fra x,y,y',y'', cioè un'equazione differenziale del *secondo* ordine fra due sole variabili, x ed y; ed integrando questa equazione si giunge ad avere y espresso in funzione di x e di *due* costanti arbitrarie, a e b; quindi, sostituendo y in $z=\varphi(x,y,y')$, si riesce ad esprimere anche z in funzione di x,a,b. Così le (24), o le (22), sono integrate. Bisogna poi notare che alle (24), ricavandone $y'=dy:dx$ e $z'=dz:dx$, si può sempre dare la forma (22). Similmente, se fra *quattro* variabili x,y,z,t, sono date *tre* equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine, immaginiamo che se ne ricavino le derivate di x,y,z rispetto a t, e siano $x'=u, y'=v, z'=w$, con u,v,w funzioni *note* di x,y,z,t. Dalla prima ($x'=u$) si ricavi $y=\varphi(t,x,z,x')$ per sostituirlo nelle altre due, le quali in tal modo prendono la forma

$$f(t,x,z,x',z',x'')=0 \quad , \quad g(t,x,z,x',z')=0 \ .$$

Da queste si ricavino $z=\psi(t,x,x',x'')$ e $z'=\chi(t,x,x',x'')$, e si uguagli la seconda espressione alla derivata della prima. La relazione che in tal modo si ottiene fra t,x,x',x'',x''' è un'equazione differenziale del *terzo* ordine, la cui integrazione conduce ad esprimere x in funzione di t e di tre costanti arbitrarie. Sostituendo x in $z=\psi(t,x,x',x'')$, poi x e z in $y=\varphi(t,x,z,x')$, si ottengono analoghe espressioni per y e z. In generale, dato un sistema di n equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine, fra $n+1$ variabili

$$\frac{dx}{u}=\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\ldots=\frac{dx_n}{u_n} \ ,$$

si può ridurne l'integrazione, mediante successive eliminazioni di $n-1$ variabili, all'integrazione d'una sola equazione differenziale, dell'ordine n, fra due variabili, ed ottenerne così il sistema integrale sotto la forma di n equazioni simultanee

$$F_i(x,x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n)=0 \ , \qquad (i=1,2,3,\ldots,n)$$

con n costanti arbitrarie. Grazie alla presenza di queste costanti *un sistema di* n *funzioni, obbligate a prendere valori prescritti per un dato valore della variabile indipendente, si può considerare come definito da* n *equazioni differenziali simultanee del primo ordine.*

19. **Equazioni alle derivate parziali.** La più semplice equazione alle derivate parziali (§ 1) è quella che vincola le derivate parziali p e q

www.rcin.org.pl

d'una funzione incognita z di x ed y alla funzione stessa ed alle variabili indipendenti. Noi vogliamo qui occuparci più particolarmente di quelle equazioni che contengono linearmente p e q, e che per tale ragione diconsi *lineari*. Esse hanno la forma

$$up + vq = w \ , \tag{25}$$

con u, v, w funzioni *note* di x, y, z. Domandare quali son tutte le funzioni z soddisfacenti ad una simile relazione equivale geometricamente a domandare quali superficie sono in ciascun punto (x, y, z) toccate da una retta condotta per questo punto nella direzione (u, v, w), giacchè la (25) si può considerare appunto come la condizione di ortogonalità fra la direzione *nota* (u, v, w) e quella $(p, q, -1)$ della normale ad una delle superficie da costruire. È ovvio che ognuna di queste superficie è il luogo d'una infinità di linee, scelte nella doppia infinità (23), e l'insieme di tutte le possibili superficie si potrà, per conseguenza, rappresentare vincolando *arbitrariamente* tra loro le costanti nelle equazioni (23), sicchè l'equazione di qualunque superficie, soddisfacente alla (25), si potrà ottenere eliminando a e b fra le (23) ed una relazione arbitraria $\omega(a, b) = 0$. Questa previsione sarà presto confermata dal calcolo. Sia $f(x, y, z) = 0$ una qualsiasi relazione, atta a definire z in funzione di x ed y, in guisa da soddisfare alla (25). Sostituendo

$$p = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad q = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

nella (25), questa diventa

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ , \tag{26}$$

equazione lineare ed *omogenea*, che si può subito integrare appena sia noto il sistema integrale delle (22). Supponiamo infatti risolute le (23) rispetto alle costanti arbitrarie:

$$\varphi(x, y, z) = a \quad , \quad \psi(x, y, z) = b \ . \tag{27}$$

Qui notiamo che le funzioni φ e ψ sono tra loro indipendenti, perchè, se ciò non fosse, fissato per a un valore, non sarebbe più arbitrario il valore di b. Orbene la (26) è soddisfatta tanto per $f = \varphi$, quanto per $f = \psi$, giacchè la differenziazione delle (27), e la sostituzione di u, v, w alle quantità proporzionali dx, dy, dz, ci dà

$$u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad , \quad u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \ . \tag{28}$$

Ciò premesso, qualunque sia la funzione f soddisfacente alla (26), per la compatibilità di questa equazione con le (28) si richiede che sia

$$\frac{\partial(f, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z)} = 0 \ ,$$

e per conseguenza (V, 30) che tra f, φ, ψ interceda una relazione. Questa

www.rcin.org.pl

involge necessariamente f, altrimenti vi sarebbe un legame tra φ e ψ. Dunque $f=\omega(\varphi,\psi)$. Quanto ad ω, esso è il simbolo d'una *funzione arbitraria*, perchè, comunque si prenda ω, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,;$$

quindi

$$\sum u\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\sum u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\sum u\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\,,$$

e la (26) è soddisfatta. Ed ora si vede che *per soddisfare alla* (25) *basta porre* $\omega(\varphi,\psi)=0$. Più generalmente, l'integrazione dell'equazione lineare ad n variabili *indipendenti*

$$u_1\frac{\partial x}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial x}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial x}{\partial x_n}=u \tag{29}$$

si riduce subito all'integrazione dell'equazione lineare *ed omogenea* ad $n+1$ variabili *indipendenti*

$$u_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0\,, \tag{30}$$

e per integrar questa basta integrare il sistema di n equazioni ordinarie

$$\frac{dx}{u}=\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\cdots=\frac{dx_n}{u_n}\,,$$

scrivendone il sistema integrale sotto la forma

$$\varphi_i(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)=\textit{costante}\,,\qquad (i=1,2,3,\ldots,n)\,.$$

Si soddisfa alla (30) nel modo più generale con $f=\omega(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$, ed alla (29) ponendo $\omega(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)=0$, dove ω è simbolo di *funzione arbitraria*.

20. È utile sapere che la conoscenza d'un integrale particolare $f=\varphi$ dell'equazione (26) permette di semplificare l'integrazione riducendo da tre a due il numero delle variabili indipendenti. Poichè φ contiene almeno una delle tre variabili, si può sempre supporre che φ dipende da z, cambiando, se occorre, i nomi delle variabili; e per conseguenza si può sostituire φ a z come variabile indipendente. Ora, se si distinguono mediante parentesi le derivate parziali, prese rispetto al nuovo sistema x,y,φ di variabili, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,,$$

e così l'equazione (26) si trasforma in $u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$. Il problema si trova in tal modo ridotto all'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine fra due variabili, $y'=\chi(x,y,\varphi)$, della quale basterà determinare un integrale particolare per giungere alla conoscenza d'un altro

www.rcin.org.pl

integrale ψ della (26). Più generalmente, la conoscenza di ν integrali particolari, indipendenti, dell'equazione (30), ossia di ν funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ soddisfacenti alla (30), e tali che nessuna di esse sia funzione delle altre, permette di trasformare la (30) in un'equazione analoga con $n-\nu+1$ variabili indipendenti, alla quale si giunge assumendo come variabili $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ al posto di ν variabili x.

21. Per integrare, secondo Lagrangia, un'equazione qualunque alle derivate parziali prime, con due variabili indipendenti,

$$f(x,y,z,p,q)=0\ , \tag{31}$$

si cerchi di ottenere un'altra relazione $g(x,y,z,p,q)=0$, per potere, aggregandola alla (31), dedurne p e q in funzione di x,y,z, ed in seguito determinare z mercè l'integrazione (§ 17) dell'equazione ai differenziali totali $dz=pdx+qdy$. La derivazione parziale (rispetto ad x,y,z) delle equazioni $f=0$ e $g=0$ dà

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=0\ ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=0\ .$$

Se da questo sistema, eliminandone $\frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{\partial q}{\partial y}$, si deducono le altre quattro derivate parziali di p e q, per sostituirle nella relazione

$$\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}\ ,$$

necessaria e sufficiente per l'integrabilità di $dz=pdx+qdy$, si trova l'equazione lineare ed omogenea alle derivate parziali prime, con cinque variabili indipendenti,

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y}+\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial g}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial q}\ , \tag{32}$$

che si sa (§ 19) integrare mediante quattro equazioni differenziali simultanee del primo ordine. Del resto, secondo un'importante osservazione di Charpit, che verrà giustificata fra breve, basta determinare un solo integrale g della (32), con *una* costante arbitraria, per potere poi, integrando $dz=pdx+qdy$, arrivare alla conoscenza della *più generale* funzione $z=\mathrm{F}(x,y,a,b)$ soddisfacente alla (31), purchè si convenga di considerare a e b, sia come costanti arbitrarie, sia come variabili soggette a certe condizioni. Suppongasi, per maggior chiarezza, che la (31) sia stata messa sotto la forma $z=\Phi(x,y,p,q)$; sia $z=\mathrm{G}(x,y)$ una funzione qualunque soddisfacente a questa equazione, sicchè, identicamente, $\mathrm{G}=\Phi\left(x,y,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x},\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}\right)$. D'altra parte si determinino a e b mediante le equazioni

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}\ . \tag{33}$$

www.rcin.org.pl

Se si riflette che l'equazione proposta dev' essere soddisfatta indipendentemente da a e b quando per z vi si pone $F(x,y,a,b)$, si vede subito che

$$F(x,y,a,b)=\Phi\left(x,y,\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\Phi\left(x,y,\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y}\right)=G(x,y)\ .$$

Adunque l'espressione $F(x,y,a,b)$ chiude in sè tutte le possibili funzioni z soddisfacenti all'equazione proposta, e per questa ragione si chiama l'*integrale completo* dell'equazione stessa. Intanto la derivazione parziale dell'identità $F=G$, se si tien conto delle (33), mostra che si deve avere

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0\quad,\quad\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0\ . \tag{34}$$

Queste relazioni, identicamente vere per a e b costanti, sono soddisfatte anche quando a e b sono convenienti funzioni di x e di y, indipendenti o arbitrariamente vincolate fra loro. Nel primo caso il determinante $\frac{\partial(a\ ,b)}{\partial(x,y)}$ è diverso da zero, e però si deve avere $\frac{\partial F}{\partial a}=0$, $\frac{\partial F}{\partial b}=0$, d'onde si ricavano per a e b due distinte funzioni, la cui sostituzione in $z=F(x,y,a,b)$ conduce alla conoscenza d'un particolare integrale $z=\varphi(x,y)$, detto *integrale singolare*. Nella seconda ipotesi, posto $b=\omega(a)$, le (34) si riducono all'unica condizione $\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}\omega'(a)=0$, e da queste due uguaglianze si ricavano per a e b due espressioni, includenti un simbolo di funzione arbitraria; sostituendole in $z=F(x,y,a,b)$ si trova ciò che si suol chiamare l'*integrale generale* dell'equazione proposta.

XIII. LE VARIAZIONI.

1. Definita una funzione y della variabile x, immaginiamone un'altra tale che, per ciascun valore di x, il corrispondente valore della nuova funzione differisca infinitamente poco da quello di y. Si suole designare con $y+\delta y$ la nuova funzione, e la quantità infinitesima δy si chiama la *variazione* di y. Essa è una quantità completamente *arbitraria*, sia che si consideri un dato valore di x, sia che si passi da un valore di x ad un altro. È facile convincersi che il segno di variazione δ obbedisce alle medesime leggi del segno di differenziazione d. È infatti quasi evidente che

$$\delta(u+v)=\delta u+\delta v\quad,\quad\delta uv=u\delta v+v\delta u\ ;\ ecc.$$

Inoltre, in virtù della definizione stessa,

$$\delta dy=d(y+\delta y)-dy=d\delta y\quad,\quad\delta\int ydx=\int(y+\delta y)dx-\int ydx=\int\delta y\,dx\ .$$

www.rcin.org.pl

Ancora, se y è funzione delle funzioni $u, v, w, \ldots$, si ha

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v + \frac{\partial y}{\partial w}\delta w + \cdots .$$

Finalmente (e questo ha grande importanza) se si tratta di rendere *minima* o *massima*, sotto certe condizioni, la precedente funzione, *è condizione necessaria che la sua variazione sia nulla.* Si può andare oltre nell'estendere alle variazioni le proprietà dei differenziali; ma qui siamo obbligati a limitarci.

2. In varie questioni di Geometria e di Meccanica si è condotti a cercare una tal funzione y di x, che l'integrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'', \ldots) dx$$

prenda il minimo o il massimo valore di cui è suscettibile. La condizione che dev'essere soddisfatta è $\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta f . dx = 0$. Anzitutto si osservi che, se si attribuisce alla funzione incognita y la variazione infinitesima arbitraria δy, si ha

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y'' + \cdots .$$

Poi si noti che

$$\int \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \int \frac{\partial f}{\partial y'} d\delta y = \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y - \int \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\, dx .$$

Similmente, cambiando y in y',

$$\int \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y'' dx = \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y' - \int \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''}\delta y' dx = \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y' - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''}\delta y + \int \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''}\delta y\, dx ;$$

poi, cambiando ancora y in y',

$$\int \frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y''' dx = \frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y'' - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y' + \int \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y' dx$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y'' - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y' + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y - \int \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y\, dx ;$$

ecc. Per conseguenza, se si pone

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial f}{\partial y'''} + \cdots\cdots ,$$

$$\sigma = \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y'''} - \cdots\right)\delta y$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'''} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} - \cdots\right)\delta y'$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y'''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{V}}} - \cdots\right)\delta y''$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

www.rcin.org.pl

si ha $\delta U = \int \Phi \delta y \, dx + \sigma$; poi, limitando l'integrazione all'intervallo (x_0, x_1), e mettendo l'indice 0 o l'indice 1 alle quantità calcolate per $x = x_0$ o per $x = x_1$, rispettivamente,

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \Phi \delta y \, dx + \sigma_1 - \sigma_0 \, .$$

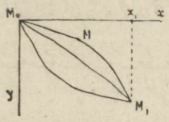
Ora, per l'arbitrarietà di δy, l'eguaglianza $\delta U = 0$ si scinde in $\Phi = 0$ (*equazione indefinita*), che dev'essere verificata per tutti i valori di x, compresi fra x_0 ed x_1; ed in $\sigma_0 - \sigma_1 = 0$ (*equazione ai limiti*). La questione è dunque ridotta all'integrazione dell'equazione differenziale $\Phi = 0$, seguìta dalla determinazione delle quantità arbitrarie, fatta in modo da verificare le condizioni ai limiti.

3. **Esempii**: *a)* La *più breve linea* che va da un punto all'altro del piano si determina cercando di rendere minimo l'integrale $U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \, dx$, che rappresenta la lunghezza della curva incognita fra il punto (x_0, y_0) ed il punto (x_1, y_1). Qui si ha

$$f = \sqrt{1 + y'^2} \quad , \quad \Phi = -\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad , \quad \sigma = \frac{y' \delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \, .$$

L'equazione $\Phi = 0$ dà subito $y' = a$, $y = ax + b$, e le costanti a, b sono determinate dalle condizioni $y_0 = ax_0 + b$, $y_1 = ax_1 + b$. Quanto all'equazione ai limiti, essa è soddisfatta identicamente, perchè, essendo obbligate le infinite funzioni y a prendere per $x = x_0$ il valore prescritto y_0, e per $x = x_1$ il valore y_1, si ha sempre $\delta y_0 = 0, \delta y_1 = 0$, e conseguentemente $\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} (\delta y_1 - \delta y_0) = 0$. Se invece si fosse domandata la più breve linea fra le rette $x = x_0$ ed $x = x_1$, anche le variazioni δy_1 e δy_0 sarebbero state arbitrarie, e la condizione $\sigma_1 = \sigma_0$ avrebbe dato $a = 0$, e conseguentemente $y = b$.

b) Cerchiamo la *linea della più celere discesa*, cioè quella linea d'un piano verticale che si deve far percorrere ad un punto materiale pesante, se si vuole che, partendo da una data posizione M_0, arrivi nel più breve tempo possibile in un'altra posizione prestabilita M_1. Poniamo l'origine in M_0, e conduciamo verticalmente, in giù, l'asse delle y. Dagli elementi della Fisica è noto che, se t è il tempo impiegato a percorrere l'arco $M_0 M = s$, si ha $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$, rappresentando con g una certa costante. La quantità da rendere minima è



$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \, dx \, ,$$

dimodochè, a prescindere da un fattore costante, qui si ha

$$f = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \quad , \quad \Phi = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \quad , \quad \sigma = \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \, .$$

www.rcin.org.pl

Siccome f è funzione di y e di y' soltanto, si ha, tenendo presente l'equazione indefinita,

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''=y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Dunque $f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=costante$, cioè, rappresentando con $1:\sqrt{2a}$ la costante, $y(1+y'^2)=2a$. Ne segue $dx:\sqrt{y}=dy:\sqrt{2a-y}$, ed è inutile andare oltre, perchè si sa (XI, 7, c) che questa equazione caratterizza la *cicloide*. Questa curva ha una cuspide nel punto di partenza M_0, e la base orizzontale. Le due costanti, cioè a e la costante introdotta dall' integrazione dell'ultima equazione, si determinano esprimendo che la curva passa per M_0 ed M_1. Anche qui l'equazione ai limiti è soddisfatta identicamente, perchè $\delta y_0=0$, $\delta y_1=0$; ma se al punto mobile si prescrivesse soltanto di arrivare, nel più breve tempo possibile, sulla verticale $x=x_1$, si avrebbe ancora $\delta y_0=0$, ma δy_1 sarebbe arbitraria, e l'equazione ai limiti $\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y_1=0$ darebbe $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$, cioè $y'_1=0$, vale a dire che il punto dovrebbe arrivare orizzontalmente sulla verticale assegnata. In questo caso la costante a è determinata dalla condizione che si debba avere, non $y=y_1$, sì bene $y'=0$ per $x=x_1$.

4. Se anche x_0 ed x_1 potessero variare, cioè se i punti M_0 ed M_1, invece di rimanere fissi o di essere obbligati a non lasciare le rette $x=x_0$ ed $x=x_1$, fossero più generalmente liberi di spostarsi lungo le linee $y=\varphi(x)$ ed $y=\psi(x)$, alla variazione di U già ottenuta verrebbe ad aggiungersi anche quella dovuta al variare dei limiti, cioè

$$\int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} f dx-\int_{x_0}^{x_1} f dx=\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} f dx-\int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} f dx=f_1\delta x_1-f_0\delta x_0 .$$

Dunque

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\Phi\delta y\, dx+(\sigma+f\delta x)_0^1 .$$

Intanto, ai limiti, le δx dipendono dalle δy, perchè, se il punto (x,y) è obbligato soltanto a non lasciare la curva $y=\chi(x)$, si ha, dopo la variazione, che la nuova ordinata è $y+\delta y$, aumentata della variazione dovuta al variare di x, cioè $y'\delta x$, e d'altra parte la medesima ordinata è rappresentata da $\chi(x+\delta x)$, ossia $\chi(x)+\chi'(x)\delta x$. Ne segue $\delta y=(\chi'(x)-y')\delta x$. Quindi

$$\delta y_0=(\varphi'(x_0)-y'_0)\delta x_0 \quad , \quad \delta y_1=(\psi'(x_1)-y'_1)\delta x_1 .$$

5. Riprendiamo il problema della più rapida discesa, supponendo che i punti di partenza e di arrivo siano soltanto obbligati a trovarsi su certe due linee $y=\varphi(x)$ ed $y=\psi(x)$. L'equazione indefinita è sempre la stessa, e però la trajettoria del punto mobile è sempre una *cicloide*. Ora, per formare l'equazione ai limiti, si noti che, essendo $y(1+y'^2)=2a$, si ha

$$f=\frac{\sqrt{2a}}{y} \quad , \quad \sigma=\frac{y'\delta y}{\sqrt{2a}} ,$$

www.rcin.org.pl

e conseguentemente

$$\sigma + f\delta x = \frac{y'}{\sqrt{2a}}\delta y + \frac{\sqrt{2a}}{y}\delta x = (1 + y'\chi'(x))\frac{\delta x}{\sqrt{2a}} \cdot$$

Dunque

$$(\sigma + f\delta x)_0^1 = (1 + y'_1\psi'(x_1))\frac{\delta x_1}{\sqrt{2a}} - (1 + y'_0\varphi'(x_0))\frac{\delta x_0}{\sqrt{2a}} ,$$

e però l'equazione ai limiti si scinde in

$$1 + y'_1\psi'(x_1) = 0 \quad , \quad 1 + y'_0\varphi'(x_0) = 0 \ .$$

Queste ci dicono che la cicloide *deve incontrare ad angolo retto le due linee date.*

6. Passando al caso generale di più funzioni $y, z, \ldots$ di x, si abbia l'integrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z', y'', z'', \ldots\ldots) dx$$

da rendere minimo o massimo. Immaginando ripetuti i calcoli del § 2, e chiamando Ψ e τ le quantità Φ e σ, relative alla funzione z, si ottiene

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} (\Phi\delta y + \Psi\delta z) dx + (\sigma + \tau)_0^1 \cdot$$

Se fra y e z non esiste alcun vincolo, si avranno due equazioni indefinite invece di una, cioè $\Phi = 0$ e $\Psi = 0$; ma se deve aver luogo una relazione $F(x, y, z) = 0$, le variazioni di y e di z non saranno indipendenti, perchè si avrà

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0 \ ,$$

e per l'annullamento di δU si richiede soltanto che sia

$$\Phi : \frac{\partial F}{\partial y} = \Psi : \frac{\partial F}{\partial z}$$

per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_1.

7. Per esempio, data a cercare sulla superficie $F(x, y, z) = 0$ la linea più breve fra quelle che congiungono due punti, si tratta di rendere minimo l'integrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx \ .$$

Qui

$$\Phi = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \quad , \quad \Psi = -\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} ,$$

www.rcin.org.pl

e però, chiamando s l'arco della linea incognita, ed osservando che

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\frac{dy}{ds}\ ,\quad \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\frac{dz}{ds}\ ,$$

si vede (VII, 4) che Φ e Ψ sono proporzionali ai coseni μ, ν degli angoli che la normale principale alla detta linea fa con gli assi delle y e delle z, mentre si sa (VIII, 1) che $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$ sono proporzionali agli analoghi coseni M, N della normale alla superficie. Basterebbe assumere y come variabile d'integrazione per provare invece la proporzionalità di λ, ν ad L, N, e per conseguenza

$$\frac{\lambda}{\mathsf{L}}=\frac{\mu}{\mathsf{M}}=\frac{\nu}{\mathsf{N}}=\pm 1\ ;$$

sicchè le linee più brevi sono tali che, in ogni punto, la normale principale coincide con la normale alla superficie. Esse sono dunque (VIII, 7) le *linee geodetiche.*

8. Finalmente in certe quistioni si chiede che un integrale U diventi minimo o massimo, non per tutte le funzioni da cui dipende l'integrando, ma solo per quelle che mantengono costante un altro integrale V. Allora, immaginando ripetute le considerazioni che si son fatte per la ricerca dei minimi e dei massimi valori delle funzioni di più variabili vincolate, si viene alla conseguenza che bisogna porre uguale a zero, non la variazione di U, sì bene quella di $U+\lambda V$, essendo λ una costante da determinare convenientemente.

9. **Esempii**: *a)* Fra le curve di data lunghezza, che congiungono il punto (x_0, y_0) al punto (x_1, y_1), proponiamoci di trovarne una per la quale sia minima o massima l'area chiusa fra la curva stessa, l'asse delle x e le ordinate estreme. Qui si tratta di vedere quale funzione y, fra quelle che lasciano invariato il secondo degli integrali

$$U=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx\ ,\quad V=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx\ ,$$

fa prendere al primo un valore minimo o massimo. Posto $f=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$, si è visto (§ 3, *b*) che deve serbarsi costante

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=y+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\ .$$

Si chiami b la costante. Allora si ha, ricavando y' ed integrando,

$$x=\int\frac{(b-y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}}=a+\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}\ ,$$

e finalmente $(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2$. Le costanti a, b, λ si determinano mediante le condizioni che la curva contenga i punti dati, e che V prenda il valore costante prestabilito.

www.rcin.org.pl

b) Cerchiamo ancora fra le curve di lunghezza data, che vanno da M_0 ad M_1, una curva tale che il baricentro dell'arco M_0M_1 sia il più lontano possibile da una data retta. Prendendo questa come asse delle x, si deve (XI, 8) render massimo il primo degli integrali

$$U=\int_{s_0}^{s_1} y\,ds=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad , \quad V=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx \ ,$$

con una funzione y scelta fra quelle che fanno prendere al secondo integrale un dato valore costante. La funzione f da considerare è $f=(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$, e si ha

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\,.$$

L'integrazione di $(y+\lambda):\sqrt{1+y'^2}=$ *costante* conduce all'equazione d'una *catenaria.*

---

www.rcin.org.pl

NOTE

*
* *

Sul concetto di limite.

Se un insieme è costituito da numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tendenti ad un limite finito l, è chiaro che questo limite è *caratterizzato* dalla seguente proprietà: *intorno ad l cadono infiniti numeri dell'insieme.* Da ciò viene spontanea l'idea di chiamar *limite*, nel caso generale, ogni numero che ha la detta proprietà, dimodochè le successioni di numeri tendenti ad un limite ci si presentano come particolarissime, in quanto ciascuna ammette un limite solo. Ora la proposizione dimostrata nel § 8 del primo capitolo si può enunciare così: *ogni insieme finito, costituito da infiniti numeri, ammette almeno un limite.* Da questa, poi, segue immediatamente la proposizione del § 15, che si può del resto sopprimere, come più oltre si vedrà. Un insieme può avere infiniti limiti, anzi può accadere che tutti i suoi numeri, ed altri ancora, siano numeri limiti, come se ne ha un esempio semplicissimo nell'insieme dei numeri razionali, giacchè infiniti di questi cadono sempre intorno a qualunque numero, razionale o irrazionale. I limiti d'un insieme, racchiuso nel minimo intervallo (λ, μ), costituiscono un insieme finito, e per conseguenza ammettono un limite inferiore $\lambda_0 \geqq \lambda$ ed un limite superiore $\mu_0 \leqq \mu$. Questi numeri sono anche limiti dell'insieme dato. Per λ_0 ciò è ovvio se si riesce a prendere x tanto vicino a λ_0, che in (λ_0, x), escluso l'estremo inferiore, non cada alcun limite. Se ciò non è possibile, vuol dire che, per quanto x si accosti a λ_0, nell'interno di (λ_0, x) cadono sempre limiti, e con essi infiniti numeri dell'insieme dato, donde segue che λ_0 è un limite dell'insieme stesso. Altrettanto dicasi di μ_0. Dunque *ogni insieme finito, costituito da infiniti numeri, ammette sempre un limite minimo ed un limite massimo.* Ed ora, dall'osservazione ovvia che nell'eguaglianza fra il minimo ed il massimo limite sta quanto occorre e basta per l'esistenza d'un limite unico, si deduce facilmente la nota condizione necessaria e sufficiente perchè i numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tendano ad un limite finito.

In certe questioni i numeri λ_0 e μ_0 hanno maggiore importanza di λ e μ. Essi non variano, come possono λ e μ, quando nell'insieme dato si sopprimono uno o più numeri, perchè tali soppressioni non fanno sparire alcun limite. Se non è $\lambda_0 = \lambda$, è chiaro che in (λ, x) non possono cadere, per $x < \lambda_0$, infiniti numeri dell'insieme, mentre ciò accade certamente per $x > \lambda_0$. Un'osservazione analoga

www.rcin.org.pl

si può fare per μ_0. Dunque λ_0 e μ_0 sono, rispettivamente, il limite superiore ed il limite inferiore dei numeri x, tali che in (λ, x), o in (x, μ), non cadono infiniti numeri dell'insieme che si considera. Ciò non toglie che fuori dell'intervallo (λ_0, μ_0), e propriamente *alla sinistra* di λ_0 o *alla destra* di μ_0, possano cadere anche infiniti numeri dell'insieme stesso, giacchè λ_0, per esempio, può non appartenere all'insieme dei numeri x, dei quali è limite superiore.

Per rendere più chiare le considerazioni precedenti, immaginiamo che nella successione indefinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$, supposta finita nei due sensi, si sopprimano i primi n termini. La successione residua $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ ammette sempre il limite inferiore $\lambda_n \geqq \lambda_{n-1}$ ed il limite superiore $\mu_n \leqq \mu_{n-1}$. I numeri $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, non decrescenti, ed inferiori a μ, tendono, per n infinito, ad un limite $\lambda_0 \leqq \mu$; ed i numeri $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, non crescenti, ma superiori a λ, tendono ad un limite $\mu_0 \geqq \lambda$. È poi facile constatare che questi due limiti sono appunto i numeri λ_0 e μ_0, definiti precedentemente. Essi sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

a) i numeri della successione finiscono per esser tutti superiori a qualunque numero minore di λ_0, *ed inferiori a qualunque numero maggiore di* μ_0;

b) per quanto si vada oltre nella successione non si finirà mai d'incontrare termini minori e termini maggiori di qualunque numero compreso fra λ_0 *e* μ_0.

In virtù della prima proprietà la sinistra del limite minimo e la destra del limite massimo sono come la sinistra e la destra del limite unico, quando questo esiste; e si può ben dire che i numeri della successione finiscono per oscillare *intorno* ad un intervallo, che può eccezionalmente ridursi ad un sol numero; ma se un tal numero, o limite unico, non esiste, è impossibile trovare, corrispondentemente ad ogni numero positivo ε, un numero ν, tale che per n' ed n'' maggiori di ν, sia sempre $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$, perchè, in virtù della seconda proprietà, se $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$, esistono valori arbitrariamente grandi di n' ed n'', tali che $|a_{n'} - a_{n''}| > \varepsilon$: basta prendere $a_{n'} < {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon)$, $a_{n''} > {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon)$.

***

Gli estremi oscillatorii.

Anche nello studio delle funzioni è utile considerare i limiti minimo e massimo. Così, per esempio, l'insieme dei valori che una funzione finita $f(x)$ assume in $(x, x+h)$, escluso x, ammette il limite inferiore λ, funzione di h, che tende necessariamente ad un limite λ_0 quando h tende a zero, perchè non può, decrescendo h, variare senza crescere, pur mantenendosi inferiore al limite superiore μ. In modo analogo si definisce il limite massimo μ_0. Evidentemente i valori di questi limiti (detti *estremi oscillatorii* della funzione) dipendono unicamente da x, ma possono, a sinistra, differire da quelli di destra. Le funzioni $\lambda_0(x)$ e $\mu_0(x)$, relative, per esempio, alla destra dei valori di x, sono caratterizzate dalle seguenti proprietà: *ad ogni numero positivo* ε *corrisponde un numero* h, *tale che per ogni valore di* x, *preso fra* a *ed* $\mathrm{a}+\mathrm{h}$, *si ha*

$$\lambda_0(a) - \varepsilon < f(x) < \mu_0(a) + \varepsilon \ ;$$

ed in ogni intervallo $(\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{h})$, *piccolo quanto si vuole, esistono numeri* x' *ed* x'' *tali che*

$$\lambda_0(a) + \varepsilon > f(x') \quad , \quad f(x'') < \mu_0(a) - \varepsilon \ .$$

www.rcin.org.pl

Dopo ciò è facile dimostrare il teorema del § 16, senza servirsi del lemma che lo precede (I, 15). Basta osservare che, quando non esiste il limite (unico) dei valori di $f(x)$ alla destra di a, è $\lambda_0 < \mu_0$, e si può sempre, dato il numero positivo $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$, prendere x' ed x'' vicini ad a quanto si vuole, e tali che

$$f(x') < {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon) \quad , \quad f(x'') > {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon) \ ,$$

in guisa cioè che risulti $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Dunque, se per ogni ε è soddisfatta la condizione $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ in un intervallo $(a, a+h)$ sufficientemente piccolo, esiste necessariamente il numero $f(a+0)$, uguale al comune valore di $\lambda_0(a)$ e $\mu_0(a)$.

***

Dimostrazione del teorema di Cantor.

Il primo teorema di Weierstrass, quantunque per sè stesso importante, si può toglier via dalla serie delle proposizioni fondamentali sulle funzioni, evitando di servirsene nel dimostrare (I, 29) il teorema di Cantor. Prendiamo le mosse dal punto in cui si è giunti a definire, in corrispondenza ad un dato numero positivo ε, una funzione $h(x)$, uguale, per ciascun valore di x, al massimo fra i numeri h, tali che per tutte le coppie di numeri x' ed x'', presi nell'intervallo $(x-h, x+h)$, esclusi al più gli estremi, sia $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Nel medesimo intervallo, esclusi gli estremi, prendiamo il numero $x+l$, ed osserviamo che la condizione precedente è soddisfatta in un intervallo, diviso per metà da $x+l$, che ha un estremo coincidente con quello fra gli estremi del primo intervallo, che si trova *più vicino* ad $x+l$, d'onde segue $h(x+l) \geqq h(x) \mp l$, secondo che l è positivo o negativo. Invece non sempre ciò accade quando si prende l'estremo *più lontano* da $x+l$; ed è poi certo che, se si considera un intervallo anche più grande, sempre diviso per metà da $x+l$, non sussiste più quella condizione, altrimenti $h(x)$ non sarebbe il massimo fra i numeri h considerati. Ne segue $h(x+l) \leqq h(x) \pm l$, secondo che l è positivo o negativo. Dunque, in tutti i casi,

$$|h(x+l) - h(x)| \leqq |l| \quad , \quad \lim_{l=0} h(x+l) = h(x) \ ,$$

vale a dire che la funzione $h(x)$ è continua. Intanto il secondo teorema di Weierstrass afferma l'esistenza del *minimo* valore di $h(x)$, e questo minimo λ è *positivo*, giacchè tali sono tutti i valori di $h(x)$. Ed ora è chiaro che l'intervallo, di cui si parla nell'enunciato del teorema di Cantor, è appunto 2λ.

***

Teorema di Hadamard.

In seguito all'accenno fatto, in fondo al § 9 del terzo capitolo, circa la determinazione del raggio di convergenza d'una serie di potenze, è utile conoscere il seguente teorema *) di Hadamard: *se i numeri* $\sqrt[n]{|a_n|}$, *per* $n = 1, 2, 3, \ldots$,

*) « *Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable* » (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 1888, p. 259).

www.rcin.org.pl

costituiscono un insieme finito, il numero inverso del loro limite massimo misura il raggio di convergenza della serie $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ Infatti, se si rappresenta con $\frac{1}{\rho}$ il detto limite, ciò significa che le disuguaglianze

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l \quad , \quad \sqrt[n]{|a_n|} > l' \quad , \quad \left(l' < \frac{1}{\rho} < l\right)$$

sono soddisfatte, la prima per *tutti* i valori di n, superiori ad un certo numero, la seconda per *taluni* valori di n, grandi quanto si vuole. Ora, se nella serie data, il cui termine generale è $u_n = a_n x^n$, si suppone $|x| < \rho$, si può fra $|x|$ e ρ inserire un numero $q\rho$; poi, preso $l = q : |x|$, si ha sempre, a partire da un certo valore di n,

$$\sqrt[n]{|u_n|} = |x| . \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1 \quad , \quad |u_n| < q^n \ ,$$

e però la serie proposta converge assolutamente, giacchè i suoi termini finiscono per essere inferiori, in valore assoluto, ai corrispondenti termini della progressione geometrica convergente $1 + q + q^2 + \ldots$ Invece, se $|x| > \rho$, si può prendere $l' = 1 : |x|$, e non si cesserà mai d'incontrare valori di n, per i quali si avrà

$$\sqrt[n]{|u_n|} = |x| . \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad , \quad |u_n| > 1 \ .$$

Ne segue, in questo caso, che la serie non è convergente, perchè la condizione $\lim u_n = 0$, necessaria per la convergenza, non può essere soddisfatta. Dunque ρ è il limite superiore dei valori di $|x|$, per i quali converge la serie considerata. Si noti, per finire, che, per avere $\rho = \infty$, è necessario e sufficiente che il limite massimo (e per conseguenza anche il limite minimo) di $\sqrt[n]{|a_n|}$ sia nullo. Dunque *in* $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *sta quanto occorre e basta affinchè la serie*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \ldots$$

sia convergente per tutti i valori di x.

***

Minimi e massimi delle funzioni.

La discussione dei minimi e dei massimi (III, 25) delle funzioni d'una variabile si potrebbe più semplicemente esporre alla fine del secondo capitolo, fondandosi sul teorema di l'Hospital, che dà

$$\lim_{x=a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ ,$$

nell'ipotesi che a sia una radice $(n-1)^{-upla}$ di $f'(x)$.

Per le funzioni di più variabili vogliamo far notare che la seconda parte della dimostrazione data nel § 11 del quarto capitolo è inaccettabile. Per intender bene l'objezione che si può fare si consideri una funzione di due variabili $(x = a + r\cos\theta, y = b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, i cui valori intorno al punto (a, b) dipendono, per conseguenza, da r e da θ. Se, per un dato valore di θ, la funzione ha un

www.rcin.org.pl

minimo in (a,b), ciò vuol dire che $f(a,b) \leqq f(x,y)$ per quel valore di θ che si considera, e per tutti i valori di r compresi in un certo intervallo $(-\rho,\rho)$. Questo numero positivo ρ è ben determinato per ciascun valore di θ se si conviene di attribuirgli il più gran valore possibile. Al variare di θ fra 0 e π (escluso un estremo), varia, in generale, anche ρ, e la corrispondente coppia di punti $(a \pm \rho\cos\theta, b \pm \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ descrive una curva chiusa, tale che nell'interno di essa si ha sempre $f(a,b) \leqq f(x,y)$, mentre all'esterno, in punti vicini al contorno quanto si vuole, $f(x,y)$ diventa inferiore ad $f(a,b)$. Ciò premesso, se la funzione ρ, come accade ordinariamente, raggiunge un valor minimo $h\sqrt{2}$, si ha certamente $f(a,b) \leqq f(x,y)$ tutte le volte che $|x-a| \leqq h$, $|y-b| \leqq h$. Allora la funzione $f(x,y)$ ha un minimo nel punto (a,b). Ciò non accade, invece, se i valori di ρ hanno semplicemente un limite inferiore *nullo*, perchè, dato h arbitrariamente piccolo, basterà prendere θ sufficientemente vicino a quel valore, intorno a cui (I, 11) il limite inferiore di ρ è sempre 0, per poter rendere $\rho < h\sqrt{2}$; ed allora, prendendo $r > \rho$, si dovranno trovare valori di x e di y, tali che, pur essendo $|x-a| \leqq h$, $|y-b| \leqq h$, si ha $f(x,y) < f(a,b)$.

***

Cuspidi e flessi nel polo.

Nella ricerca dei punti d'inflessione d'una curva piana, rappresentata in coordinate polari, abbiamo esclusi (VI, 24) i valori di θ che annullano r insieme ad $r^2 + 2r'^2 - rr''$, perchè annullano anche r', e per conseguenza $r^2 + r'^2$, dimodochè non si sa dire che cosa diventa la curvatura. Anzi, in generale, è facile constatare che questa, invece di tendere a zero, cresce oltre ogni limite, sicchè si ha una cuspide invece d'un flesso. Per sapere, dunque, se il polo è un punto d'inflessione, bisogna porre uguale a zero l'espressione completa della curvatura, e non il solo numeratore; o pure discutere direttamente l'andamento della curva intorno al polo. Supponiamo che r si annulli per $\theta = \theta_0$, ed in vicinanza del polo consideriamo, sulla curva, un punto, le cui coordinate rispetto alla tangente ed alla normale nel polo siano $x = r\cos(\theta - \theta_0)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta - \theta_0)$. Applicando il teorema di l'Hospital, per θ tendente a θ_0, si ottiene

$$\rho = \lim \frac{x^2}{2y} = \lim \frac{r\cos^2(\theta - \theta_0)}{2\,\mathrm{sen}(\theta - \theta_0)} = {}^1/_2 \lim \frac{r}{\theta - \theta_0} = {}^1/_2 r' ,$$

dove r' s'intende calcolato per $\theta = \theta_0$. Del resto anche la nota espressione di ρ si riduce, per $r = 0$ ed $r' \gtrless 0$, a $\rho = {}^1/_2 r'$. Dunque, se la funzione r' si annulla insieme ad r per $\theta = \theta_0$, si ha $\rho = 0$. Per avere un punto d'inflessione bisognerebbe invece che fosse $r' = \infty$.

***

Sulla torsione delle curve.

Il calcolo della torsione si può eseguire in modo simile a quello che ci ha condotti (VII, 10) alla formola

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2 .$$

www.rcin.org.pl

Infatti dalle

$$\frac{\lambda}{\rho}=\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\ ,\quad \frac{\mu}{\rho}=\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\ ,\quad \frac{\nu}{\rho}=\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\ ,$$

si deduce, derivando,

$$\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\left(\frac{a}{\rho}+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{\rho}=\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\ ,\ ecc.;$$

poi, quadrando e sommando,

$$\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

A questa formola, che permette di calcolare r quando è noto ρ, si giunge anche elevando al quadrato la formola (17) del § 11, dopo aver messo il secondo membro sotto la forma più generale

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} \end{vmatrix}\ ,$$

come sempre (V, 11, c) si può.

Un altro elemento utile per la discussione delle curve storte è la *torsione sferica*, immaginata da Demartres. Essa è misurata dal rapporto a ds dell'*angolo* $d\vartheta$ *di due sfere osculatrici infinitamente vicine.* Se $\mathfrak{R}$ è il raggio della sfera osculatrice, e $d\sigma$ l'elemento della linea dei centri, si trova subito

$$d\sigma^2=d\mathfrak{R}^2+\mathfrak{R}^2d\vartheta^2\ .$$

Intanto (VII, 20, 23) è noto che $d\sigma=-\varkappa ds$, $\mathfrak{R}d\mathfrak{R}=\varkappa r d\rho$, dove

$$\mathfrak{R}^2=\rho^2+\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)^2\ ,\quad \varkappa=\frac{\rho}{r}+\frac{d}{ds}\left(r\frac{d\rho}{ds}\right).$$

Dunque

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\varkappa\rho}{\mathfrak{R}^2}=\frac{1}{r}\frac{d\log\mathfrak{R}}{d\log\rho}\ .$$

***

Sul calcolo delle curvature d'una superficie.

Nelle formole date in fine del § 28 dell'ottavo capitolo le derivazioni si suppongono fatte rispetto alle variabili indipendenti x ed y, trattando z come funzione delle variabili stesse. Rappresentiamo con l, m, n, per comodo di scrittura, i coseni direttori della normale alla superficie, ed osserviamo che, se invece di z si considera, per esempio, y come funzione delle altre due coordinate, una derivata parziale rispetto ad x ha generalmente valori differenti nelle due ipotesi. D'altra parte è chiaro che nelle espressioni delle curvature è lecito sostituire z ad y, come variabile *indipendente*, e simultaneamente n ad m. Orbene

www.rcin.org.pl

è facile spiegarsi ciò tenendo conto del nuovo significato delle derivate parziali. Infatti, se si distinguono mediante parentesi le derivate rispetto alla coppia di variabili indipendenti x e z, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{l}{n}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}=-\frac{m}{n}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

e però

$$\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}=\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)-\frac{1}{n}\left\{l\left(\frac{\partial l}{\partial z}\right)+m\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)\right\}=\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right).$$

Similmente

$$\frac{\partial(l,n)}{\partial(x,y)}=-\frac{m}{n}\frac{\partial((l,n))}{\partial((x,z))};$$

quindi, eliminando le derivate di m mediante le condizioni

$$l\frac{\partial l}{\partial x}+m\frac{\partial m}{\partial x}+n\frac{\partial n}{\partial x}=0 \quad , \quad l\frac{\partial l}{\partial y}+m\frac{\partial m}{\partial y}+n\frac{\partial n}{\partial y}=0,$$

si trova

$$\frac{\partial(l,m)}{\partial(x,y)}=-\frac{n}{m}\frac{\partial(l,n)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial((l,n))}{\partial((x,z))}.$$

***

Formole di Rodrigue.

La condizione (VIII, 36) perchè il punto (x,y,z) generi una linea di curvatura, sopra una data superficie, si può immediatamente scrivere esprimendo che il piano normale alla linea considerata deve (VIII, 15, a) coincidere col piano rettificante d'una sviluppata di questa linea, le cui tangenti sono normali alla superficie, sicchè si deve avere

$$\frac{dx}{dl}=\frac{dy}{dm}=\frac{dz}{dn}.$$

Son queste le *formole di Rodrigue*, che si riducono ad una sola se si tien conto della condizione di perpendicolarità $ldx+mdy+ndz=0$. Inversamente, quando le relazioni precedenti sono soddisfatte, si ha pure

$$\begin{vmatrix} l & dl & dx \\ m & dm & dy \\ n & dn & dz \end{vmatrix}=0,$$

vale a dire (VIII, 9) che la normale alla superficie genera una sviluppabile, e però il punto (x,y,z) si sposta lungo una linea di curvatura. È poi facile vedere che il comune valore dei precedenti rapporti rappresenta, a prescindere dal segno, il corrispondente raggio principale di curvatura. Finalmente dalle formole di Rodrigue si passa alla condizione ottenuta nel citato paragrafo differenziando $l=-np$, $m=-nq$, ed osservando che $dl+pdn$, $dm+qdn$, e per conseguenza anche $dx+pdz$, $dy+qdz$, sono proporzionali a dp, dq.

www.rcin.org.pl

***

Formola generale di Stirling.

La formola di Stirling (III, 18, b), che permette di calcolare $n!$ quando n è molto grande, si può dedurre dalla formola più generale

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}}, \tag{1}$$

supponendo x uguale ad un numero intero n, ed osservando che $n!=n\Gamma(n)$. Per dimostrare la (1) si parta dalla nota (III, 26, i) eguaglianza

$$\log\Gamma(x)=-\log x+\sum_{n=2}^{n=\infty}\left(x\log n-(x-1)\log(n-1)-\log(x+n-1)\right),$$

e se ne facciano sparire i logaritmi, nel secondo membro, mediante la formola

$$\log x=\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\int_1^\infty dx\int_0^\infty e^{-xt}dt=\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-xt}\right)\frac{dt}{t}.$$

Si trova subito

$$\log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left\{(x-1)e^{-t}-\frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right\}\frac{dt}{t}; \tag{2}$$

poi, integrando fra x ed $x+1$, e ricordando (IX, 10, h) la *formola di Raabe*,

$$x\log x-x+\log\sqrt{2\pi}=\int_0^\infty\left\{\left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t}+\frac{e^{-xt}}{t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Il secondo membro si può spezzare in

$$\int_0^\infty\left\{\left(x-1-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t}+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-xt}\right)\frac{dt}{t}.$$

Dunque

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\log\sqrt{2\pi}=\int_0^\infty\left\{\left(x-1-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t}+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Ora la (2) diventa

$$\log\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\log\sqrt{2\pi}+\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t}.$$

Intanto, se si prende $n=1:(1-e^{-t})$ nelle note (III, 18, b) disuguaglianze

$$1<\left(n-\frac{1}{2}\right)\log\frac{n}{n-1}<1+\frac{1}{12n(n-1)},$$

si trova

$$0<\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}<\frac{e^t+e^{-t}-2}{12t}<\frac{t}{12},$$

www.rcin.org.pl

e per conseguenza si può scrivere

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) e^{-xt} \frac{dt}{t} = \frac{\theta}{12} \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{\theta}{12x},$$

rappresentando con θ un numero compreso fra 0 ed 1. Dunque

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \log \sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12x}.$$

Passando dai logaritmi ai corrispondenti numeri si trova la formola (1).

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

CORREZIONI ED AGGIUNTE

Pag. 15, linea 8, dal fondo, invece di *gli stessi limiti, inferiore e superiore*, leggere *lo stesso limite, inferiore o superiore.*

» 30, linea 12 (non 11) invece di *destro o sinistro*, leggere *destro e sinistro.*

» 34, in fondo: non è necessario ricorrere alle derivate logaritmiche per dimostrare la regola della derivazione d'un prodotto di n funzioni $y = uvw.....$ Ammesso il teorema per $n-1$ fattori, basta scrivere $y' = u'(vw.....) + u(vw.....)'$, *ecc.*, per estenderlo al caso di n fattori.

» 35, § 7: la regola per la derivazione d'un quoziente $y = u:v$ si può dedurre da quella per la derivazione d'un prodotto scrivendo

$$u = vy \quad , \quad u' = v'y + vy' \quad , \quad y' = \frac{u'}{v} - \frac{v'}{v}\, y = \frac{vu' - uv'}{v^2} \; ;$$

ma prima bisogna far notare che la derivata del prodotto di due funzioni *non esiste* quando una sola di queste funzioni ha la derivata per valori della variabile indipendente, che non annullano la funzione stessa. Dopo ciò si può affermare che, ammessa l'esistenza di u' e v', e supposto $v \gtrless 0$, esiste anche y'; *ecc.*

» 40, linea 12, dopo *intervallo* inserire (a, b).

» 44, § 16: per intender bene la differenza tra crescente *in un intervallo* e crescente *intorno ad un valore* della variabile indipendente, basti l'esempio della funzione $\frac{1}{x}$, che si deve chiamar *crescente* a destra dello zero, qualunque valore le si assegni per $x = 0$, mentre è *decrescente* in ogni intervallo $(0, h)$, escluso l'estremo inferiore, per quanto piccolo sia h.

» 49 (§ 27, *d*). Si aggiunga, come esempio, $f(x) = x \operatorname{sen} \log x$, e si osservi che

$$\operatorname{sen} \log x = \sqrt{2} \operatorname{sen}(^1/_4 \pi + \log \xi) \; ,$$

sicchè, non potendo $\operatorname{sen}^2(^1/_4 \pi + \log \xi)$ superare $^1/_2$, vi sono sempre in $(0, h)$, per quanto piccolo sia h, infiniti intervalli, costantemente evitati da ξ: essi appartengono alla successione $(q, q^2), (q^3, q^4), (q^5, q^6), \ldots$, dove $\log q = -^1/_2 \pi$.

» 53, linea 2, invece di *un altra* leggere *un'altra.*

» 85, » 23, con le parole *di grado inferiore ad n* si vuole intendere: *il cui grado sia, al più*, $n-1$.

» 90, sulla figura: la freccia, nel punto 3, deve partire da 2 e non da 1.

» 125, linea 10, invece di (III, 12) leggere (III, 10).

» 129, » 9, dal fondo, invece di θy leggere ∂y.

» 133, » 15, dopo *continue* mettere una virgola.

» 167, » 10, dal fondo, invece di $\mp\infty$ leggere $\pm\infty$.

» 250, » 3, invece di $+\infty$ mettere, dappertutto, $\pm\infty$.

» 254, » 15, invece di *divisione* leggere *discontinuità.*

www.rcin.org.pl

Pag. 257 (§ 10, *f*). Agli esempii d'integrazione diretta ci piace aggiungerne uno, dovuto a Fourier (*Oeuvres*, t. I, p. 402). Supponendo conosciuta la formola

$$\operatorname{sen} x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3x + {}^1/_5 \operatorname{sen} 5x + \ldots = {}^1/_4 \pi \cdot (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]},$$

se si divide $(0, \infty)$ in infiniti intervalli, il primo dei quali abbia la grandezza h, e gli altri una grandezza doppia, si ha

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{h=0} (\operatorname{sen} h + {}^2/_3 \operatorname{sen} 3h + {}^2/_5 \operatorname{sen} 5h + \ldots\ldots) = {}^1/_2 \pi - \lim_{h=0} \operatorname{sen} h = {}^1/_2 \pi .$$

» 288, linea 8, dal fondo, mettere un $\int$ innanzi a $\frac{dx}{x^4+1}$.

» 313, » 6, sotto il terzo segno integrale, invece di $x^{\mu-1}$ leggere $y^{\mu-1}$.

» 319, » 1, in principio manca *j*).

» 333, sulla figura, si legga $a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

» 349 (§ 6, *a*). Ai risultati qui ottenuti si giunge molto più rapidamente mercè l'uso delle coordinate polari. Infatti si vede subito (VI, 9) che l'equazione da integrare è $r' = r \cot 2\theta$, o $r' = -r \operatorname{tg} 2\theta$; quindi $r = a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$, o $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$. È poi da notare che due lemniscate qualunque, prese nelle due famiglie, si tagliano, fuori, del polo, ad angolo retto.

» 375, alla fine del § 17, si suppone che si vada in cerca di *superficie* tangenti ai piani dati; ma si noti che esistono sempre infinite *linee* soddisfacenti alle medesime condizioni, anche quando non è soddisfatta la (19). Infatti l'eliminazione di z fra la (17) ed una relazione *arbitraria* $\varphi(x, y, z) = 0$ conduce ad un'equazione differenziale del primo ordine fra *due* variabili, e questa ammette sempre una semplice infinità di integrali.

» 378, linea 3, dal fondo, si sottintende che l'integrazione a cui si accenna dev'esser fatta trattando φ come costante.

» 383, linea 5: l'equazione differenziale qui scritta si deduce da quella citata (XI, 7, *c*) cambiando x in $\pi a - x$ ed y in $2a - y$.

www.rcin.org.pl

INDICE

Teorie fondamentali

I. Le funzioni:

Prime nozioni . . . . . *pag.* 7
Tendenza al limite . . . . . » 16
Continuità . . . . . » 20

II. Le derivate:

Regole di derivazione . . . . . » 30
Proprietà delle derivate . . . . . » 40
Complementi della teoria dei limiti. . . . . » 50

III. Sviluppi in serie:

Serie di funzioni . . . . . » 56
Formole di Taylor e di Mac-Laurin . . . . . » 64
Valutazione assintotica delle serie di potenze . . . . . » 73
Discussione delle funzioni . . . . . » 80
Formole d'interpolazione . . . . . » 85
Decomposizione delle funzioni razionali in somme di frazioni semplici . . » 91

IV. Funzioni di più variabili:

Prime nozioni . . . . . » 93
Minimi e massimi . . . . . » 100

Calcolo differenziale

V. La differenziazione:

Funzioni d'una variabile . . . . . » 111
Funzioni di più variabili . . . . . » 122
Funzioni implicite . . . . . » 130

VI. Applicazioni alle curve piane:

Differenziale dell'arco . . . . . » 141
Tangente e normale . . . . . » 144
Curvatura . . . . . » 152
Assintoti. . . . . » 165
Singolarità . . . . . » 173
Contatti . . . . . » 183
Inviluppi. . . . . » 187

VII. Applicazioni alle curve storte:

Formole fondamentali . . . . . » 193
Curvature . . . . . » 199
Contatti . . . . . » 209

www.rcin.org.pl

VIII. Applicazioni alle superficie:

Prime nozioni . . . . . *pag.* 214
Superficie rigate . . . . . » 220
Inviluppi . . . . . » 224
Curvatura . . . . . » 230
Determinazione e proprietà delle linee notevoli d'una superficie . . . » 238

Calcolo integrale

IX. L'integrazione:

Concetti fondamentali . . . . . » 247
Regole d'integrazione . . . . . » 254
Integrazione multipla . . . . . » 275

X. Applicazioni al calcolo di talune notevoli classi d'integrali:

Integrazione dei differenziali razionali . . . . . » 285
Integrazione dei differenziali irrazionali . . . . . » 290
Integrazione dei differenziali trascendenti . . . . . » 300
Integrali definiti notevoli . . . . . » 303

XI. Applicazioni a misure geometriche:

Lunghezze . . . . . » 315
Aree piane . . . . . » 319
Aree e volumi nei solidi di rotazione . . . . . » 326
Baricentri . . . . . » 331
Aree e volumi qualunque . . . . . » 335

XII. Equazioni differenziali:

Equazioni fra due variabili . . . . . » 344
Applicazioni geometriche . . . . . » 355
Equazioni lineari . . . . . » 364
Equazioni fra più variabili . . . . . » 373

XIII. Le variazioni . . . . . » 380

NOTE . . . . . » 387
Correzioni ed aggiunte . . . . . » 397

PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl